

RANCANG BANGUN STABILISASI SISTEM PENDULUM TERBALIK BERBASIS PENGENDALI PID

Rafi Sidqi

S1 Teknik Elektro, Fakultas Teknik, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : rafisidqi@mhs.unesa.ac.id

Bambang Suprianto

Teknik Elektro, Fakultas Teknik, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : bambangsuprianto@unesa.ac.id

Abstrak

Pendulum terbalik adalah sistem dinamis, nonlinear, dan sangat tidak stabil yang mensimulasikan permasalahan kestabilan dalam bidang pengaturan. Sistem ini memiliki satu input yaitu gaya dan dua output yaitu sudut pendulum dan posisi kereta sehingga proses pengendaliannya menjadi rumit. Tujuan dari penelitian ini merancang dan mengimplementasikan pengendali PID untuk stabilisasi rancang bangun sistem pendulum terbalik. Perancangan dilakukan dengan berdasar pada model dinamik sistem yang telah divalidasi untuk memastikan kesesuaian dinamika. Skema pengendali yang digunakan adalah *two-loop parallel PID Controllers* dengan metode penalaan *Linear Quadratic Regulator* (LQR). Model dinamik sistem memberikan nilai RMSE untuk masing-masing output $\theta(t)$ dan $x(t)$ berturut-turut sama dengan 0.043 dan 0.016, sehingga model dianggap mampu merepresentasikan dinamika sistem pendulum terbalik. Pada perancangan pengendali diperoleh nilai konstanta-konstanta PID yaitu $Kp_x = -25.05$, $Ki_x = 2.89$, $Kd_x = -4 \cdot 10^{-7}$, $Kp_\theta = 115.5$, $Ki_\theta = 7161.86$, $Kd_\theta = 3 \cdot 10^{-6}$. Implementasi pengendali pada sistem fisik diketahui bahwa pengendali PID yang dirancang memiliki kemampuan menstabilkan sistem dan ketahanan terhadap gangguan yang baik, dengan nilai RMSE pada masing-masing posisi kereta dan sudut pendulum berturut-turut sama dengan $2.26 \cdot 10^{-2}$ m, dan $1.31 \cdot 10^{-2}$ radian, serta deviasi maksimum pada uji gangguan sama dengan 0.1 m dan 0.102 radian.

Kata Kunci: Pendulum terbalik, pengendali PID, penalaan LQR, stabilisasi sistem

Abstract

Inverted pendulum is a dynamic, nonlinear, and very unstable system which simulates the problems of stability in control theory. This system has one input which is the force and the two outputs which are the pendulum angle and the cart position so that the control process becomes rather complicated. Aims of this research is to design and to implement PID controller for stabilization of the inverted pendulum system. The design is done based on the dynamical model of the system which has been validated to ensure the suitability of the dynamics. The controller scheme used is two-loop parallel PID Controller with Linear Quadratic Regulator (LQR) tuning method. The system dynamic model gives the RMSE values for each output $\theta(t)$ and $x(t)$ are 0.043 and 0.016, respectively, so the model is considered capable of representing the dynamics of the inverted pendulum system. On the controllers design, PID constants obtained are $Kp_x = -25.05$, $Ki_x = 2.89$, $Kd_x = -4 \cdot 10^{-7}$, $Kp_\theta = 115.5$, $Ki_\theta = 7161.86$, $Kd_\theta = 3 \cdot 10^{-6}$. Implementation of the designed controllers on the physical systems is known that PID controllers have a good performance in both system stabilization and disturbance rejection, with RMSE values for each cart position and pendulum angle respectively equal to $2.26 \cdot 10^{-2}$ m, and $1.31 \cdot 10^{-2}$ radians. The maximum deviation at the disturbance test are equal 0.1 m and 0.102 radians.

Keywords: Inverted pendulum, PID Controllers, LQR Tuning, System stabilization

PENDAHULUAN

Pendulum terbalik merupakan salah satu sistem yang dinamis, nonlinier, dan sangat tidak stabil yang mensimulasikan sebuah mekanisme pengendalian untuk mengatur permasalahan kestabilan (Roshdy *dkk*, 2012). sehingga pengaturannya menjadi rumit apabila menggunakan sistem kontrol yang konvensional.

Pada bidang robotika sistem kestabilan dikembangkan dengan pendulum terbalik (Kafetzis, 2017). Selain itu, aplikasi di bidang transportasi adalah

mesin yang perlu menyeimbangkan obyek, dan pada sistem yang memberikan bantuan berjalan pada pasien (Hehn, 2011). Bahkan konstruksi skala besar seperti bangunan dimodelkan sebagai pendulum terbalik (Anh *dkk*, 2007).

Pengendalian terhadap sistem pendulum terbalik merupakan salah satu permasalahan fundamental dalam penelitian bidang teknik kendali (Boubaker, 2013). Contoh penelitian di bidang ini adalah penerapan metode

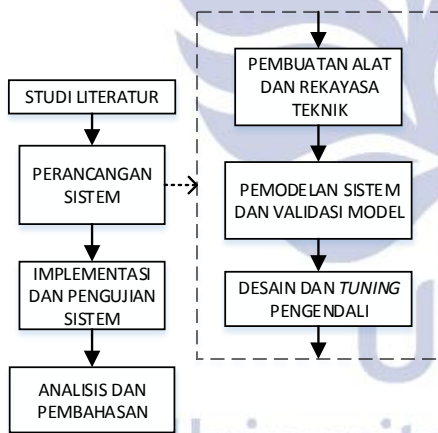
pole-placement untuk stabilisasi sistem pendulum terbalik (Hensen, 2000).

Metode lain yang digunakan untuk stabilisasi sistem pendulum terbalik adalah dengan pendekatan nonlinear (Christensen, 2017) Selain itu, untuk stabilisasi sistem pendulum terbalik metode pengendalian logika *fuzzy* juga digunakan (Sunthar, 2005). Studi simulasi sistem pendulum terbalik menunjukkan bahwa untuk dapat mengendalikan kedua keluaran dari sistem pendulum terbalik diperlukan minimal dua kontroler PID yang bekerja secara paralel atau bertingkat (Jia-Jun, 2011).

Tujuan dari penelitian ini adalah merancang dan mengimplementasikan pengendali proporsional-integral-derivatif (PID) untuk stabilisasi pada rancang bangun sistem pendulum terbalik. Perancangan pengendali menggunakan skema *two-loop parallel PID Controllers* dengan metode penalaan *Linear Quadratic Regulator* (LQR).

