

SKEMA PEMBUKTIAN SISWA DALAM MEMBUKTIKAN PROPOSISI MATEMATIKA

Siti Iswarini

Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail: iswarinie@gmail.com

Abdul Haris Rosyidi, S.Pd., M.Pd.

Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail: abdulharis@unesa.ac.id

Abstrak

Skema pembuktian siswa adalah proses mental yang dilakukan siswa dalam melakukan pembuktian. Proses mental adalah cara yang digunakan seseorang untuk merespon suatu informasi. Skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika merepresentasikan tingkat kognitif siswa dalam membuktikan proposisi matematika. Pada penelitian ini proposisi yang akan dibuktikan adalah proposisi yang berbentuk implikasi.

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif yang bertujuan untuk mendeskripsikan skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai benar dan proposisi matematika yang bernilai salah. Subjek penelitian adalah 8 siswa kelas XI dengan rincian 3 siswa untuk dideskripsikan skema pembuktiannya untuk proposisi matematika yang bernilai benar dan 5 siswa untuk proposisi matematika yang bernilai salah. Teknik pengumpulan data adalah wawancara berbasis tes pada materi grafik fungsi kuadrat. Data hasil penelitian dianalisis dengan mengacu pada skema pembuktian siswa yang diadaptasi dari Lee (2015).

Hasil penelitian ini adalah sebagai berikut. Untuk proposisi matematika yang bernilai benar, ketiga subjek menentukan apa yang diketahui dan apa yang akan dibuktikan dengan memperhatikan anteseden dan konsekuen dari proposisi tersebut. Mereka membuktikan proposisi tersebut secara induktif dengan menggunakan contoh-contoh spesifik. Namun, salah satu contoh yang dibuat oleh satu subjek tidak sesuai dengan proposisi. Selain itu logika yang digunakan untuk membuktikan proposisi tersebut adalah konvers dari implikasinya. Oleh karena itu, subjek tersebut dikategorikan ke dalam level 1 sedangkan subjek lainnya dikategorikan ke dalam level 2. Untuk proposisi matematika yang bernilai salah, kelima subjek juga menentukan apa yang diketahui dan apa yang akan dibuktikan dengan memperhatikan anteseden dan konsekuen dari proposisi tersebut. Namun, satu subjek menentukan konsekuen sebagai yang diketahui dan anteseden sebagai yang akan dibuktikan. Pembuktian dilakukan mulai dari konsekuen menuju ke anteseden dengan memberikan 1 contoh spesifik kemudian menyimpulkan bahwa proposisi bernilai benar. Cara yang serupa juga dilakukan oleh 2 subjek lainnya. Bedanya, 1 subjek menyimpulkan bahwa proposisi bernilai benar sedangkan yang lainnya menyimpulkan bahwa proposisi bernilai salah. Oleh karena itu, subjek pertama dikategorikan ke dalam level 0 dan 2 subjek dikategorikan ke dalam level 1. Dua subjek lainnya menggunakan 1 kontra contoh spesifik untuk menunjukkan bahwa proposisi bernilai salah. Oleh karena itu, mereka dikategorikan ke dalam level 4.

Kata Kunci: skema pembuktian, proposisi matematika, grafik fungsi kuadrat.

Abstract

Students' proof scheme is mental process performed by students in constructing the proof. . Mental process is the way that used by someone to responds to an information. Students' proof scheme in proving mathematical proposition represents the cognitive level of students in proving mathematical propositions. In this research, the proposition to be proved is a proposition in the form of implication.

This research is a qualitative research with aims to describe the students' proof scheme in proving the true mathematical propositions and students' proof scheme in proving the false mathematical propositions. The subjects of this reasearch are 8 students in grade 11th that consisted of 3 students to describe their proof scheme for the true mathematical proposition and 5 students for the false mathematical proposition. The data collection technique is interviews based test on the material of quadratic functions graph. The data are analyzed with reference to the students' proof scheme adapted from Lee (2015).

The results of this research are as follows. For the true mathematical proposition, three subjects have determined the information given and the things that will be proven by observing the antecedent and consequent of the proposition. They proved the proposition inductively by using specific examples. However, the example made by one subject does not accordance with the proposition. Besides that, the

logic used to prove the proposition is the convers of its implication. Therefore, the subject is categorized into level 1 while the other subjects are categorized into level 2. For the false proposition, five subjects have determined the information given and the things that will be proven by observing the antecedent and consequent of the proposition too. However, one subject has determined consequent as the information given and antecedent as the thing will be proven. The proof is starting from the consequent to the antecedent by using a specific example then concluded that the proposition is true. Similar way also used by 2 another subjects. The difference is one subject concluded that the proposition is true while other subject concluded that the proposition is false. Therefore, the first subject is categorized into level 0 and 2 subjects are categorized into level 1. Two other subjects gave a specific counterexample to prove that the proposition is false. Therefore, they are categorized into level 4.

