

LEVEL-LEVEL ABSTRAKSI DALAM PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

Wiryanto

Jurusan Teknik Elektro Fakultas Teknik Universitas Negeri Surabaya.

e-mail: wiryantoro29@yahoo.co.id

Abstrak

Tulisan pada jurnal ini bertujuan untuk mengetahui proses abstraksi mahasiswa dalam pemecahan masalah matematika tentang Aplikasi Turunan tentang Nilai Ekstrem di Fakultas Teknik Unesa. Manfaat tulisan ini adalah memberikan masukan kepada guru/dosen yang mengajar matematika untuk dapat mengetahui proses abstraksi mahasiswa, sehingga dapat dijadikan sebagai bahan pertimbangan dalam menyusun rencana pembelajaran. Permasalahannya adalah bagaimana proses abstraksi mahasiswa dalam memecahkan/menyelesaikan masalah matematika yang terkait Aplikasi Turunan (*Derivatif*) tentang Pengoptimuman. Abstraksi adalah sebuah aktivitas yang merupakan proses mental dalam membentuk suatu konsep matematika yang melibatkan hubungan-hubungan antar struktur atau objek-objek matematis. Pada tulisan ini, abstraksi yang digunakan adalah abstraksi reflektif (*theoretical abstraction*), yaitu mengacu pada kemampuan mahasiswa untuk memproyeksikan (merekonstruksi/mengungkapkan kembali) dan mereorganisasi struktur yang diciptakan dari aktivitas dan interpretasi siswa sendiri kepada suatu situasi baru. Aktivitas-aktivitas abstraksi refleksi yang terlibat dalam setiap tahapan adalah sebagai berikut: (1) pengenalan (*recognition*), (2) representasi (*representation*), (3) abstraksi struktural (*structural abstraction*), dan (4) kesadaran struktural (*structural awareness*). Sedangkan pemecahan masalah matematika adalah proses menemukan jawaban matematika yang meliputi: memahami masalah, merencanakan pemecahan masalah, melaksanakan rencana, dan memeriksa kembali hasil yang diperoleh.

Kata kunci: Level-level abstraksi, pemecahan masalah matematika, terapan turunan (optimum)

Abstract

The aim of journal was determined abstraction process of students in mathematical problem solving on Derivatives Applications of Extreme Value in the Faculty of Engineering Unesa. Benefits of this paper is to provide feedback to teachers or lecturers who teach mathematics to be able to know the process of abstraction student, so it can be used as a material consideration in preparing lesson plans. The problem is how will student to applicate derivative process of abstraction in problem solving mathematical related to optimization. The Abstraction is an activity which is a mental process in the form of a mathematical concept that involves the relationships between structures or mathematical objects. In this paper, the abstraction used reflective abstraction (*theoretical abstraction*), which refers to the ability of students to project (reconstruct / restate) and reorganizes the structure created from the activity and the student's interpretation to new situation. The reflection abstraction activities involved each phase are: (1) recognition, (2) representation, (3) structural abstraction, and (4) structural awareness. While problem solving of mathematical was the mathematical process of finding answers that included: understand the problem, the problem-solving plan, implement the plan, and re-examine the results obtained.

Keywords: Levels of abstraction, mathematical problem solving, applied derivatives (optimum)

PENDAHULUAN

Dalam matematika, objek dasar yang abstrak itu sering disebut objek mental atau objek pikira. Objek dasar matematika meliputi: fakta, konsep, operasi/relasi, dan prinsip (Begle, 1979:6-7). Selanjutnya, Bell mengklasifikasikan objek matematika sebagai objek langsung dan objek matematika tidak langsung adalah hal-hal yang mengiringi perolehan belajar objek langsung, misalnya kemampuan pemecahan masalah, kemampuan menganalisa.

Wood, Williams dan McNael (2000:226) mendefinisikan berpikir matematik adalah "*Mathematical*

thinking as the mental activity involved in the abstraction and generalization of mathematical ideas". Menurut Ferrari (2003) bahwa abstraksi seringkali merupakan langkah dasar dalam menciptakan konsep-konsep baru dan sering muncul objek baru. Sebagai contoh, bilangan asli diabstraksikan suatu proses menghitung atau proses *matching*, kemudian bilangan tersebut digunakan sebagai objek untuk membangun bilangan bulat melalui abstraksi, sehingga bilangan rasional, bilangan riil dan bilangan kompleks berturut-turut dibangun melalui proses abstraksi.

Herskowitz dkk. (Mitchelmore dan White, 2004) mendefinisikan abstraksi merupakan suatu aktivitas reorganisasi vertikal konsep matematika yang telah dikonstruksi sebelumnya melalui sebuah struktur matematika baru. Objek-objek matematika baru dikonstruksi melalui pembentukan hubungan sedemikian hingga menemukan generalisasi, bukti, atau strategi baru pada pemecahan masalah.

Piaget (Gray dan Tall, 2007) mengemukakan teori tiga bagian (*tripartite theory*) tentang abstraksi, pertama abstraksi empiris (*empirical abstraction*) yang memfokuskan pada cara anak mengkonstruksi arti sifat-sifat objek. Kedua, abstraksi empiris semu (*pseudo-empirical abstraction*) yang memfokuskan pada cara anak mengkonstruksi arti sifat-sifat aksi pada objek. Ketiga, abstraksi reflektif (*reflective abstraction*) yang memfokuskan pada ide tentang aksi dan operasi menjadi objek tematik pada pemikiran atau asimilasi, yang berkaitan dengan kategorisasi operasi mental dan abstraksi terhadap objek mental. Hasil abstraksi reflektif ialah skema pengetahuan pada setiap tahap perkembangan dan abstraksi reflektif menyaring skema dari pola aksi yang berkaitan; dan skema itu adalah suatu struktur mental seseorang (Suparno, 2001).

Dalam aktivitas abstraksi reflektif, dapat diketahui bagaimana cara siswa mengkonstruksi pengetahuan konseptual yaitu dengan cara siswa tersebut memberikan alasan-alasan terhadap keputusan yang dibuat (Goodson-Espy, 2005); Hal ini sesuai dengan teori konstruktivis, bahwa pengetahuan seseorang adalah bentuk/konstruksi orang itu sendiri. Proses pembentukan pengetahuan itu terjadi apabila seseorang mengembangkan skema hasil abstraksi reflektif yang telah dimiliki dalam berhadapan dengan tantangan, rangsangan atau masalah. Jadi skema yang telah dimiliki oleh siswa dikembangkan untuk membentuk pengetahuan ketika dihadapkan dengan suatu masalah. Masalah dalam tulisan ini termasuk jenis masalah menemukan, dan masalah diartikan sebagai soal tidak rutin yang memerlukan pemecahan dengan pemikiran yang kompleks. Pemecahan masalah matematika adalah proses menemukan jawaban matematika yang meliputi langkah-langkah Polya, yaitu: memahami masalah, merencanakan pemecahan masalah, melaksanakan rencana, dan memeriksa kembali hasil yang diperoleh.