METODE

Penelitian ini menggunakan pendekatan eksperimen yang merupakan penelitian kuantitatif. Sebab penelitian ini berdasar pada data-data numerik dan analisis terhadap data tersebut menggunakan metode statistik. Data pada penelitian ini didapatkan dari hasil pengukuran dan perhitungan.



Gambar 1. Diagram rancangan penelitian. (Sumber: data primer, 2018)

Diagram alur rancangan penelitian ini terdapat pada Gambar 3. Penelitian akan dilakukan dengan studi literatur, dengan menggunakan teori-teori yang telah didapatkan penelitian akan dilanjutkan ke prosedur perancangan dan rekayasa teknik.

Pengendali PID

Pengendali PID terdiri dari jumlah tiga aksi pengendalian, yaitu aksi proporsional, aksi integral dan aksi derivatif (Åström, 2009). Persamaan output dari pengendali PID adalah,

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{d e(t)}{dt} \right) \quad (1)$$

dengan,

$e(t)$: Sinyal galat (*derajat, m*)

$u(t)$: Sinyal output (*V*)

T_i : Waktu integral (*s, menit*)

T_d : Waktu derivatif (*s, menit*)

K_p : Konstanta proporsional

Persamaan pengendali PID juga biasanya dinyatakan dalam bentuk paralel memiliki persamaan,

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{d e(t)}{dt} \quad (2)$$

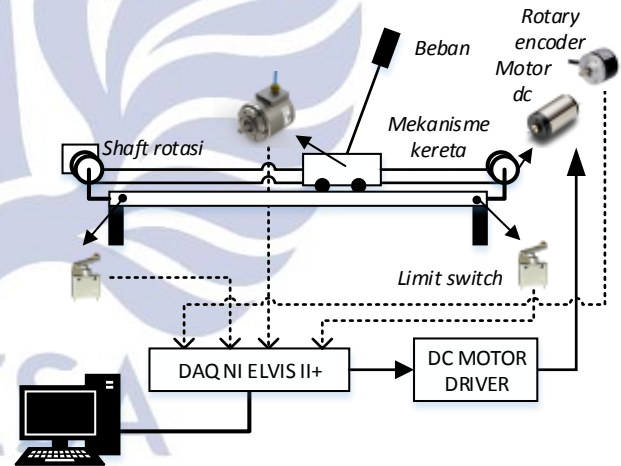
dengan,

$$K_i = \frac{K_p}{T_i}, \quad K_d = K_p T_d$$

di mana K_i adalah konstanta integral, dan K_d adalah konstanta derivatif.

Perancangan Sistem

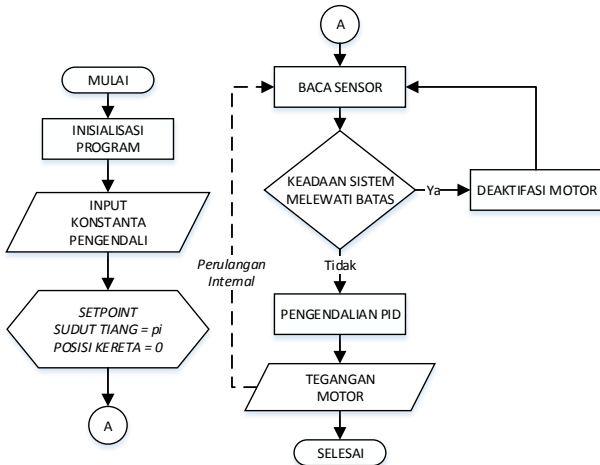
Perancangan sistem terdiri dari dua bagian awal, yaitu perancangan perangkat keras dan perancangan perangkat lunak. Rancangan perangkat keras sistem stabilisasi pendulum terbalik di tunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Diagram arsitektur rancangan sistem (Sumber: data primer, 2018)

Perancangan perangkat keras merupakan proses desain bagian-bagian penyusun dan desain mekanik sistem pendulum terbalik.

Sistem perangkat keras menggunakan komponen penyusun dasar meliputi DAQ NI Elvis II+, pendulum terbalik, *motor driver*, PC/Laptop, dan *rotary encoder*. Sedangkan sistem perangkat lunak direpresentasikan oleh LabVIEW pada PC/Laptop, di mana perancangannya mengacu pada diagram alur yang ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Diagram alur program LabVIEW (Sumber: data primer, 2018)

Berdasarkan diagram alur tersebut, algoritma kerja perangkat lunak yang akan digunakan adalah pada saat pertama kali diaktifkan perangkat lunak akan melakukan inisialisasi program yaitu berkaitan dengan proses internal LabVIEW dan NI ELVIS II+.

Selanjutnya pengguna akan memasukkan nilai konstanta pengendali yang akan digunakan. Kemudian, program akan mendeklarasi variabel *set point*. Di mana *set point* π radian pada sudut tiang didefinisikan sebagai sudut tepat vertikal ke atas, sedangkan *set point* pada posisi kereta didefinisikan sebagai posisi tepat di tengah jalur rel yang ada. Apabila keadaan sistem melewati batas yaitu sudut pendulum tidak berada dalam rentang yang ditentukan atau posisi kereta berada pada ujung dari jalur rel yang ada, maka motor akan di-de-aktifasi atau dimatikan. Sedangkan jika sistem berada pada rentang yang ditentukan maka proses pengendalian akan dilakukan. Pengendali PID akan membandingkan keadaan sistem aktual (variabel proses) dengan nilai referensi atau *set point* yang ditentukan sebelumnya. Selanjutnya, pengendali PID melakukan koreksi berdasarkan hasil perbandingan tersebut, kemudian keluarannya digunakan untuk mengubah tegangan masukan motor dc.

Pemodelan dan Validasi Model

Model adalah representasi matematis dari suatu sistem fisik, biologis, atau informasi (Astrom, 2009). Pemodelan bertujuan untuk mendapatkan representasi matematis yang mewakili dinamika sistem sebenarnya. Pemodelan sistem pendulum terbalik menggunakan pada penelitian ini menggunakan metode teoritis. Yakni berlandaskan pada hukum-hukum fisika sebagai dasar pemodelan untuk menghasilkan persamaan matematis yang mewakili dinamika sistem.

Validasi model dilakukan untuk memastikan model yang didapatkan pada prosedur sebelumnya benar-benar mewakili sistem pendulum terbalik. Metode validasi

yang digunakan adalah dengan membandingkan simulasi respon sistem dengan respon sistem yang sebenarnya.