Keywords: students' proof scheme, mathematical proposition, quadratic function graph

PENDAHULUAN

Pembuktian merupakan salah satu bagian terpenting dalam matematika. Pembuktian adalah suatu proses yang dilakukan untuk menjelaskan kebenaran dari suatu pernyataan. Dengan melakukan pembuktian seseorang dapat menunjukkan kebenaran dan ketidakbenaran dari setiap situasi dalam matematika serta alasan mengapa situasi tersebut benar atau tidak benar (Hanna, 2000).

Belajar pembuktian telah menjadi tujuan utama Kurikulum Matematika Sekolah di beberapa negara selama beberapa generasi (Harel dan Sowder, 1998). *Ministry of Education of Australia* (2009) dalam Kurikulum Matematika Sekolah di Australia menyatakan bahwa satu dari 4 kompetensi yang harus dicapai siswa saat belajar Matematika adalah kemampuan menalar meliputi kemampuan berpikir dan bertindak secara logis seperti menganalisis, membuktikan, mengevaluasi, menjelaskan, menyimpulkan, menjustifikasi, dan menggeneralisasi. Hal serupa juga dijelaskan dalam Kurikulum 2013 bahwa salah satu kompetensi yang diharapkan dapat dimiliki oleh siswa setelah mempelajari Matematika di Pendidikan Dasar dan Pendidikan Menengah adalah mampu melakukan penalaran matematis yang meliputi membuat dugaan dan memverifikasinya (Kemendikbud, 2016).

Perkembangan dan proses mental siswa ketika membuktikan telah menjadi subjek penelitian dalam pendidikan matematika. Harel dan Sowder (1998) telah melakukan penelitian mengenai skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika. Harel dan Sowder (1998) mengklasifikasikan pembuktian siswa berdasarkan struktur kognitif yang mendasarinya ke dalam skema pembuktian. Harel dan Sowder (1998) mengelompokkan skema pembuktian ke dalam tiga kategori, yaitu *external conviction proof scheme* atau skema pembuktian keyakinan eksternal, *empirical proof scheme* atau skema pembuktian empiris, dan *analytical proof scheme* atau skema pembuktian analitis. Ketiga skema ini merepresentasikan tingkat kognitif,

kemampuan intelektual, dan perkembangan matematika siswa dalam melakukan pembuktian.

Penelitian mengenai skema pembuktian siswa juga telah dilakukan oleh Lee pada tahun 2015. Jika Harel dan Sowder (1998) hanya fokus pada pembuktian deduktif untuk proposisi yang bernilai benar, Lee (2015) melengkapi penelitiannya dengan skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai salah. Lee (2015) mengembangkan skema pembuktian yang dikembangkan oleh Harel dan Sowder (1998) menjadi level-level skema yang disusun secara hierarki mulai dari level 0 sampai dengan level 6 untuk skema pembuktian pada proposisi yang benar dan level 0 sampai level 5 untuk skema pembuktian pada proposisi yang salah. Pelevelan ini berisi semua contoh dan kontra contoh yang mungkin dibuat oleh siswa ketika melakukan pembuktian. Skema pembuktian yang dikembangkan oleh Lee (2015) lebih rinci dan lebih operasional jika dibandingkan dengan skema yang dibuat oleh Harel dan Sowder (1998). Oleh karena itu, pada penelitian ini peneliti tertarik untuk menggunakan skema pembuktian siswa yang dikembangkan oleh Lee (2015).

Berdasarkan penelitian yang dilakukan Lee (2015), kemampuan siswa dalam membuktikan proposisi matematika untuk materi fungsi kuadrat tergolong rendah jika dibandingkan dengan materi teori bilangan. Hampir 82% siswa berada di level 0 sampai 2 pada skema pembuktian untuk membuktikan proposisi yang benar pada materi fungsi kuadrat. Selain itu, hampir 72% siswa juga berada di level 0 sampai 2 pada skema pembuktian untuk membuktikan proposisi yang salah. Karena sebagian besar siswa masih berada di level yang rendah untuk membuktikan dan menyanggah proposisi matematika pada materi fungsi kuadrat, maka peneliti tertarik untuk melakukan penelitian yang serupa pada materi grafik fungsi kuadrat.