Abstraksi reflektif (*reflective abstraction*) mengacu pada kemampuan subjek untuk memproyeksikan dan mereorganisasikan struktur yang diciptakan berdasarkan aktivitas dan interpretasi subjek sendiri kepada suatu situasi baru. Hal ini sejalan dengan pendapat Glasersfeld (Goodson-Espy, 2005:1) yang menjelaskan bahwa: *"Reflective abstraction refers to the subject's ability to project on to a new level and reorganize a structure*

created from the subject's own activities and interpretations".

Level-level atau tahap-tahap aktivitas abstraksi reflektif menurut Cifarelli (1988) didefinisikan sebagai berikut: Level pertama adalah pengenalan (*recognition*), level kedua adalah representasi (*representation*), level ketiga adalah abstraksi struktural (*structural abstraction*), dan level keempat atau level tertinggi adalah kesadaran struktur (*structural awareness*). Penulis menggunakan level aktivitas abstraksi reflektif yang dikemukakan oleh Cifarelli tersebut untuk mendeskripsikan proses abstraksi mahasiswa Fakultas Teknik dalam pemecahan masalah "pengoptimasian" pada terapan turunan.

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka permasalahannya "Bagaimana proses abstraksi mahasiswa Fakultas Teknik dalam pemecahan masalah matematika tentang penggunaan/aplikasi turunan pengoptimasian? Sedangkan tujuan penulisan ini adalah untuk mengetahui proses abstraksi mahasiswa dalam pemecahan masalah matematika tentang Aplikasi Turunan Pengoptimasian di Fakultas Teknik Unesa. Manfaat tulisan ini adalah memberikan masukan kepada guru/dosen yang mengajar matematika untuk dapat mengetahui proses abstraksi mahasiswa, sehingga dapat dijadikan sebagai bahan pertimbangan dalam menyusun rencana pembelajaran berdasarkan kemampuan mengabstraksi.

METODE

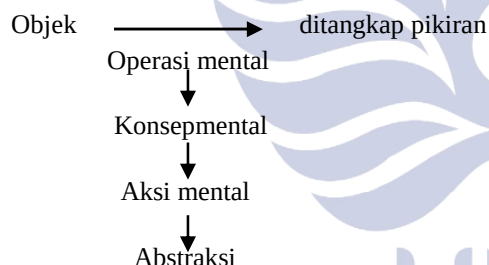
Jenis penelitian ini adalah eksploratif dengan pendekatan kualitatif. Peneliti ingin menggali secara mendalam bagaimana proses abstraksi (melalui level-level abstraksinya) selama memecahkan masalah tentang pengoptimasian pada aplikasi turunan. Dalam penelitian ini data yang diperoleh adalah data berupa hasil tes atau tugas pemecahan masalah dengan kombinasi metode *think aloud* dan transkrip hasil wawancara.

Subjek dalam penelitian ini adalah mahasiswa semester 1 Jurusan Pendidikan Teknik Elektro (PTE) 2013/2014. Prosedur pengumpulan data dilakukan dengan memberikan tes pemecahan masalah kepada subjek penelitian secara perorangan, kemudian dilakukan wawancara tentang bagaimana subjek tersebut merencanakan pemecahan masalah, sehingga diperoleh abstraksi mahasiswa tersebut. Proses analisis data dimulai dengan menelaah seluruh data yang tersedia dari berbagai sumber, yaitu hasil tes tertulis, wawancara, catatan lapangan dan rekaman video. Langkah berikutnya adalah menganalisis jawaban subjek, menguji relevansi representasi-representasi subjek dengan jalan membandingkan data dan teori. Langkah terakhir yang dilakukan adalah menyimpulkan tentang abstraksi subjek yang diteliti.

KAJIAN TEORI DAN PEMBAHASAN

Kata *abstraction* (grey & Tall,1994) mempunyai dua arti, pertama sebagai proses ‘melukiskan’ suatu situasi, dan kedua merupakan konsep sebagai hasil dari sebuah proses. Menurut Soedjadi (2000), abstraksi terjadi bila dari beberapa objek kemudian di “gugurkan” ciri atau sifat objek itu yang dianggap tidak penting, dan akhirnya hanya diperhatikan atau diambil sifat penting yang dimiliki bersama. Abstraksi berawal dari sebuah himpunan objek, selanjutnya dikelompokkan berdasarkan sifat dan hubungan penting, kemudian digugurkan sifat dan hubungan yang tidak penting. Hasil abstraksi terdiri atas himpunan semua objek yang mempunyai sifat dan hubungan penting sehingga abstraksi merupakan sebuah proses dekontekstualisasi. Proses ini linier, berawal dari objek-objek menuju pada kelas atau struktur dan disebut objek pada level yang lebih tinggi. Menurut psikologi kognitif klasik (Hershkowitz, Schwarz, dan Dreyfus, 2001), ciri utama abstraksi ialah penyarian sifat yang sama atau umum dari sebuah himpunan contoh nyata. Pada pendekatan klasik, abstrak dianggap sebagai sifat instrinsik dari objek yang baru.

Piaget (Tall,1990) memberikan penjelasan tentang abstraksi, yaitu abstraksi terjadi karena ‘aksi mental’ yang dipengaruhi oleh konsep mental. Konsep mental ini digerakkan oleh operasi mental dari objek yang ditangkap pikiran, seperti disajikan diagram berikut.



Menurut Piaget (Gray dan Tall, 2007; Ozmantar dan Monaghan,2007) membedakan tiga bentuk abstraksi, yaitu abstraksi empiris (*empirical abstraction*), abstraksi empiris semu (*psido-empirical abstraction*), dan abstraksi reflektif (*reflaction abstraction*).