Tingkat validitas model dinyatakan dengan menggunakan nilai *root mean squared error* (RMSE) antara respon sistem simulasi dan respon sistem sebenarnya. Sebab, RMSE merupakan salah satu standar metode statistik untuk mengukur performa sebuah model (Chai, 2014).

Root mean squared error ditunjukkan pada persamaan berikut.

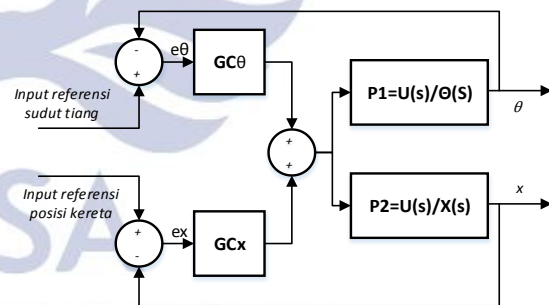
$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^N (\hat{y}(t) - y(t))^2}{N}} \quad (3)$$

dengan, $\hat{y}(t)$ sama dengan keluaran sistem aktual, $y(t)$ keluaran sistem simulasi, dan N adalah jumlah data.

Desain dan Tuning Pengendali

Skema pengendali yang digunakan adalah *two-loop paralel PID Controller*, di mana terdapat dua pengendali PID yang dihubungkan secara paralel. Sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 4.

Keluaran tiap pengendali PID kemudian dijumlahkan, di mana hasil penjumlahan tersebut merupakan nilai tegangan masukan motor dc penggerak kereta dengan melalui perangkat NI ELVIS. Pembacaan *rotary encoder* diakuisisi oleh NI ELVIS sebelum memasuki sistem pengendalian pada LabVIEW/Laptop. Masing-masing hasil pembacaan tersebut kemudian dibandingkan dengan nilai referensinya.



Gambar 4. Diagram blok pengendali PID sistem (Sumber: data primer, 2018)

Skema *two-loop paralel PID Controller* digunakan sebab memiliki performansi dinamik dan akurasi yang lebih baik apabila dibandingkan dengan *cascade PID Controller* atau *two-loop series PID Controller* (Jia-Jun, 2015).

Metode *Linear Quadratic Regulator* (LQR) digunakan untuk penalaan konstanta PID sebab dapat memudahkan perancangan pengendali (Pati, 2014). Pengendali PID posisi kereta dinyatakan dalam persamaan berikut.

$$G_{Cx}(t) = Kp_x e_x(t) + Ki_x \int_0^t e_x(t) dt + Kd_x \frac{d e_x(t)}{dt} \quad (4)$$

dan untuk pengendali PID sudut pendulum,

$$G_{C\theta}(t) = Kp_\theta e_\theta(t) + Ki_\theta \int_0^t e_\theta(t) dt + Kd_\theta \frac{d e_\theta(t)}{dt} \quad (5)$$

dengan,

- Kp_x : Konstanta proporsional pengendali kereta
- Ki_x : Konstanta integral pengendali kereta
- Kd_x : Konstanta derivatif pengendali kereta
- Kp_θ : Konstanta proporsional pendulum
- Ki_θ : Konstanta integral pengendali pendulum
- Kd_θ : Konstanta derivatif pengendali pendulum

di mana $e_x(t)$ dan $e_\theta(t)$ berturut-turut adalah galat pada posisi kereta dan galat pada sudut pendulum. Dengan galat didefinisikan sebagai,

$$e_x(t) = x_{ref} - x \quad (6)$$

dan

$$e_\theta(t) = \theta_{ref} - \theta \quad (7)$$

dengan x_{ref} dan θ_{ref} adalah nilai referensi atau *set point* posisi kereta dan sudut pendulum. Sedangkan x , dan θ berturut-turut adalah posisi kereta dan sudut pendulum. Persamaan karakteristik dari sistem linear dengan pengendali PID adalah sebagai berikut.

$$1 + G_{C\theta}P_1 + G_{Cx}P_2 = 0 \quad (8)$$

dengan $G_{C\theta}$ dan G_{Cx} berturut-turut adalah pengendali sudut pendulum dan posisi tiang, dan P_1 dan P_2 adalah fungsi transfer sistem untuk masing-masing sudut tiang dan posisi kereta.

Sebab dinamika sudut tiang dan dinamika posisi kereta saling berkaitan satu sama lain perubahan salah satu parameter pengendali akan mempengaruhi kedua keluaran sistem (Prasad *dkk*, 2012).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Sistem

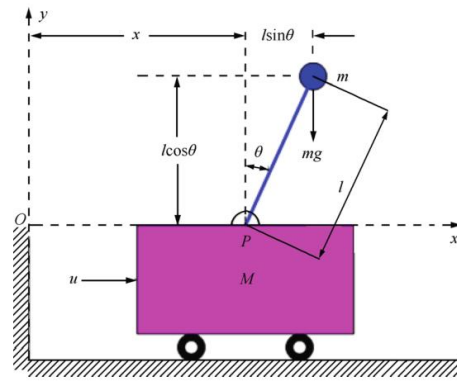
Parameter-parameter sistem yang digunakan pada model ditunjukkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Parameter-parameter sistem

Parameter	Nilai	Satuan
Massa kereta	0.55	kg
Massa pendulum	0.25	kg
Panjang tiang	0.30	m

Persamaan Gerak Sistem Pendulum Terbalik

Berikut ini mengacu pada Prasad *dkk* (2012:2) dan Christensen (2017:25).



Gambar 4. Diagram *free-body* pendulum terbalik. (Sumber: Prasad, 2012)

Kesetimbangan gaya pada sistem pada arah x dapat ditulis sebagai,

$$m_c \ddot{x} + m_p \ddot{x}_G = u \quad (9)$$

di mana pusat gravitasi dari titik massa atau. Lokasi dari pusat gravitasi dari beban pendulum adalah

$$x_G = x + l \sin \theta, \quad y_G = l \cos \theta \quad (10)$$

dengan l adalah panjang tiang pendulum. Substitusi (10) ke (9) di dapatkan:

$$m_c \ddot{x} + m_p \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) \quad (11)$$

Penyelesaian terhadap persamaan (11) menghasilkan,

$$(m_c + m_p) \ddot{x} - m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta + m_p l \ddot{\theta} \cos \theta = u \quad (12)$$