Dari uraian di atas, peneliti tertarik untuk melakukan penelitian tentang "skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika."

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, dirumuskan pertanyaan penelitian yakni bagaimana

skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai benar dan bagaimana skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai salah.

Agar dapat menjawab pertanyaan penelitian tersebut, perlu adanya pengetahuan tentang beberapa teori yang mendukung penelitian ini, antara lain: proposisi matematika, pembuktian, dan skema pembuktian siswa.

Proposisi adalah kalimat yang bernilai benar atau salah tetapi tidak keduanya (Soesianto dan Dwiyono, 2003). Sehingga proposisi matematika adalah kalimat yang bernilai benar atau salah tetapi tidak keduanya. Kalimat yang dimaksud adalah kalimat dalam konteks matematika.

Proposisi matematika salah satunya berbentuk implikasi. Kalimat yang berbentuk “Jika... maka...” disebut kalimat kondisional atau implikasi (Masriyah, 2013). Sehingga proposisi yang berbentuk “Jika...maka...” disebut proposisi yang berbentuk implikasi. Proposisi “jika P maka Q ” ditulis sebagai $P \Rightarrow Q$ (Masriyah, 2013). Dalam implikasi $P \Rightarrow Q$, P disebut anteseden atau hipotesis dan Q disebut konsekuen atau konklusi (Masriyah, 2013).

Berdasarkan nilai kebenarannya, terdapat dua jenis proposisi matematika yaitu proposisi matematika yang bernilai benar dan proposisi matematika yang bernilai salah. Untuk menentukan kebenaran dari suatu proposisi matematika maka dilakukan pembuktian. Pembuktian adalah suatu proses yang dilakukan seseorang untuk menjelaskan suatu pernyataan dengan menggunakan argumen logis. Argumen-argumen ini dapat berasal dari premis pernyataan itu sendiri, teorema-teorema lainnya, definisi, dan akhirnya dapat berasal dari postulat dimana sistem Matematika itu berasal (Hernadi, 2008). Yang dimaksud logis adalah semua langkah pada setiap argumen harus dijustifikasi oleh langkah sebelumnya (Hernadi, 2008).

Skema adalah struktur kognitif yang memungkinkan individu untuk mengingat dan memberi respon-respon terhadap rangsangan yang masuk dari lingkungan sekitarnya (Piaget dalam Suherman, dkk, 2003). Sedangkan struktur kognitif adalah proses mental yang digunakan seseorang untuk memahami informasi (Garner, 2007). Proses mental sama dengan proses berpikir. Proses berpikir didefinisikan Ormrod (dalam Ngilawajan, 2013) sebagai suatu cara merespon atau memikirkan secara mental terhadap informasi atau suatu peristiwa. Sedangkan Suryabrata (dalam Ngilawajan, 2013) menyatakan bahwa proses berpikir dapat diklasifikasikan ke dalam tiga langkah, yaitu: (1) pembentukan pengertian dari informasi yang masuk, (2) pembentukan pendapat dengan membanding-bandingkan

pengetahuan yang ada sehingga terbentuk pendapat-pendapat, dan (3) penarikan kesimpulan. Sehingga dapat disimpulkan bahwa proses mental adalah suatu cara yang digunakan oleh seseorang untuk merespon suatu informasi atau suatu peristiwa.

Skema pembuktian siswa adalah proses mental yang mendasari siswa dalam melakukan pembuktian. Skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi Matematika adalah proses mental yang dilakukan seseorang dalam membuktikan proposisi Matematika. Proses mental adalah cara yang digunakan seseorang untuk merespon suatu rangsangan.

Lee (2015) mengembangkan skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi Matematika yang bernilai benar dan proposisi Matematika yang bernilai salah yang diklasifikasikan ke dalam level-level skema pembuktian yang disusun secara hierarki. Level-level skema pembuktian siswa dikembangkan dengan mempertimbangkan semua contoh dan kontra contoh yang mungkin dibuat oleh siswa ketika melakukan pembuktian (Lee, 2015).