Mitchelmore & White (2007) secara garis besar membedakan abstraksi menjadi dua, yaitu abstraksi empiris dan abstraksi teoritis. Pada proses abstraksi empiris, pembentukan pengertian tentang suatu objek yang abstrak berdasar pada pengalaman empiris. Salah satu contohnya adalah konsep abstraksi yang disampaikan oleh Skemp dan konsep abstraksi empiris yang disampaikan oleh Piaget. Kedua proses abstraksi tersebut didasarkan pada pengalaman sosial dan fisik dari anak, sehingga dikenal sebagai abstraksi empiris. Abstraksi empiris memiliki fokus terhadap proses identifikasi tampilan-tampilan penting umum, sehingga konsep yang

dihasilkan dari proses abstraksi empiris disebut juga sebagai konsep *abstract-general* (Mitchelmore & White, 2007). Abstraksi teoritis terdiri atas pembentukan konsep-konsep untuk disesuaikan dengan beberapa teori. Vygotsky membedakan antara makna konsep dalam konteks kehidupan sehari-hari dengan makna konsep dalam konteks bidang ilmiah. Menurut Vygotsky, konsep dalam konteks kehidupan sehari-hari dibentuk melalui proses abstraksi empiris. Adapun pembentukan konsep-konsep ilmiah terdiri atas tiga aspek, yaitu (1) penetapan sebuah sistem dari berbagai relasi diantara konsep-konsep, (2) kesadaran dari aktivitas mental seseorang, dan (3) penetrasi ke dalam suatu esensi dari objek justru akan memperkaya realitas yang dipresentasikan dalam konsep tersebut, bukan sebaliknya (Mitchelmore & White, 2007).

Alur proses abstraksi empiris dan abstraksi teoritis berbeda; pada abstraksi empiris, individu membentuk konsep baru berdasar pada pengamatan dan pengalaman sedangkan pada abstraksi teoritis, konsep baru dibentuk dengan melakukan pencocokan konsep, jadi dengan pengalaman-pengalaman yang sudah terbentuk dan tersimpan lebih dahulu dalam pemikiran individu. Teori Piaget tentang abstraksi reflektif yang berfokus pada hubungan-hubungan antara tindakan dan teori model abstraksi *RBC (Recognizing, Building-With and Construction)* yang dikemukakan oleh Dreyfus dkk. (2001) dapat dikategorikan sebagai bentuk abstraksi teoritis.

Berdasarkan pengertian abstraksi baik empiris maupun teoritis, indikasi terjadinya proses abstraksi dalam pemecahan masalah matematika (khususnya masalah aplikasi turunan nilai ekstrim), dapat dicermati dari beberapa aktivitas berikut: (1) Mengidentifikasi karakteristik objek melalui pengalaman langsung. (2) Mengidentifikasi karakteristik objek yang dimanipulasi atau diimajinasikan. (3) Membuat generalisasi. (4) Merepresentasikan gagasan matematika dalam bahasa dan simbol-simbol matematika. (5) Melepaskan sifat-sifat kebendaan dari sebuah objek atau melakukan idealisasi. (6) Membuat hubungan antar proses atau konsep untuk membentuk suatu pengertian baru. (7) Mengaplikasikan konsep pada konteks yang sesuai. (8) Melakukan manipulasi objek matematis yang abstrak.

Level-level dalam Abstraksi

Ide Piaget dan von Glasersfeld mengenai abstraksi reflektif diaplikasikan oleh Cifarelli (1988) dan Goodson-Espy (1988) dalam penelitian yang lebih khusus, aksi pemecahan masalah yang dapat diobservasi, digunakan untuk mendefinisikan level-level dalam aktivitas abstraksi reflektif. Cifarelli mendefinisikan level-level dalam abstraksi reflektif untuk mendeskripsikan proses pembelajaran, dan dideskripsikan level-level yang dicapai

oleh mahasiswa ketika memecahkan masalah aljabar. Goodson-Espy menggunakan level-level tersebut dan menghubungkannya dengan teori Sfard dan Linchewski (1994), yaitu teori reifikasi (*reification*) untuk mendeskripsikan transisi mahasiswa ketika menggunakan aritmetika pada aljabar.

Level-level dalam aktivitas abstraksi menurut Cifarelli (1988) adalah sebagai berikut: Level pertama adalah pengenalan (*recognition*), level kedua adalah representasi (*representation*), level ketiga adalah abstraksi struktural (*structural abstraction*), dan level ke-empat atau level tertinggi adalah kesadaran struktural (*structural awareness*). Level pertama adalah pengenalan (*recognition*), berarti mengidentifikasi suatu struktur matematika yang telah ada sebelumnya, baik pada aktivitas yang sama maupun aktivitas sebelumnya. Mengenali suatu struktur matematika terjadi ketika seorang siswa menyadari bahwa suatu struktur yang telah ada dan mungkin telah digunakan sebelumnya “melekat” pada masalah matematika/konsep dasar pecahan yang dihadapi saat ini. Ketika siswa dihadapkan pada pemecahan masalah, memahami dan menjelaskan situasi tertentu atau merefleksikan suatu proses, mereka memerlukan aturan atau hubungan yang mendasari permasalahan tersebut. Untuk mencapai tujuan tersebut, mereka harus mengingat kembali struktur yang telah mereka peroleh pada aktivitas sebelumnya dan menggunakannya dalam aktivitas selanjutnya.

Cifarelli (Petty,1996:9) menjelaskan siswa pada mengenali sebagai berikut: “*Recognition. At this stage, the problem solver encounters a new situation, and recalls or identifies activity from previous situations as being appropriate*”. Cifarelli menjelaskan bahwa pada tahap pengenalan, *problem solver* menghadapi suatu situasi baru, dan mengingat atau mengidentifikasi aktivitas dari situasi-situasi sebelumnya terkait dengan masalah yang sedang dihadapi.

Hershkowitz, Schwarz dan Dreyfus (2001: 9), dan Jirotcova, dan Littler (2004: 2) mengemukakan bahwa:

“*Recognition of a familiar mathematical structure occurs when a student realizes that a structure (s)he has constructed and possibly used earlier is inherent in a given mathematical situation. Usually, recognizing occurs as part of an activity with a purpose that goes beyond the act of recognition*”.

Makna dari kutipan di atas adalah bahwa pengenalan terhadap suatu struktur matematika yang sudah pernah dipelajari, terjadi ketika seseorang siswa menyadari bahwa suatu struktur yang telah dikonstruksinya dan mungkin telah digunakan sebelumnya sesuai dengan suatu situasi matematika yang diberikan. Biasanya proses pengenalan terjadi sebagai bagian dari aktivitas dengan tujuan lebih dari sekedar aksi pengenalan. Pada abstraksi

mengenali, walaupun siswa sudah mengenali berbagai hal struktur matematika, tetapi tidak secara otomatis berubah menjadi suatu representasi atau gambaran yang dapat mewakili hal tersebut.

Level kedua adalah representasi (*representation*). Cifarelli (Petty,1996:20) menjelaskan aktivitas siswa pada level representasi sebagai berikut:

“*Representation. The problem solver utilizes a diagram in resolving a problematis situation to aid reflection. The problem solver is operating at this level if more control over the solution activity is demonstrated or, more precisely, if the solver represents this solution activity. This reflective level requires the individual to demonstrate a certain degree of flexibility and control over prior activity in the sense that the activity could mentally be “run through”*”.