Diketahui persamaan umum torsi terhadap partikel berjarak l dari pusat rotasi dan gaya F adalah

$$T = Fl \quad (13)$$

Komponen-komponen torsi yang bekerja pada pusat massa pendulum adalah,

$$T_x = F_x \cos \theta l, \quad T_y = F_y \sin \theta l \quad (14)$$

Sehingga resultan kesetimbangan torsi pada pusat massa pendulum,

$$F_x \cos \theta l - F_y \sin \theta l = m_p g \sin \theta l \quad (15)$$

di mana $F_x = m_p \ddot{x}_G$, dan $F_y = m_p \ddot{y}_G$ berturut-turut adalah komponen-komponen gaya pada arah x dan arah y , dengan:

$$\ddot{x}_G = m_p [\ddot{x} - l \dot{\theta}^2 \sin \theta + l \ddot{\theta} \cos \theta] \quad (16)$$

dan

$$\ddot{y}_G = -m_p [l \dot{\theta}^2 \cos \theta + l \ddot{\theta} \sin \theta] \quad (17)$$

Substitusi persamaan (16) dan (17) ke persamaan (15) menghasilkan,

$$m_p \ddot{x} \cos \theta + m_p l \ddot{\theta} - m_p g \sin \theta = 0 \quad (18)$$

Persamaan (12) dan (18) merupakan persamaan yang mendefinisikan gerak dinamik dari sistem pendulum terbalik. Dalam bentuk matriks persamaan-persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u + m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta - m_p g \cos \theta \sin \theta}{m_c + m_p - m \cos^2 \theta} \\ \frac{u \cos \theta - (m_c + m_p) g \sin \theta + m_p l \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta}{-m_p l \cos^2 \theta + (m_c + m_p) l} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Keterangan:

- x : Posisi linear kereta (m)
- \dot{x} : Kecepatan linear kereta (ms^{-1})
- \ddot{x} : Percepatan linear kereta (ms^{-2})
- θ : Posisi angular pendulum (rad)
- $\dot{\theta}$: Kecepatan angular pendulum ($rad s^{-1}$)
- $\ddot{\theta}$: Percepatan angular pendulum ($rad s^{-2}$)
- l : Panjang tiang pendulum (m)
- g : Percepatan gravitasi ($9.8 ms^{-2}$)
- u : Input sistem (N)
- m_c : Massa kereta (kg)
- m_p : Massa beban pendulum (kg)
- x_G : Koordinat pusat massa beban pada x (m)
- y_G : Koordinat pusat massa beban pada y (m)

Model Nonlinear Sistem

Persamaan gerakan dinamik yang ditunjukkan pada persamaan (17) dapat diubah ke dalam bentuk sistem ruang keadaan dengan alasan kemudahan. Bentuk standar persamaan ruang keadaan nonlinear yaitu:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (20)$$

Dengan x adalah vektor keadaan sistem yang didefinisikan sebagai $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T$, representasi ruang keadaan sistem menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (21)$$

di mana:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_2, \quad f_3 = x_4 \\ f_2 &= \frac{u + m_p l x_4^2 \sin x_3 - m_p g \cos x_3 \sin x_3}{m_c + m_p - m_p \cos^2 x_3} \\ f_4 &= \frac{u \cos x_3 - (m_c + m_p) g \sin x_3 + m_p l x_4^2 \cos x_3 \sin x_3}{-m_p l \cos^2 x_3 + (m_c + m_p) l} \end{aligned} \quad (22)$$

Variabel yang akan dikendalikan pada sistem adalah sudut pendulum θ dan posisi kereta x , maka persamaan output dituliskan sebagai:

$$y = Cx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Persamaan (22) dan (23) merupakan representasi nonlinear dalam bentuk ruang keadaan dari dinamika sistem pendulum terbalik.

Model Linear Sistem

Berikut ini mengacu pada White (1997:1).

Sebab tujuan utama dari sistem ini adalah untuk menjaga pendulum terbalik stabil pada posisi kesetimbangannya atau $\theta = 0$, linearisasi dapat dipertimbangkan pada titik kesetimbangan tersebut.

Model linear sistem di sekitar titik kesetimbangan didapatkan dengan linearisasi sistem nonlinear pada persamaan (22) bentuk linear dari sistem menjadi:

$$\frac{d}{dt} \delta x = J_x(x_0, u_0) \delta x + J_u(x_0, u_0) \delta u \quad (24)$$

di mana keadaan referensi (*reference state*) sistem didefinisikan pendulum seimbang ke atas tanpa gaya input. Di dalam kondisi tersebut, $x_0 = 0$, dan $u_0 = 0$.

Komponen matrik Jacobian ditentukan bagian demi bagian secara sistematis. Elemen kolom pertama, kedua, ketiga dan keempat dari matrik Jacobian $J_x(x_0, u_0)$ berturut-turut adalah:

$$\left. \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0}, \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \right|_{x_0, u_0}, \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_3} \right|_{x_0, u_0}, \text{ dan } \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_4} \right|_{x_0, u_0}$$

Sehingga didapatkan,

$$J_x(x_0, u_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_p g}{m_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(m_c + m_p) g}{m_c l} & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Derivatif parsial dari sistem nonlinear terhadap input u , adalah:

$$J_u(x_0, u_0) = \left[\frac{\partial f_1}{\partial u} \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} \quad \frac{\partial f_3}{\partial u} \quad \frac{\partial f_4}{\partial u} \right]_{x_0, u_0}^T \quad (26)$$

dengan menyelesaikan persamaan (26), didapatkan:

$$J_u(x_0, u_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_c} \\ 0 \\ \frac{1}{m_c l} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Substitusi persamaan (25), dan (27) ke persamaan (24) didapatkan

$$\frac{d}{dt} \delta x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_p g}{m_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(m_c + m_p)g}{m_c l} & 0 \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ m_c l \end{bmatrix} \delta u \quad (28)$$

Persamaan (28) merupakan model *open-loop* linear dari sistem pendulum terbalik yang dapat ditulis persamaan umumnya sebagai

$$\frac{d}{dt} \delta x = A \delta x + B \delta u \quad (29)$$

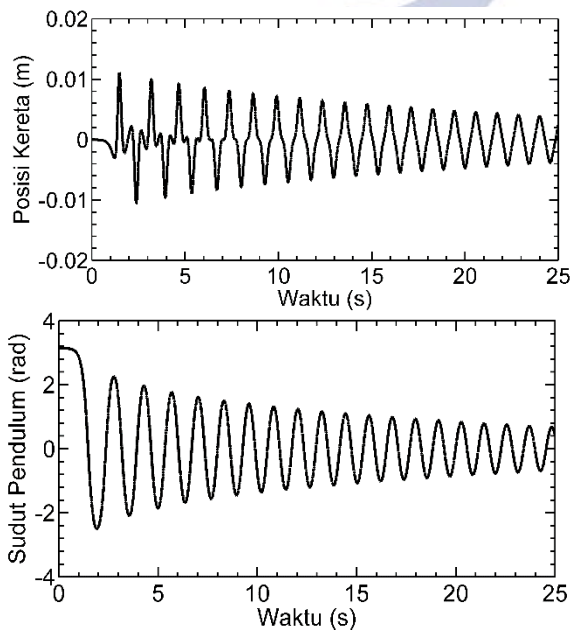
Persamaan (28) dan persamaan output (23) merepresentasikan model linear dari sistem pendulum terbalik. Model yang disederhanakan tersebut akan digunakan untuk penalaan konstanta pengendali PID.