Pada penelitian ini, skema pembuktian siswa yang digunakan diadaptasi dari skema pembuktian siswa yang diadaptasi oleh Lee (2015). Skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai benar dikategorikan ke dalam 7 level mulai dari level 0 sampai dengan level 6. Skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai benar yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

Tabel 1. Skema Pembuktian Siswa dalam Membuktikan Proposisi Matematika yang Bernilai Benar

Level	Karakteristik Pembuktian	Deskripsi Pembuktian Siswa
0	Kesimpulan sedikit atau tidak relevan	- Tidak tahu bagaimana cara membuktikan. - Tidak dapat membuktikan anteseden dan konsekuen dengan contoh-contoh.
1	Penggunaan contoh-contoh dan penalaran logis pemula	- Menyimpulkan bahwa proposisi bernilai salah dengan menggunakan satu atau lebih contoh yang salah. - Membuktikan implikasi jika P maka Q dengan menggunakan penalaran logis yang salah misalnya jika tidak P maka tidak Q. - Menurunkan sifat-sifat matematika yang tidak berhubungan dengan implikasi

Level	Karakteristik Pembuktian	Deskripsi Pembuktian Siswa
2	Penggunaan strategi contoh-contoh untuk menalar	Menyimpulkan bahwa proposisi bernilai benar dengan menggunakan contoh-contoh yang benar.
3	Penggunaan kesimpulan deduktif dengan banyak kesalahan dalam koherensi logika dan validitas	- Menyimpulkan bahwa proposisi bernilai benar dengan menggunakan sifat matematika yang relevan tetapi kehilangan satu atau dua kesimpulan deduktif untuk membuktikan implikasi. - Menyimpulkan bahwa proposisi bernilai benar untuk beberapa kasus anteseden tetapi mengabaikan kasus lain.
4	Penggunaan kesimpulan deduktif dengan sedikit kesalahan dalam koherensi logika dan validitas	Menyimpulkan bahwa proposisi bernilai benar dengan menggunakan kesimpulan-kesimpulan deduktif tetapi satu atau dua kesimpulan dapat ditafsirkan induktif karena pembuktian yang tidak cukup atau sebagai kesalahan penulisan
5	Pengonstruksian pembuktian deduktif yang tidak formal	Menyimpulkan bahwa proposisi bernilai benar secara deduktif dengan menggunakan representasi yang tidak formal
6	Pengonstruksian pembuktian deduktif menggunakan representasi formal	Menyimpulkan bahwa proposisi bernilai benar secara deduktif dengan menggunakan representasi formal.

(Diadaptasi dari Lee, 2015)

Skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai salah dikategorikan ke dalam 6 level mulai dari level 0 sampai dengan level 5. Skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai salah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut

Tabel 2 Skema Pembuktian Siswa dalam Membuktikan Proposisi Matematika yang Bernilai Salah

Level	Karakteristik Pembuktian	Deskripsi Pembuktian Siswa
0	Kesimpulan sedikit atau tidak relevan	- Tidak tahu bagaimana cara membuktikan. - Tidak dapat membuktikan anteseden dan konsekuen dengan

Level	Karakteristik Pembuktian	Deskripsi Pembuktian Siswa
		contoh-contoh.
1	Penggunaan contoh-contoh dan penalaran logis pemula	- Menyimpulkan bahwa proposisi bernilai benar dengan menggunakan contoh-contoh yang tidak benar. - Membuktikan implikasi jika P maka Q dengan menggunakan penalaran logis yang salah misalnya jika tidak P maka tidak Q. - Menurunkan sifat-sifat matematika yang tidak berhubungan dengan implikasi
2	Penggunaan strategi contoh-contoh untuk menalar	Menyimpulkan bahwa proposisi bernilai benar dengan menggunakan contoh-contoh yang benar.
3	Penggunaan kesimpulan deduktif dengan banyak kesalahan dalam koherensi logika dan validitas	Menyimpulkan bahwa proposisi bernilai benar untuk beberapa kasus anteseden tetapi mengabaikan kasus penyangkal lainnya karena miskonsepsi.
4	Pembuktian menggunakan kontra contoh yang spesifik	Menyimpulkan bahwa proposisi bernilai salah dengan memberikan satu atau beberapa kontra contoh yang spesifik.
5	Pembuktian menggunakan kontra contoh yang general.	Menyimpulkan bahwa proposisi bernilai salah dengan memberikan kontra contoh yang umum dan menjelaskan alasan mengapa kontra contoh yang dibuat dapat membuat proposisi bernilai salah.

(Diadaptasi dari Lee, 2015)

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan tujuan mendeskripsikan skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai benar dan skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai salah.