Pada level representasi ini, siswa menggunakan diagram di dalam memecahkan suatu situasi untuk membantu refleksi. Refleksi level ini memerlukan individu untuk mempertunjukkan suatu derajat tingkat fleksibilitas dan kendali tertentu atas aktivitas sebelumnya. Segala aktivitas penyelesaian yang mungkin dilaksanakan, tanpa bisa mengantisipasi hasilnya.

Level ketiga adalah abstraksi struktural (*structural abstraction*). Cifarelli (Petty,1996:20) menjelaskan aktivitas pada level abstraksi struktural sebagai berikut.

“*Structural abstraction. At this level, a problem solver is able to distance himself or herself from the activity in such a manner that he or she could reflect on and make abstraction from the re-presentation of solution activity. This also suggests that the problem solver is able to reflect on potential, as well as, prior activity*”.

Pada level ketiga ini, siswa mampu membuat abstraksi dan representasi aktivitas penyelesaian. Siswa juga mampu untuk merefleksikan potensial dari aktivitas sebelumnya. Siswa mampu memproyeksikan dan mereorganisasi struktur yang diciptakan dari aktivitas dan interpretasi siswa sendiri kepada suatu situasi baru. Struktur matematika yang ada diproyeksikan dan direorganisasikan, sehingga menambah kedalaman pengetahuan siswa sendiri. Reorganisasi dari konsep matematika merupakan aktivitas mengumpulkan, menyusun, mengorganisasi, mengembangkan unsur-unsur matematis menjadi unsur baru. Baru dimaksudkan menyatakan sebagai hasil abstraksi, siswa dalam sebuah aktivitas merasakan sesuatu yang sebelumnya tidak dapat mereka peroleh. Dalam pemecahan masalah, subjek mampu memecahkan masalah yang baru dengan menggunakan koordinasi-koordinasi tertentu dari struktur-struktur yang telah dibangun dan direorganisasikan oleh subjek tersebut; tetapi kita tidak tahu apakah subjek sadar atau tidak sadar dalam hal ini.

Level ke-empat adalah kesadaran struktural (*structural awareness*). Cifarelli (Petty,1996:20) menjelaskan

aktivitas siswa pada level kesadaran struktural sebagai berikut: *“Structural awareness. A problem solver at this level will demonstrate an ability to anticipate result of potential activity without having to run through the activity in thought”*. Pada level ini, siswa akan menunjukkan satu kemampuan untuk mengantisipasi hasil-hasil dari aktivitas potensial tanpa harus menyelesaikan semua aktivitas yang dipikirkan. Kesadaran struktural mengacu pada kesadaran metakognisi siswa mengenai aktivitas dan organisasi pada struktur kognitifnya. Siswa mampu memikirkan struktur sedemikian sebagai objek-objek dan mampu membuat keputusan tentang hal tersebut tanpa mengusahakan bentuk fisik atau secara mental merepresentasikan metode penyelesaian.

Suatu keistimewaan pada level-level abstraksi yang dikemukakan oleh Cifarelli tersebut bahwa level-level ini suatu tahapan untuk mendeskripsikan apakah seorang *problem solver* sadar atau tidak sadar pada konsep-konsep tertentu selama aktivitas pemecahan masalah mereka, dan membantu mengidentifikasi apakah seorang *problem solver* menggunakan metode penyelesaian sebelumnya atau apakah dia menggunakan metode pemecahan masalah yang baru (Goodson-Espy, 2005).

Selanjutnya, Goodson-Espy mengatakan perbedaan antara level-level dalam abstraksi reflektif mengacu pada kemampuan subjek untuk memecahkan masalah, tetapi ia tidak merinci pada setiap level. Secara lengkap ia mengatakan sebagai berikut: *“The difference between levels of reflective abstraction are described in terms of whether a solver can: (1) recognize having solved a similar problem before; (2) re-use previous solution methods on a problem; (3) develop novel strategies for a problem that the solver has not used previously; (4) anticipate sources of difficulty and promise during the solution process when using a previously applied method; (5) anticipate sources of difficulty and promise during the solution process when using a new solution method; (6) mentally run-through methods used previously; (7) mentally run-through potential solution methods; (8) demonstrate conscious awareness of problem solving activities and decisions”*.

Dalam tulisan ini, untuk mengetahui proses abstraksi reflektif dalam pemecahan masalah matematika, maka dibuat karakteristik abstraksi reflektif atau indikator pada setiap level aktivitas berdasarkan hasil *study literature* seperti dikemukakan pada Tabel 2. berikut ini.

Tabel 2. Karakteristik pada Level-level Abstraksi

No	Level –level Abstraksi	Karakteristik
1	<i>Recognition</i>	a. Mengingat kembali aktivitas sebelumnya yang berkaitan dengan masalah yang sedang dihadapi. b. Mengidentifikasi aktivitas sebelumnya yang berkaitan dengan masalah yang sedang dihadapi.
2	<i>Representation</i>	a. Menyatakan hasil pemikiran sebelumnya dalam bentuk simbol matematika, kata-kata, grafik untuk membantu refleksi/rekonstruksi b. Menerjemahkan dan mentransformasikan informasi atau struktur ke dalam model matematika. c. Menjalankan metode solusi alternatif yang mungkin
3	<i>Structural Abstraction</i>	a. Merefleksi aktivitas sebelumnya kepada situasi baru. b. Mengembangkan strategi baru untuk suatu masalah, dimana sebelumnya belum digunakan. c. Mengantisipasi sumber kesulitan dalam proses penyelesaian apabila digunakan metode yang lain. d. Mereorganisasikan struktur masalah matematika berupa menyusun, mengorganisasikan dan mengembangkan.
4	<i>Structural Awareness</i>	a. Sadar akan kemampuannya untuk mengantisipasi hasil pemecahan masalah tanpa menjalankan semua aktivitas yang dipikirkan. b. Memberikan argumen-argumen atau alasan-alasan terhadap keputusan yang dibuat. c. Sadar akan kesulitan selama proses penyelesaian apabila digunakan alternatif metode penyelesaian yang lain. d. Merefleksikan keputusan yang diperoleh untuk aktivitas berikutnya. e. Mampu menunjukkan ringkasan aktivitasnya selama pemecahan masalah.

Pemecahan Masalah Matematika

Stanic dan Kilpatrick (1988:15) mendefinisikan masalah sebagai suatu keadaan dimana seseorang melakukan tugasnya yang tidak ditemukan di waktu sebelumnya. Ini berarti, suatu tugas merupakan masalah bergantung kepada individu dan waktu. Artinya, suatu tugas merupakan masalah bagi seseorang, tetapi mungkin bukan merupakan masalah bagi orang lain. Demikian pula suatu tugas merupakan masalah bagi seseorang pada suatu saat, bila orang itu telah mengetahui cara atau proses mendapatkan pemecahan masalah tersebut.