Simulasi Model Sistem

Simulasi dilakukan berdasarkan model sistem yang didapatkan pada bagian sebelumnya dengan menggunakan parameter-parameter sistem terdapat pada Tabel 1. Skenario simulasi yang dilakukan adalah dengan pemberian kondisi inisial dan pemberian nilai input.

Kondisi Inisial

Sistem disimulasikan dengan kondisi inisial $x(t) = [0 \ 0 \ \pi \ 0]^T$ dengan definisi π adalah sudut tepat pada titik kesetimbangan atas. Respon simulasi model sistem dengan skenario pemberian kondisi inisial ditunjukkan pada Gambar 5.



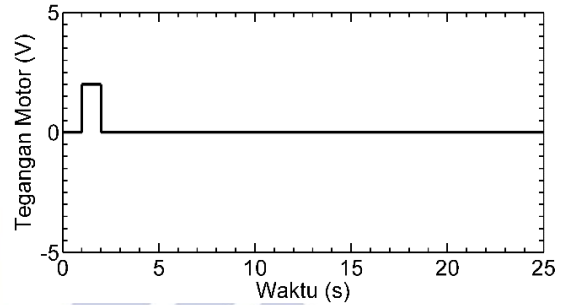
Gambar 5. Respon simulasi model sistem dengan kondisi inisial. (Sumber: data primer, 2018)

Masukan Unit Pulsa

Sistem disimulasikan dengan masukan unit pulsa pada persamaan (30) dan kondisi inisial sistem stabil pada titik kesetimbangannya atau $x(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ dan merupakan simulasi *open-loop*.

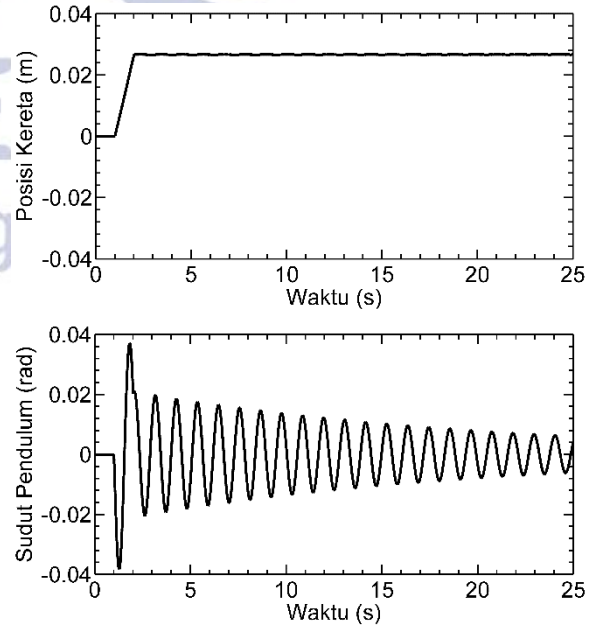
$$u(t) = \begin{cases} 2, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases} \quad (30)$$

Unit pulsa yang diberikan ke dalam sistem adalah tegangan motor sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 6.



Gambar 6. Sinyal masukan pada simulasi model. (Sumber: data primer, 2018)

Sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 7. Pada inisial simulasi, sistem dalam keadaan tidak bergerak dengan pendulum diam di kondisi kesetimbangan bawah. Pemberian input aktuasi berupa sinyal unit pulsa tersebut, menyebabkan posisi kereta bergeser sebesar 0.026 m atau 2.6 cm dari keadaan awal, dan terjadi osilasi teredam pada tiang pendulum. Pendulum yang terpengaruh oleh gerakan kereta menghasilkan deviasi absolut maksimum 0.038 radian dengan arah deviasi awal yang berlawanan dengan arah gerak kereta.



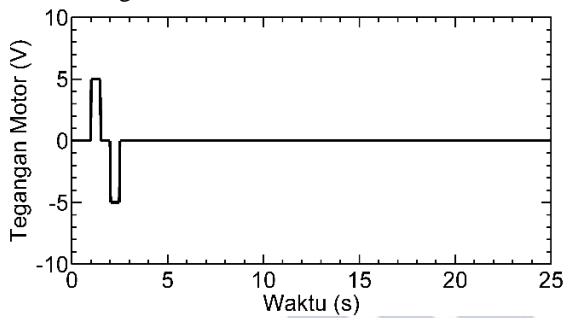
Gambar 7. Respon simulasi model sistem dengan masukan unit pulsa. (Sumber: data primer, 2018)

Validitas Model

Sistem fisik dan model sistem diberi sinyal input yang sama yaitu unit pulsa pada persamaan (31),

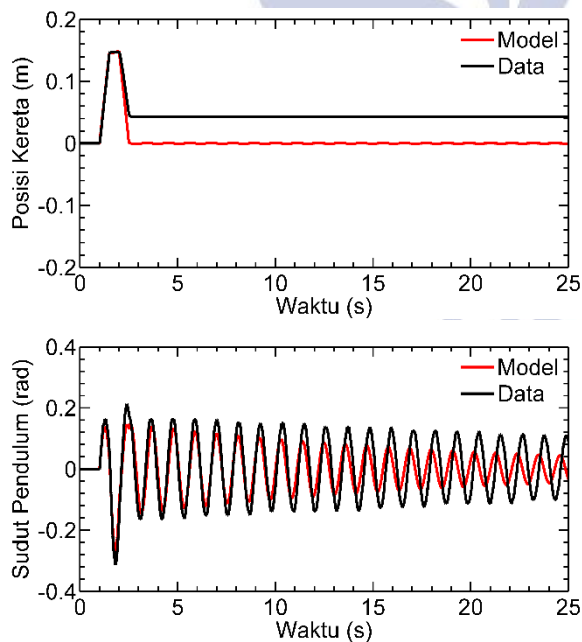
$$u(t) = \begin{cases} 5, & 1 \leq t \leq 1.5 \\ -5, & 2 \leq t \leq 2.5 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases} \quad (31)$$

atau sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 8. Sinyal input diberikan dengan kondisi inisial sistem tidak bergerak dan pendulum menggantung pada posisi kesetimbangan bawah.