Secara garis besar rancangan penelitian pada penelitian ini adalah menyusun proposal penelitian, instrumen penelitian, melakukan perizinan kepada pihak sekolah, melakukan uji keterbacaan instrumen soal tes pembuktian kepada 3 siswa selain subjek penelitian yang mempunyai kemampuan yang setara dengan calon subjek

penelitian, melatih calon subjek penelitian untuk membuktikan proposisi matematika yang bernilai benar dan proposisi matematika yang bernilai salah pada materi teori bilangan, memberikan tes pembuktian, menentukan subjek penelitian, melakukan wawancara kepada subjek penelitian, menganalisis hasil tes dan wawancara kemudian membuat laporan.

Sumber data penelitian adalah siswa kelas XI-IPA 5 SMAN 1 Krian pada semester genap tahun ajaran 2016/2017. Pemilihan subjek penelitian dilakukan dengan menggunakan metode variasi maksimal dari data hasil tes pembuktian serta mempertimbangkan kemampuan komunikasi siswa. Sehingga banyaknya subjek penelitian sama dengan banyaknya variasi jawaban yang ada di kelas itu. Data yang diperoleh dari penelitian ini adalah data hasil tes pembuktian proposisi matematika yang bernilai benar dan proposisi matematika yang bernilai salah dan data hasil wawancara. Data penelitian dikumpulkan dengan menggunakan teknik wawancara berbasis tes. Instrumen yang digunakan dalam penelitian ini adalah soal tes pembuktian proposisi matematika yang bernilai benar (soal no 1) dan proposisi matematika yang bernilai salah (soal no 2) pada materi grafik fungsi kuadrat dan pedoman wawancara. Instrumen soal tes pembuktian pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

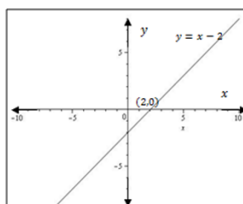
Tentukan benar atau salah pernyataan di bawah ini jelaskan alasanmu!

1. Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $y = ax^2 + bx + c$ dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

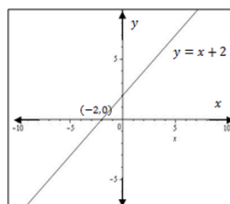
Tentukan benar atau salah pernyataan di bawah ini! Jelaskan alasanmu!

"Jika $a < 0$ dan $c > 0$ maka grafik fungsi kuadrat memotong sumbu- x di titik yang berabsis positif dan titik yang berabsis negatif."

Keterangan: Titik yang berkoordinat (x, y) pada koordinat kartesius, x disebut absis dan y disebut ordinat. Contoh: Titik yang berkoordinat $(3, 4)$ pada koordinat kartesius maka absisnya adalah 3 dan ordinatnya adalah 4.



Gambar 1



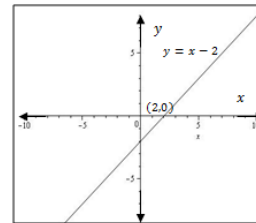
Gambar 2

2. Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $y = ax^2 + bx + c$ dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$. $a \neq 0$.

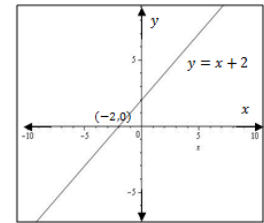
Tentukan benar atau salah pernyataan di bawah ini! Jelaskan alasanmu!

"Jika grafik fungsi kuadrat memotong sumbu x di dua titik yang berabsis negatif maka $a < 0$ dan $c < 0$."

Keterangan: Titik yang berkoordinat (x, y) pada koordinat kartesius, x disebut absis dan y disebut ordinat. Contoh: Titik yang berkoordinat $(5, 6)$ pada koordinat kartesius maka absisnya adalah 5 dan ordinatnya adalah 6.



Gambar 1



Gambar 2

Data hasil tes dan wawancara dianalisis dengan mengacu pada skema pembuktian siswa yang diadaptasi dari Lee (2015).

HASIL DAN PEMBAHASAN

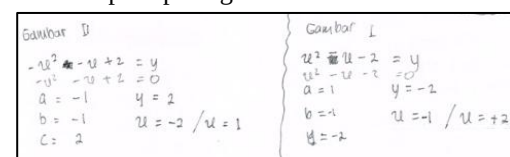
Berdasarkan hasil tes pembuktian yang telah dilakukan, diperoleh 3 variasi jawaban untuk proposisi matematika yang bernilai benar dan 5 variasi jawaban untuk proposisi matematika yang bernilai salah. Oleh karena itu, subjek penelitian untuk dideskripsikan skema pembuktiannya untuk proposisi matematika yang bernilai benar adalah 3 orang sedangkan subjek penelitian untuk proposisi matematika yang bernilai salah adalah 5 orang.