Masalah dalam matematika dapat juga dikelompokkan dalam beberapa kategori, misalnya masalah rutin dan masalah non rutin. Menurut LeBlanc dkk. (Baroody, 1993) suatu masalah rutin hanya memerlukan satu langkah proses penyelesaian. Penekanan pada masalahnya adalah operasi manakah yang cocok atau tepat digunakan; sedangkan masalah non rutin memerlukan identifikasi, aplikasi

beberapa operasi aritmetika serta menyediakan suatu tantangan lebih besar bagi anak-anak berpikir. Masalah non rutin bisa berupa soal kontekstual atau soal nyata (*real, application problems*), soal cerita (*verbal, word problems*) dan sebagainya.

Menurut Polya (1973), masalah itu terbagi menjadi dua, yaitu masalah untuk menemukan dan masalah membuktikan. Masalah untuk menemukan merupakan suatu masalah teoritis atau praktis, abstrak atau konkrit. Bagian penting dari masalah untuk menemukan antara lain apa yang dicari? Bagaimana data yang diketahui? Bagaimana syaratnya? Sedangkan masalah membuktikan merupakan masalah untuk menunjukkan apakah suatu pernyataan benar atau salah, atau tidak keduanya. Hal ini dapat dilakukan dengan cara menjawab pertanyaan itu benar atau salah? Bagian utama masalah ini adalah hipotesis dan konklusi suatu teorema yang harus dibuktikan kebenarannya. Dalam tulisan ini, masalah yang dimaksud termasuk jenis masalah menemukan.

Dalam pemecahan masalah matematika dibutuhkan prosedur yang mengacu pada keterampilan mengurutkan langkah-langkah yang dikenal dengan algoritma atau prosedur pemecahan masalah. Menurut Polya (1973:xvi) langkah-langkah pemecahan masalah adalah sebagai berikut.

(1) Memahami masalah (*understanding the problem*)

Pada langkah ini, siswa harus dapat menunjukkan inti atau bagian penting dari masalah, yaitu “yang diketahui”, “yang ditanyakan” dan “syarat-syarat” yang terdapat dalam masalah.

(2) Merencanakan pemecahan masalah (*devising a plan*)

Pada langkah ini, siswa memikirkan ide atau gagasan rencana. Gagasan yang baik didasarkan pada pengalaman atau struktur pengetahuan sebelumnya. Oleh karena itu pertanyaan yang diajukan yaitu apakah masalah ini berhubungan dengan sesuatu?

(3) Melaksanakan rencana (*carrying out the plan*)

Dalam melaksanakan rencana yang telah dirancang, guru/dosen seharusnya meminta siswa/mahasiswa untuk memeriksa setiap langkah. Dosen boleh bertanya, apakah anda yakin bahwa langkah itu benar?

(4) Melihat kembali (*looking back*)

Setelah diperoleh penyelesaian, maka siswa/mahasiswa perlu memeriksa kembali hasil yang telah diperoleh. Pertanyaan yang diajukan adalah dapatkah anda memeriksa hasilnya? Dapatkah anda memeriksa argumentasinya? Untuk memberikan tantangan dan kepuasan dalam memecahkan masalah dapat diajukan pertanyaan, yaitu dapatkah anda memperoleh jawaban dengan cara yang berbeda? Dapatkah anda menggunakan hasil atau metode ini untuk masalah yang lain?

Abstraksi dalam Pemecahan Masalah Matematika

Pemecahan masalah didefinisikan sebagai proses yang dilakukan individu dalam mengkombinasikan pengetahuan-pengetahuannya sebelumnya untuk menghadapi situasi baru (Rodney dkk., 2001:67). Menurut Johnson & Rising (1972), pemecahan masalah matematika merupakan suatu proses mental yang kompleks, memerlukan visualisasi, imajinasi, manipulasi, analisis, abstraksi dan pernyataan ide. Selanjutnya Jonansen (Suparno, 1997:55) mengatakan bahwa hasil abstraksi mental seseorang adalah skema yang digunakan untuk mengerti sesuatu hal, menemukan jalan keluar atau memecahkan masalah. Ini berarti bahwa pemecahan masalah matematika, kemampuan siswa melakukan abstraksi sangat diperlukan.

Dalam aktivitas pemecahan masalah pada suatu situasi, siswa sering menghubungkan aktivitas tersebut ke situasi pemecahan masalah berikutnya. Jika siswa telah mampu menghubungkan secara eksplisit metode penyelesaian masalah yang baru dengan masalah semula, penemuan seperti itu memberikan kesan bahwa konstruksi dari struktur abstrak dapat memungkinkan *problem solver* mempunyai antisipasi tentang sifat dan ruang lingkup/jangkauan dari aktivitas pemecahan masalah berikutnya, artinya mereka dapat “melihat” bahwa pemecahan masalah berikutnya dalam beberapa hal sama dengan pemecahan yang telah mereka miliki.

Ketika siswa memecahkan masalah, seharusnya menyadari akan apa yang diabstraksikan. Di sini perlu dilihat apakah siswa mampu mengekspresikan atau mendemonstrasikan kesadarannya pada aktivitas pemecahan masalah, dan memberikan alasan-alasan terhadap keputusan atau kesimpulan yang diperoleh pada pemecahan masalah.

Pada dasarnya siswa memiliki karakteristik yang berbeda-beda dan harus diakomodasi dalam pembelajaran, agar diperoleh hasil belajar yang optimal. Terkait hal tersebut, suatu *review* riset psikologi kognitif telah menunjukkan bahwa individu secara signifikan memiliki perbedaan-perbedaan dalam memecahkan masalah dan aktivitas pengambilan keputusan (Robertson dalam Liu dan Ghinter, 1999). Psikologi dengan dengan berbagai cabangnya telah mengidentifikasi sangat banyak variabel yang mengindikasikan perbedaan individu dan mempengaruhi proses belajar, antara lain kecerdasan, gaya kognitif, gaya berpikir, gaya belajar, daya adopsi, ketahanan-malangan dan kemampuan awal.

Contoh Soal Aplikasi Masalah Pengoptimuman dalam Menentukan Level Abstraksi Mahasiswa

Seorang petani mempunyai pagar sepanjang 24 m dan bermaksud memagari lapangan berbentuk persegi panjang yang membatasi sungai lurus. Petani tersebut tidak

memerlukan pagar sepanjang sungai. Berapa dimensi (ukuran) lapangan yang mempunyai luas terbesar?