Gambar 8. Sinyal masukan sistem pada validasi model. (Sumber: data primer, 2018)

Gambar 9 menunjukkan perbandingan respon sistem fisik (data respon) dengan simulasi model.



Gambar 9. Perbandingan data respon sistem fisik dan simulasi model. (Sumber: data primer, 2018)

Secara umum model yang didapatkan menghasilkan respon yang menyerupai sistem fisik, kecuali pada posisi kereta yang terdapat sedikit deviasi saat sinyal masukan bernilai negatif. Selain itu, pada output sudut pendulum,

respon model sistem nampak memiliki rasio redaman yang lebih dibandingkan dengan sistem fisik.

Hasil analisis terhadap selisih respon sistem fisik dan simulasi model atau $\hat{y}(t) - y(t)$ ditampilkan pada Tabel 2. Nilai RMSE yang didapatkan pada masing-masing output sistem berturut-turut adalah 0.043 dan 0.016 atau 4.38% dan 1.60%. Dengan demikian, model yang digunakan dianggap mampu merepresentasikan sistem sebenarnya.

Tabel 2. Hasil analisis validitas model

Output Sistem	Rerata Error	Rerata Error	RMSE
	Relatif	Absolut	
	$\frac{(\hat{y}(t) - y(t))}{y(t)}$	$(\hat{y}(t) - y(t))$	
θ	-0.00088	0.036	0.043
x	-0.012	0.012	0.016

Desain dan Tuning Pengendali

Dengan mengingat fungsi transfer untuk masing-masing pengendali PID sebagaimana pada persamaan (4) dan (5), serta dengan diketahuinya model linear sistem pendulum terbalik sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 47.56 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.81 \\ 0 \\ 6.06 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Didapatkan fungsi transfer,

$$\frac{X(s)}{U(s)} \approx \frac{1.8182}{s^2} \text{ atau } P_1 = \frac{a_1}{s^2} \quad (33)$$

dan

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} \approx \frac{6.06}{s^2 - 47.56} \text{ atau } P_2 = \frac{a_2}{s^2 - b^2} \quad (34)$$

Dengan mengingat persamaan (8) dan substitusi terhadap persamaan (33) dan (34) didapatkan:

$$s^5 + s^4(a_2Kd_\theta + a_1Kd_x) + s^3(a_2Kp_\theta + a_1Kp_x - b^2) + s^2(a_2Ki_\theta + a_1Ki_x + a_1Kd_xb^2) - sa_1Kp_xb^2 - a_1Ki_xb^2 = 0 \quad (35)$$

Persamaan (35) dapat dituliskan dalam bentuk:

$$s^5 + p_1s^4 + p_2s^3 + p_3s^2 - p_4s - p_5 = 0 \quad (36)$$

dengan membandingkan (35) dan (36) didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 \\ a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_1 b^2 & 0 & a_2 & 0 \\ -a_1 b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Kp_x \\ Ki_x \\ Kd_x \\ Kp_\theta \\ Ki_\theta \\ Kd_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 + b^2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Sebab output yang diukur pada sistem hanya posisi kereta (x) dan sudut pendulum (θ), maka elemen-elemen matrik Q yang berhubungan dengan kecepatan kereta (\dot{x}) dan kecepatan sudut pendulum ($\dot{\theta}$) adalah sama dengan nol. Dengan demikian dipilih matriks Q dan R berikut.

$$Q = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = 0.10 \quad (38)$$

Dengan menggunakan VI LabVIEW *State Feedback Control Linear Quadratic Regulator* didapatkan nilai eigen loop tertutup sistem:

$$\begin{aligned} p_1 &= -22.52 + 21.46i, & p_2 &= -22.52 - 21.46i \\ p_3 &= -2.170 + 1.900i, & p_4 &= -2.170 - 1.900i \end{aligned} \quad (39)$$

Berdasarkan persamaan (38) diketahui bahwa sistem dengan pengendali memiliki lima *pole*. Pole ke-lima dipilih secara acak pada sebelah kiri bidang s atau $s < 0$, yaitu -25.0 dan Kd_x diasumsikan sama dengan -5.0 . Sehingga, dengan menyelesaikan persamaan (36) didapatkan konstanta pengendali PID berturut-turut adalah $Kp_x = -25.05, Ki_x = -2.89, Kd_x = -5.00, Kp_\theta = 115.5, Ki_\theta = 7161.86, Kd_\theta = 2.22$.

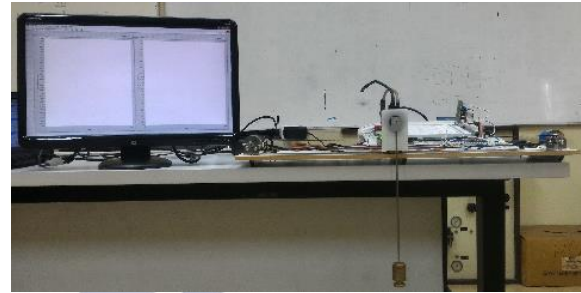
Penggunaan nilai Kd_x pada perancangan tersebut menyebabkan sistem berperilaku terlalu agresif dan tidak stabil. Oleh karena itu, dipilih konstanta derivatif baru yaitu $Kd_x = -4 \cdot 10^{-7}$ dan $Kd_\theta = 3 \cdot 10^{-6}$ yang didapatkan dengan beberapa percobaan (*trial and error*). Konstanta-konstanta pengendali PID yang digunakan ditunjukkan pada Tabel 3.

Tabel 3. Konstanta-konstanta pengendali

Parameter	Nilai
Kp_x	-25.05
Ki_x	-2.89
Kd_x	$-4 \cdot 10^{-7}$
Kp_θ	115.5
Ki_θ	7161.86
Kd_θ	$3 \cdot 10^{-6}$

Implementasi dan Pengujian

Pengendali PID yang telah dirancang di bagian sebelumnya diimplementasikan pada sistem fisik. Sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 11, unit komputasi pengendali menggunakan laptop dan perangkat lunak LabVIEW 2017. Di mana antarmuka antara perangkat lunak dan sistem sebenarnya adalah perangkat NI ELVIS II+.