Berikut adalah skema pembuktian dari masing-masing subjek tersebut.

1. Skema Pembuktian Siswa dalam Membuktikan Proposisi Matematika yang Bernilai Benar

Ketiga subjek menentukan apa yang diketahui dan apa yang akan dibuktikan dengan memperhatikan anteseden dan konsekuen dari proposisi tersebut. Selain itu pembuktian dilakukan secara induktif dengan menggunakan contoh-contoh yang spesifik.

Subjek pertama menentukan P sebagai yang diketahui dan Q sebagai yang akan dibuktikan pada proposisi $P \Rightarrow Q$. Subjek pertama mencoba membuat contoh-contoh untuk membuktikan proposisi tersebut. Namun, pembuktian dilakukan dengan memberikan 2 contoh yang salah satu contohnya tidak memenuhi anteseden seperti pada gambar dibawah ini.



Gambar 1. Pekerjaan Subjek Pertama untuk Proposisi Matematika yang Bernilai Benar

Contoh 1 atau gambar 1 di atas adalah contoh yang tidak memenuhi anteseden karena pada fungsi kuadrat

tersebut, $a > 0$ dan $c < 0$. Alasan subjek pertama memberikan 2 contoh tersebut adalah karena subjek hanya asal mencoba 2 contoh fungsi kuadrat yang akan memotong sumbu- x di titik yang berabsis positif dan titik yang berabsis negatif. Ini menunjukkan bahwa subjek hanya berfokus pada apa yang akan dibuktikan tanpa benar-benar memperhatikan apa yang diketahui pada soal.

Di akhir jawabannya, subjek pertama menyimpulkan bahwa proposisi $P \Rightarrow Q$ bernilai benar dengan menggunakan logika $Q \Rightarrow P$. Cuplikan wawancaranya adalah sebagai berikut.

PA1 : "Lalu, kesimpulannya pernyataan pada soal benar atau salah?"

SA1 : "Kesimpulannya pernyataan jika $a < 0$ dan $c > 0$ maka grafik fungsi kuadrat memotong sumbu- x di titik yang berabsis positif dan titik berabsis negatif benar karena a dan c itu harus berlawanan tanda artinya jika $a < 0$ maka c harus lebih dari nol dan sebaliknya agar memotong sumbu- x di titik yang berabsis positif dan titik yang berabsis negatif."

Keterangan:

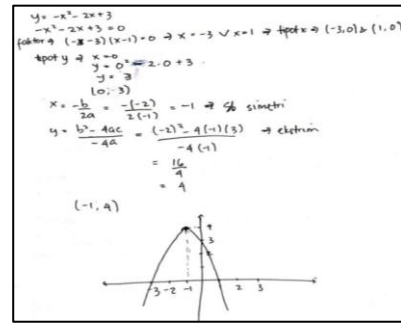
PA1: Pertanyaan peneliti untuk subjek pertama untuk proposisi matematika yang bernilai benar

SA1: Jawaban subjek pertama untuk proposisi matematika yang bernilai benar

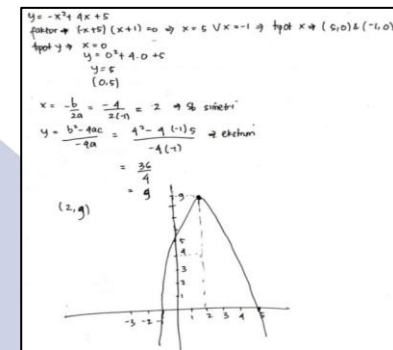
Pembuktian yang dilakukan oleh subjek tidak valid karena nilai kebenaran dari $P \Rightarrow Q$ tidak sama dengan nilai kebenaran dari $Q \Rightarrow P$. Karena pembuktian dilakukan dengan menggunakan penalaran logis yang salah maka subjek pertama dikategorikan ke dalam level 1 pada skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai benar.

Sama seperti subjek pertama, subjek kedua juga menentukan P sebagai yang diketahui dan Q sebagai yang akan dibuktikan pada proposisi $P \Rightarrow Q$.