Pada Langkah memahami Masalah

- Pastikan bahwa mahasiswa telah membaca soal.
- Apa yang diketahui dalam soal?
- Apa yang ditanyakan dalam soal?
- Apa hubungan antara yang diketahui dengan yang ditanyakan dalam soal.

Bentuk pagar persegi panjang; panjang pagar 24 m; Misalnya x panjang dan y lebar pagar. Sehingga model matematikanya adalah $x+2y=24$ (ini hubungan antara variabel yang diketahui). Syarat: $x>0$, $y>0$

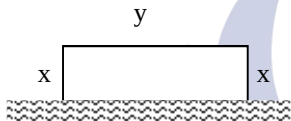
Berapa ukuran lapangan yang mempunyai luas terbesar?

Tentukan nilai x dan y , agar $L=xy$ maksimum

Langkah Merencanakan Pemecahan Masalah

Informasi apa yang terkait dengan masalah/soal, yaitu mengaitkan situasi baru dan situasi sebelumnya.

Membuat sketsa/ilustrasi persegi panjang (refleksi):



Langkah Menyelesaikan Masalah sesuai Rencana

Model matematika $x+2y=24 \Leftrightarrow x = 24-2y$

Maka $L(x,y) = xy$, $L(y) = (24-2y)y = 24y - 2y^2$

Agar $L(y)$ maksimum, maka $L'(y)=0$ (syarat maks.)

$24-4y=0 \Leftrightarrow y=6$ dan $x=12$. Jadi agar luasnya maksimum, haruslah panjang pagar 12m, lebar 6m.

Cara lain: $y=(24-x)/2$ menyatakan $y=f(x)$

Maka $L(x,y)=xy$, $L(x)=x(24-x)/2=12x-x^2/2$

Agar $L(x)$ maksimum, maka $L'(x)=0$ (syarat maks.)

$12-x=0 \Leftrightarrow x=12$ dan $y=6$. Jadi agar luasnya maksimum, haruslah panjang pagar 12m, lebar 6m.

Langkah memeriksa Kembali Hasil yang Diperoleh

Bagaimana mengeceknya? Lalu kesimpulannya apa?

Jika $x=12m$, $y=6m$, maka Luas terbesar/maks : $72m^2$

Jadi ukuran persegi panjang agar luasnya maksimum adalah panjang 12m, dan lebar 6cm. Jadi ukuran lain, yang panjang pagar 24m, luasnya akan selalu lebih kecil dari $72 m^2$.

Rangkuman Hasil Abstraksi Reflektif Mahasiswa dalam Pemecahan Masalah Pengoptimuman.

Langkah Pemecahan Masalah	Abstraksi Reflektif yang Dominan	Karakteristik dan Aktivitasnya
Memahami Masalah	Pengenalan (recognition)	Membaca soal/masalah. Bagaimana perhatian pada masalah yang dibaca, apakah agak lama, ini menunjukkan bastraksinya. Bagaimana mereorganisasikan struktur masalah yang sedang dihadapinya. Mahasiswa telah memahami soal dengan membaca berulang dan akhirnya memahami soal. Mengingat kembali tentang rumus panjang keliling persegi panjang ($K=y+x+y=x+2y$), mengingat

Representasi (Representatio n)	aturan substitusi dua persamaan, mengingat rumus turunan dari $L(y)= 24y - 2y^2$
	Menyatakan hubungan apa yang diketahui dengan apa yang ditanyakan. Mahasiswa telah mampu menunjukkan sketsa/gambaran bentuk tanah persegipanjang dengan dibatasi salah satu sisi dengan sungai, sehingga salah satu sisi tidak dihitung sebagai panjangnya. Representasi model matematikanya: $K=x+2y$
Abstraksi Struktural (Structural Abstraction)	- Mengembangkan strategi baru untuk suatu masalah, dimana sebelumnya belum digunakan. - Mereorganisasikan struktur masalah matematika berupa menyusun, mengorganisasikan dan mengembangkan. Menyatakan rumus untuk keliling/panjang lapangan tanpa satu sisi. Menyatakan persyaratan ukuran panjang dan lebar bahwa x dan y tidak pernah negatif yaitu Syarat: $x>0$, $y>0$
	Memberikan argumen atau alasan dengan benar terhadap keputusan-keputusan yang dibuat, dan mampu meringkas aktivitasnya dengan benar selama pemecahan masalah dan dihubungkan secara terstruktur. Mahasiswa mampu memahami bahwa jumlah ukuran itu 24m, yaitu $p=12m$, $l=6m$ yang hasilkalinya maksimum yaitu $72m^2$ Pasangan ukuran yang lain selalu nialinya dibawah 72 jika dikalikan/luasnya maksimum.
Kesadaran struktural (structural awareness)	Bagaimana mahasiswa memahami setiap kata dalam masalah, bagaimana membuat rencana, dapatkah menterjemah-kan dan mentransformasikan informasi atau struktur yang ada dalam masalah. Mahasiswa dapat menuliskan $24=x+2y$ dan dapat menyatakan dalam fungsi eksplisit $x=f(y)$ untuk substitusi ke $L(x,y)=xy$.
	Apakah mahasiswa merencanakan dengan benar? Apakah telah merepresentasikan dalam bentuk gambar dan memahami struktur masalahnya. Mahasiswa dapat mensketsa melalui gambar. Dan representasi rumus untuk luas, yaitu: , $L(y) = (24-2y)y = 24y - 2y^2$
Representasi (Representatin)	- Mengembangkan strategi baru untuk suatu masalah, dimana sebelumnya belum digunakan. Menyatakan fungsi eksplisit $y=f(x)$, yaitu $y=(24-x)/2$ dan $L(x,y)=x(24-x)/2=12x-x^2/2$ Sehingga diperoleh nilai x dan y yang sama, cara berbeda. - Mereorganisasikan struktur masalah matematika berupa menyusun, mengorganisasikan dan mengembangkan. Syarat: $x>0$, $y>0$ tidak pernah negatif, dan dimungkinkan adanya dua ukan berbeda ($p=6m$, $l=12m$) dan hasilkalinya sama $72 m^2$.
Merencanakan pemecahan masalah	
Abstraksi Struktural (Structural Abstraction)	