Gambar 11. Sistem fisik pendulum terbalik (Sumber: dokumentasi pribadi, 2018)

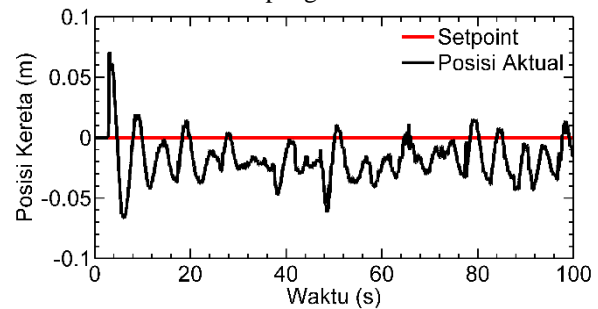
Bagian-bagian diagram blok VI LabVIEW dan antarmuka pengguna berbasis grafik (GUI) yang digunakan untuk pengendalian sistem ditunjukkan berturut-turut pada Gambar 12 dan Gambar 13.

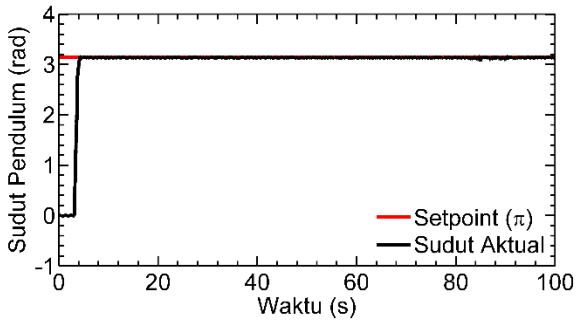


Gambar 12. GUI LabVIEW (Sumber: data primer, 2018)

Uji Kestabilan

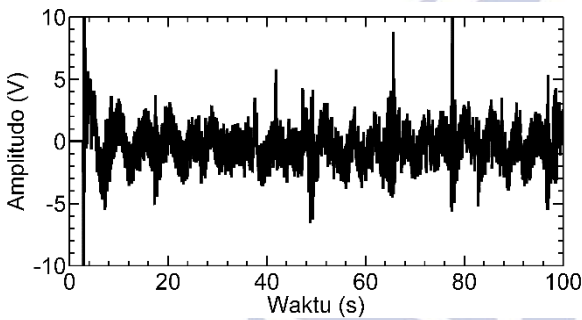
Gambar 13 merupakan respon sistem pendulum terbalik dengan pengendali pada masing-masing output sistem. Untuk dapat melakukan pengujian pendulum digerakkan ke posisi kesetimbangan atas yaitu π radian secara manual sebelum pengendali diaktifkan.





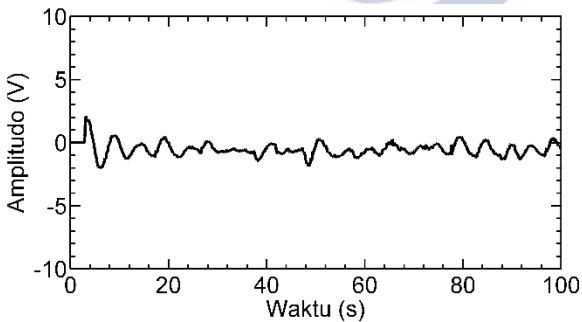
Gambar 13. Respon sistem dengan pengendali (Sumber: data primer, 2018)

Output pengendali sudut pendulum ($G_{C\theta}$) sebagaimana pada Gambar 14, menunjukkan respon pengendalian yang agresif untuk dapat mempertahankan keadaan sistem.



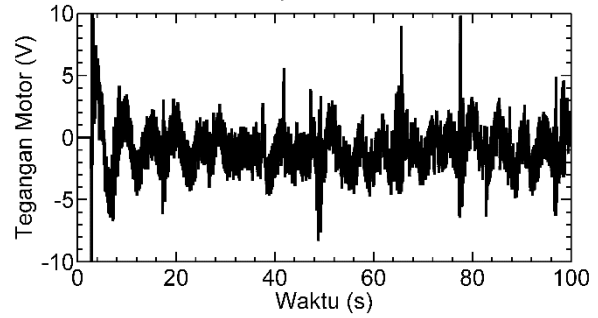
Gambar 14. Output pengendali sudut pendulum ($G_{C\theta}$) (Sumber: data primer, 2018)

Sedangkan output pengendali posisi kereta (G_{Cx}) yang ditunjukkan pada Gambar 15, memiliki output yang cenderung lambat. Hal tersebut dapat menjadi penyebab utama output posisi kereta sistem tidak pernah mampu stabil di titik referensinya (*set point* 0 m).



Gambar 15. Output pengendali posisi kereta (G_{Cx}) (Sumber: data primer, 2018)

Input sistem ditunjukkan pada Gambar 16 yang merupakan hasil kalkulasi masing-masing pengendali yang dijumlahkan dan merupakan tegangan masuk motor dc. Oleh karena agresifnya pengendali ($G_{C\theta}$), input sistem memiliki nilai yang hampir sama dengan output pengendali tersebut. Kinerja sistem dengan pengendali diukur dengan menghitung nilai RMSE dan galat keadaan tunak (e_{ss}) pada masing-masing output sistem.



Gambar 16. Input sistem pendulum terbalik (tegangan masuk motor dc) ($u(t)$) (Sumber: data primer, 2018)

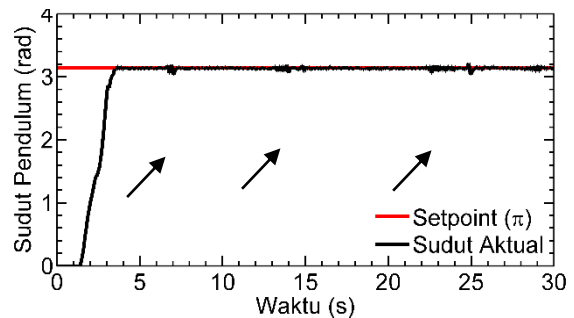
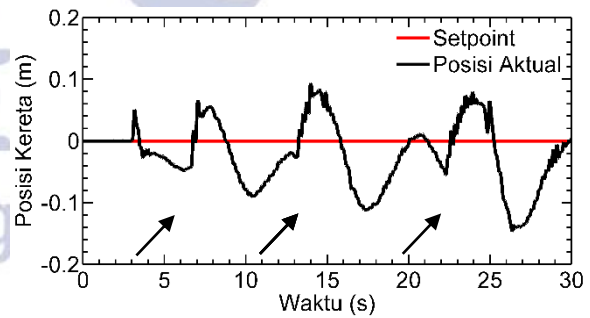
Sebagaimana yang ditunjukkan pada Tabel 4, nilai RMSE pada masing-masing sudut pendulum dan posisi kereta adalah berturut-turut sama dengan 0.0131 radian dan 0.0226 m atau sama dengan 0.7 derajat dan 2.26 cm. Galat keadaan tunak pada sudut pendulum sama dengan 0.0087 radian. Sedangkan pada posisi kereta nilai galat keadaan tunak (e_{ss}) tidak dapat ditentukan sebab sistem tidak pernah mencapai keadaan tunak.