Awalnya pembuktian dilakukan dengan memberikan contoh yang tidak sesuai dengan yang diketahui karena tidak teliti. Fungsi kuadrat dengan $a < 0$ dan $c > 0$ dibuktikan dengan memberikan contoh fungsi kuadrat dengan $a > 0$ dan $c < 0$. Pembuktian juga dilakukan dengan memberikan representasi gambar grafik dari contoh yang dia berikan. Setelah menyadari kesalahannya, selama wawancara subjek kedua memberikan 2 contoh fungsi kuadrat yang memenuhi anteseden.



Gambar 2. Contoh Pertama dari Subjek Kedua Untuk Proposisi yang Bernilai Benar

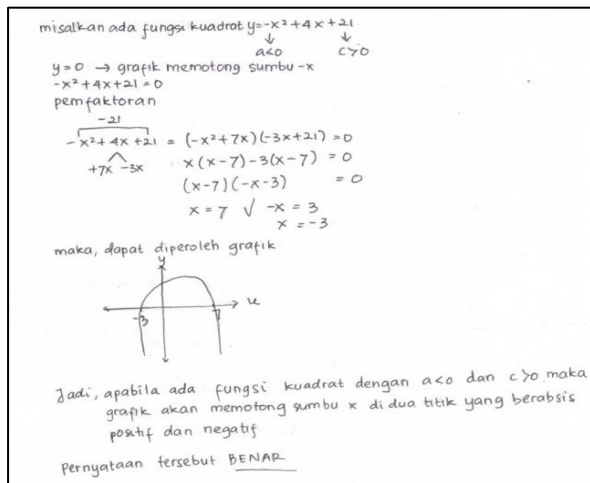


Gambar 3. Contoh Kedua dari Subjek Kedua Untuk Proposisi yang Bernilai Benar

Berdasarkan contoh-contoh tersebut, subjek kedua menyimpulkan bahwa proposisi bernilai benar. Karena subjek kedua menggunakan contoh-contoh untuk membuktikan proposisi yang diberikan maka subjek kedua dikategorikan ke dalam level 2 pada skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai benar.

Subjek ketiga menentukan P sebagai yang diketahui dan Q sebagai yang akan dibuktikan pada proposisi $P \Rightarrow Q$. Awalnya, subjek ketiga berencana untuk membuktikan proposisi tersebut secara deduktif dengan menggunakan bukti formal. Namun, karena subjek merasa kesulitan untuk menuliskan atau membuktikan proposisi tersebut menggunakan simbol-simbol matematika maka dia membuktikan proposisi tersebut dengan menggunakan contoh yang spesifik.

Pembuktian dilakukan mulai dari anteseden menuju ke konsekuen dengan memberikan 1 contoh fungsi kuadrat yang memenuhi anteseden. Berdasarkan contoh tersebut, subjek ketiga menyimpulkan bahwa proposisi bernilai benar. Contoh-contoh tersebut disajikan dalam gambar di bawah ini.



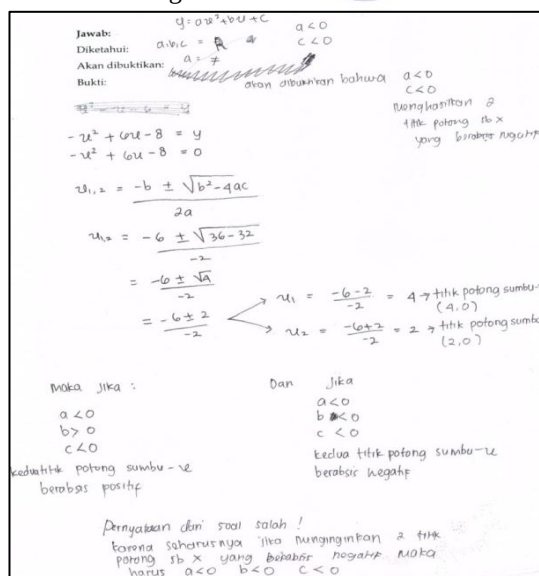
Gambar 4. Pekerjaan Subjek Ketiga untuk Proposisi Matematika yang Bernilai Benar

Meskipun contoh yang dibuat hanya satu, namun subjek tetap merasa yakin bahwa proposisi bernilai benar. Karena subjek ketiga menggunakan contoh untuk membuktikan proposisi yang diberikan maka subjek ketiga dikategorikan ke dalam level 2 pada skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai benar.

2. Skema Pembuktian Siswa dalam Membuktikan Proposisi Matematika yang Bernilai Salah

Kelima subjek untuk proposisi matematika yang bernilai salah membuktikan proposisi yang diberikan secara induktif dengan memberikan contoh yang spesifik.