Menyelesaikan masalah sesuai rencana	Pengenalan (recognition)	Apakah dapat menyelesaikan masalah sesuai dengan rencana? Apakah menggunakan alternatif penyelesaian? Apakah dapat mengembangkan strategi lain untuk mendapatkan penyelesaian?			- Mengembangkan strategi baru untuk suatu masalah, dimana sebelumnya belum digunakan. <i>Menyatakan fungsi eksplisit $y=f(x)$, yaitu $y=(24-x)/2$ dan $L(x,y)=x(24-x)/2=12x-x^2/2$</i> <i>Sehingga diperoleh nilai x dan y yang sama, cara berbeda.</i> - Mereorganisasikan struktur masalah matematika berupa menyusun, mengorganisasikan dan mengembangkan. <i>Syarat: $x>0$, $y>0$ tidak pernah negatif, dan dimungkinkan adanya dua ukuran berbeda ($p=6m, l=12m$) dan hasil kalinya sama 72 m².</i>
	Representasi (Representation)	Apakah mahasiswa merencanakan dengan benar? Apakah telah merepresentasikan dalam bentuk gambar dan menyelesaikan masalahnya. <i>representasi rumus untuk luas, yaitu: $L(y) = (24-2y)y = 24y - 2y^2$, syarat luas maksimum adalah $L'(y)=0$ (stasioner) maka diperoleh $24-4y=0$ or $x=6, y=12$</i>	Abstraksi Struktural (Structural Abstraction)		
Memeriksa kembali hasil yang diperoleh	Abstraksi Struktural (Structural Abstraction)	- Mengembangkan strategi baru untuk suatu masalah, dimana sebelumnya belum digunakan. - Mereorganisasikan struktur masalah matematika berupa menyusun, mengorganisasikan dan mengembangkan. <i>Menyatakan rumus untuk keliling/panjang lapangan tanpa satu sisi. Menyatakan persyaratan ukuran panjang dan lebar bahwa x dan y tidak pernah negatif yaitu Syarat: $x>0$, $y>0$, $L(y) = (24-2y)y = 24y - 2y^2$, syarat luas maksimum adalah $L'(y)=0$ (stasioner) maka diperoleh $24-4y=0$ or $x=6, y=12$</i>			
	Kesadaran struktural (structural awareness)	Memberikan argumen atau alasan dengan benar terhadap keputusan-keputusan yang dibuat, dan mampu meringkas aktivitasnya dengan benar selama pemecahan masalah dan dihubungkan secara terstruktur. <i>Nampak bahwa panjang=12m, lebar=6m, luas maksimum 72m², atau $p=6m, l=12m$. Pasangan $(p,l)=\{(20,2), (18,3), (16,4), \dots\}$ jumlah nya 24m, tetapi hasil kalinya dibawah 72.</i>			
Memeriksa kembali hasil yang diperoleh	Pengenalan (recognition)	Apakah mahasiswa dapat mengidentifikasi atau mengingat kembali hasil yang diperoleh? <i>Ukuran panjang: 12m, $l=6m$ atau $p=6m, l=12m$, luas maks. 72m². Menyadari bahwa 72 adalah nilai tertinggi/maksimum untuk semua bilangan positif yang jumlahnya 24m (keliling pagar).</i>			
	Representasi (Representation)	Apakah mahasiswa merencanakan dengan benar? Apakah telah merepresentasikan dalam bentuk gambar dan menyelesaikan masalahnya. <i>representasi rumus untuk luas, yaitu: $L(y) = (24-2y)y = 24y - 2y^2$, syarat luas maksimum adalah $L'(y)=0$ (stasioner) maka diperoleh $24-4y=0$ or $x=6, y=12$ atau bentuk gambar lain: $L(x,y)=xy$, $L(x)=x(24-x)/2=12x-x^2/2$ Agar $L(x)$ maksimum, maka $L'(x)=0$ (syarat maks.) $12-x=0 \Leftrightarrow x=12$ dan $y=6$. Jadi agar luasnya maksimum, haruslah panjang pagar 12m, lebar 6m.</i>	Memahami Masalah		
Memeriksa kembali hasil yang diperoleh			Abstraksi Struktural (Structural Abstraction)		- Merefeksi aktivitas sebelumnya kepada situasi baru. - Mengembangkan strategi baru untuk suatu masalah, dimana sebelumnya belum digunakan. - Mereorganisasikan struktur masalah matematika berupa menyusun, mengorganisasikan dan mengembangkan.
			Kesadaran Struktural (Structural Awareness)		- Memberikan argumen-argumen atau alasan-alasan terhadap keputusan yang dibuat. - Merefleksikan keputusan yang diperoleh untuk aktivitas berikutnya. - Mampu menunjukkan ringkasan aktivitasnya selama pemecahan

PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan kajian pustaka dan hasil analisa data, maka dapat disimpulkan abstraksi mahasiswa Fakultas Teknik Unesa dalam pemecahan masalah matematika pada topik aplikasi turunan pengoptimuman menggunakan langkah-langkah Polya; dan setiap langkah-langkah tersebut dapat ditentukan abstraksi mahasiswa melalui aktivitas-aktivitas level abstraksinya yang dominan/muncul pada setiap langkahnya, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Tabel 3. Hasil Abstraksi Reflektif Mahasiswa dalam Pemecahan Masalah Matematika (Pengoptimuman)

Langkah Pemecahan Masalah	Abstraksi Reflektif yang Dominan	Karakteristik
	Pengenalan (recognition)	- Mengingat kembali aktivitas sebelumnya yang berkaitan dengan masalah yang sedang dihadapi. - Mengidentifikasi aktivitas sebelumnya yang berkaitan dengan masalah yang sedang dihadapi.
	Representasi (Representation)	- Menyatakan hasil pemikiran sebelumnya dalam bentuk simbol matematika, kata-kata, grafik untuk membantu refleksi/rekonstruksi - Menerjemahkan dan mentransformasikan informasi atau struktur ke dalam model matematika. - Menjalankan metode solusi alternatif yang mungkin
	Abstraksi Struktural (Structural Abstraction)	- Merefeksi aktivitas sebelumnya kepada situasi baru. - Mengembangkan strategi baru untuk suatu masalah, dimana sebelumnya belum digunakan. - Mereorganisasikan struktur masalah matematika berupa menyusun, mengorganisasikan dan mengembangkan.
	Kesadaran Struktural (Structural Awareness)	- Memberikan argumen-argumen atau alasan-alasan terhadap keputusan yang dibuat. - Merefleksikan keputusan yang diperoleh untuk aktivitas berikutnya. - Mampu menunjukkan ringkasan aktivitasnya selama pemecahan