Tabel 4. Diagram sistem pendulum terbalik

Parameter	Nilai	Satuan
$RMSE_{\theta}$	$1.31 \cdot 10^{-2}$	radian
$RMSE_x$	$2.26 \cdot 10^{-2}$	m
$e_{ss-\theta}$	$0.87 \cdot 10^{-2}$	radian

Uji Gangguan

Respon sistem terhadap gangguan luar ditunjukkan pada Gambar 17. Anak panah pada gambar merepresentasikan saat di mana gangguan diberikan



Gambar 17. Respon sistem terhadap gangguan luar (Sumber: data primer, 2018)

.Deviasi absolut maksimum pada posisi kereta saat diberikan gangguan kurang dari 0.1 m atau 10.0 cm. Sedangkan pada deviasi absolut sudut pendulum (dihitung dari nilai π) adalah kurang dari 0.102.

PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan hasil perancangan dan tuning pengendali, didapatkan konstanta PID berikut $Kp_x = -25.05$, $Ki_x = -2.89$, $Kd_x = -4 \cdot 10^{-7}$, $Kp_\theta = 115.5$, $Ki_\theta = 7161.8$, $Kd_\theta = 3 \cdot 10^{-6}$.

Hasil pengujian menunjukkan bahwa sistem dengan pengendali yang diimplementasikan memiliki kemampuan menstabilkan sistem dan ketahanan terhadap gangguan luar yang baik. Dengan nilai RMSE pada masing-masing posisi kereta dan sudut pendulum berturut-turut sama dengan $2.26 \cdot 10^{-2}$ m, dan $1.31 \cdot 10^{-2}$ radian, serta deviasi maksimum pada uji gangguan sama dengan 0.1 m dan 0.102 radian.

Saran

Model yang dikembangkan tidak mempertimbangkan faktor-faktor selain pada gaya internal yang bekerja pada sistem. Metode pengendalian PID yang terdapat pada penelitian ini dapat dikembangkan tidak hanya untuk stabilisasi tetapi juga *swing up* dan *tracking control* sistem pendulum terbalik.

DAFTAR PUSTAKA

- Anh, N. D., Matsuhisa, H., Viet, L.D., and Yasuda, M. 2007. "Vibration Control of An Inverted Pendulum Type Structure by Passive Mass-Spring-Pendulum Dynamic Vibration Absorber". *Journal of Sound and Vibration*. Vol 307 (1): pp. 187-201.
- Åström, Karl J., and Murray, Richard M. 2009. *Feedback Systems: An Introduction for Scientist and Engineers*. New Jersey: Princeton University Press.
- Boubaker, Olf. 2013. "The Inverted Pendulum Benchmark in Nonlinear Control Theory: A Survey". *International Jurnal of Advanced Robotic Systems*. Vol. 10 (5): pp. 1-9.
- Chai, T., and Draxler, R. R. 2014. "Root Mean Square Error (RMSE) or Mean Absolute Error (MAE) Arguments Against Avoiding RMSE in The Literature". *Copernicus Publication in EGU*. Vol. 7 (-): pp. 1247-1250.
- Christensen, Jesper H., and Chistiansen, Rasmus. 2017. *Swing Up and Stabilisation of an Inverted Pendulum on a Cart using Nonlinear Methods*. Unpublished master theses. Aalborg East: Aalborg University.
- Hansen, Carina., and Svensson, Cecilia. 2000. *Construction and Control of an Inverted Pendulum*. Unpublished master theses. Lund: Lund Institute of Technology.
- Hehn, M., and D'Andrea, R. 2011. "A Flying Inverted Pendulum". *IEEE International Conference in Robotics and Automation (ICRA)*. Vol. 1: pp. 763-770.
- Jia-Jun, Wang. 2011. "Simulation Studies of Inverted Pendulum based on PID Controllers". *Elsevier: Simulation modelling Practise and Theory*. Vol. 19 (1): pp. 440-449.
- Jia-Jun, Wang. 2015. "Position and Speed Tracking Control of Inverted Pendulum based on double PID Controllers". *IEEE in Proceedings of the 34th Chinese Control Conference*. Vol. - (-): pp. 4197-4201.
- Kafetzis, Ioannis., and Moysis, Lazaros. 2017. "Inverted Pendulum: A System with Innumerable Application". *IEEE in 9th Conference of International Week Dedicated to Math*. March 2017.
- Pati, Jyoti Ranjan. 2014. *Modelling, Identification and Control of Cart-Pole System*. Published master theses. Odisha: National Institute of Technology, Rourkela.
- Prasad, Lal B., Tyagi, Barjeev., and Gupta, Hari Om. 2012. "Modelling and Simulation for Optimal Control of Nonlinear Inverted Pendulum Dynamical System using PID Controller and LQR". *IEEE in Sixth Asia Modelling Symposium*. Vol. - (-): pp. 138-143.
- Roshdy, Mokbel A., Hany F., Yu Zheng Lin, and Tongyu Wang. 2012. "Stabilization of Real Inverted Pendulum using Pole Separation Factor". *Proceedings of the 1st International Conference on Mechanical Engineering and Material Science*. Vol. 8 (1): pp. 711-715.
- Suthar, Haresh A., and B. Pandya, Kaushal. 2005. "Designing Fuzzy Logic Controller for Inverted Pendulum". *Li D., Wang B. AIAI 2005. IFIP*. Vol 187 (1): pp. 61-68.
- White, J. R. 1997. *System Dynamics: Introduction to The Design and Simulation of Controlled System*, (Online), (http://www.profjrwhite.com/system_dynamics/sdyn/s7/s7invp2/s7invp2.html, diakses 03 April 2018)