Level-level abstraksi pemecahan masalah matematika

	masalah.		alternatif yang mungkin
Merencanakan pemecahan masalah	Pengenalan (<i>recognition</i>)	- Mengingat kembali aktivitas sebelumnya yang berkaitan dengan masalah yang sedang dihadapi. - Mengidentifikasi aktivitas sebelumnya yang berkaitan dengan masalah yang sedang dihadapi.	- Mengembangkan strategi baru untuk suatu masalah, dimana sebelumnya belum digunakan. - Mereorganisasikan struktur masalah matematika berupa menyusun, mengorganisasikan dan mengembangkan. <i>Menyatakan rumus untuk keliling/panjang lapangan tanpa satu sisi. Menyatakan persyaratan ukuran panjang dan lebar bahwa x dan y tidak pernah negatif yaitu Syarat: $x > 0$, $y > 0$,</i>
	Representasi (<i>Representation</i>)	- Menyatakan hasil pemikiran sebelumnya dalam bentuk simbol matematika, kata-kata, grafik untuk membantu refleksi/rekonstruksi - Menerjemahkan dan mentransformasikan informasi atau struktur ke dalam model matematika. - Menjalankan metode solusi alternatif yang mungkin	Memberikan argumen atau alasan dengan benar terhadap keputusan-keputusan yang dibuat, dan mampu meringkas aktivitasnya dengan benar selama pemecahan masalah dan dihubungkan secara terstruktur. <i>Himpunan pasangan: $(p,l) = \{(20,2), (18,3), (16,4), \dots\}$ jumlah hanya 24m, tetapi hasilkalanya dibawah 72. Jadi hanya $p=12$ dan $l=6$ atau sebaliknya yang membuat luasnya maksimum/paling optimal.</i>
	Abstraksi Struktural (<i>Structural Abstraction</i>)	- Merefleksi aktivitas sebelumnya kepada situasi baru. - Mengembangkan strategi baru untuk suatu masalah, dimana sebelumnya belum digunakan. - Mereorganisasikan struktur masalah matematika berupa menyusun, mengorganisasikan dan mengembangkan.	
Menyelesaikan masalah sesuai rencana	Pengenalan (<i>recognition</i>)	- Mengingat kembali aktivitas sebelumnya yang berkaitan dengan masalah yang sedang dihadapi. - Mengidentifikasi aktivitas sebelumnya yang berkaitan dengan masalah yang sedang dihadapi.	
	Representasi (<i>Representation</i>)	- Menyatakan hasil pemikiran sebelumnya dalam bentuk simbol matematika, kata-kata, grafik untuk membantu refleksi/rekonstruksi - Menerjemahkan dan mentransformasikan informasi atau struktur ke dalam model matematika. - Menjalankan metode solusi alternatif yang mungkin	
	Abstraksi Struktural (<i>Structural Abstraction</i>)	- Merefleksi aktivitas sebelumnya kepada situasi baru. - Mengembangkan strategi baru untuk suatu masalah, dimana sebelumnya belum digunakan. - Mereorganisasikan struktur masalah matematika berupa menyusun, mengorganisasikan dan mengembangkan.	
Memeriksa kembali hasil yang diperoleh	Pengenalan (<i>recognition</i>)	- Mengingat kembali aktivitas sebelumnya yang berkaitan dengan masalah yang sedang dihadapi. - Mengidentifikasi aktivitas sebelumnya yang berkaitan dengan masalah yang sedang dihadapi.	
	Representasi (<i>Representation</i>)	- Menyatakan hasil pemikiran sebelumnya dalam bentuk simbol matematika, kata-kata, grafik untuk membantu refleksi/rekonstruksi - Menerjemahkan dan mentransformasikan informasi atau struktur ke dalam model matematika. - Menjalankan metode solusi	

Saran

Hasil level-level abstraksi mahasiswa di Fakultas Teknik Unesa ini dapat diterapkan pada matakuliah lain atau mata pelajaran matematika sendiri untuk jenjang sekolah menengah, dengan harapan agar diperoleh gambaran tentang pemahaman siswa/ mahasiswa melalui abstraksinya untuk meningkatkan kemampuan pemahaman siswa dan peningkatan hasil belajar siswa.

DAFTAR PUSTAKA

- Begle, E. G. 1979. *Critical Variables in Mathematics Education*: Washington DC: NCTM.
- Cifarelli, V. V. 1988. The role of abstraction as a learning process in mathematical problem solving. Doctoral dissertation, Purdue University, Indiana. USA.
- Drayfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. 2001. The construction of abstract knowledge in inter-action. *Cognitive Science Quarterly*, 1. 307-368.
- Ferrari, P.L. 2003. Abstraction in Mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society*. London. 358, 1225-1230.
- Goodson-Espy, T. 1998. The roles of reification and reflective abstraction in the development of abstract thought: Transitions from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 36, 219-245.
- Goodson-Espy, T. 2005. Why Reflective Abstraction Remains Relevant in Mathematics Education Research. In Lioyd, G.M., Wilson, M., Wilkins, J.L. M, & Behm, S.L. (Eds). *Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Appalachian State University.

- Gray, E. & Tall, D. 2007. Abstraction as a Natural Process of Mental Compression. *Mathematicx Education Research Journal*. Vol. 19, No.2, 23-40.
- Hershkowitz,R., Schwarz, B., & Dreyfus, T. 2001. Abstraction in Context. *Journal for Research in Mathematics Education*. Volume 32, Number 2, 2001, 195 – 222.
- Jirotkova, D, Littler, G.H., Classification Leading to Structure,<http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/3/JirotkovaLittler.pdf>. Diakses 24 Juli 2014.
- Johnson & Rising. 1972. *Guidelines for Teaching Mathematics*. California: Wadsworth publishing Company, Inc.
- Liu, Y. & Ginter, D. 1999. Cognitive Styles and Distance Education. *Journal of Distance Learning Administration*, Vo. 2 No. 3. State University of West Georgia.
- Mitchelmore, M & White P. 2004. Development of angle concepts by progressive abstraction and generalization. *Educational Studies in Mathematics*, 41(3), 209-238.
- Mitchelmore,M. C., White, P. 2007. Abstraction in Mathematics Learning. *Journal for Research in Mathematics Education*., Vol. 19, No. 2, 1-9
- Petty, James Alan. 1996. The role of reflective abstraction in the conceptualization of infinity and invinite process. *Doctoral Dissertation*, Purdue Univercity, Indiana.
- Polya, G. 1973. *How To solve It*. Secon Edition. New Jersey: Princeton Univercity Press.
- Rodney, L. C., Brigitte G. V., Barry N. B. 2001. An Assesment Model for a Design Approach to Technoligical Problem Solving. *Journal Technology an Education*. Vol. 12, No. 2.
- Soedjadi, R. 2000. *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia*. Konstatasi Keadaan Masa Kini Menuju Harapan Masa Depan. Jakarta. Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Departemen Pendidikan Nasional.
- Suparno, Paul. 2001. *Teori Perkembangan Kognitif Jean Piaget*. Yogyakarta. Kanisius.
- Wood, T., Williams, G. dan MsNael, B. 2006. Children's Mathematical Thinking Different Classroom Cultures. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vo. 37, No. 3, 222-255.