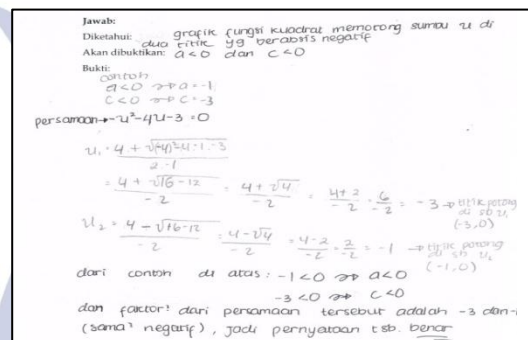
Hasil tes tulis subjek pertama untuk dideskripsikan skema pembuktiannya dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai salah adalah sebagai berikut.



Gambar 5. Pekerjaan Subjek Pertama untuk Proposisi yang Bernilai Salah

Subjek pertama menentukan Q sebagai yang diketahui dan P sebagai yang akan dibuktikan pada proposisi $P \Rightarrow Q$. Pembuktian proposisi $P \Rightarrow Q$ dilakukan dengan membuktikan proposisi $Q \Rightarrow P$ dengan memberikan 2 contoh yang memenuhi konsekuen. Subjek pertama menyimpulkan bahwa proposisi $P \Rightarrow Q$ bernilai salah karena salah satu contoh yang dibuat menunjukkan bahwa proposisi $Q \Rightarrow P$ bernilai salah. Oleh karena itu, subjek pertama dikategorikan ke dalam level 0 pada skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai salah.

Hasil tes tulis subjek kedua adalah sebagai berikut.



Gambar 6. Pekerjaan Subjek Kedua untuk Proposisi yang Bernilai Salah

Subjek kedua menentukan P sebagai yang diketahui dan Q sebagai yang akan dibuktikan pada proposisi $P \Rightarrow Q$. Awalnya, subjek berencana untuk membuktikan dengan memberikan contoh yang memenuhi anteseden. Namun, subjek kedua merasa kesulitan untuk membuktikan proposisi mulai dari anteseden menuju konsekuen. Oleh karena itu, pembuktian dilakukan mulai dari konsekuen menuju anteseden dengan memberikan 1 contoh yang memenuhi konsekuen. Berdasarkan contoh tersebut subjek kedua menyimpulkan bahwa proposisi bernilai benar. Karena pembuktian dilakukan dengan menggunakan penalaran logis yang salah maka subjek kedua dikategorikan ke dalam level 1 pada skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai salah.

Subjek ketiga menentukan P sebagai yang diketahui dan Q sebagai yang akan dibuktikan pada proposisi $P \Rightarrow Q$. Sama seperti subjek kedua, awalnya subjek ketiga berencana untuk membuktikan dengan memberikan contoh yang memenuhi anteseden. Namun, karena subjek ketiga merasa kesulitan untuk membuktikan proposisi mulai dari anteseden menuju konsekuen maka pembuktian dilakukan mulai dari konsekuen menuju anteseden dengan memberikan 1 contoh yang memenuhi konsekuen. Bedanya contoh yang dibuat subjek ketiga menunjukkan bahwa

proposisi bernilai salah. sehingga subjek ketiga menyimpulkan bahwa proposisi bernilai salah. Karena pembuktian dilakukan dengan menggunakan penalaran logis yang salah maka subjek kedua dikategorikan ke dalam level 1 pada skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai salah.

Subjek keempat menentukan P sebagai yang diketahui dan Q sebagai yang akan dibuktikan pada proposisi $P \Rightarrow Q$. Awalnya pembuktian dilakukan dengan memberikan contoh yang tidak sesuai dengan yang diketahui karena tidak teliti. Setelah menyadari kesalahannya, subjek keempat dapat memberikan satu kontra contoh spesifik yang memenuhi anteseden. Kontra contoh tersebut disajikan pada gambar berikut.

titik potong dengan sumbu x di
 $x = -1$ dan $x = -5$
 $(x+1) = 0$ dan $(x+5) = 0$
 $y = (x+1)(x+5)$
 $y = x^2 + 6x + 5$
 $a > 0$ $c > 0$

Gambar 7. Pekerjaan Subjek Keempat untuk Proposisi yang Bernilai Salah

Selanjutnya subjek keempat menyimpulkan bahwa proposisi bernilai salah berdasarkan kontra contoh yang dibuat seperti pada cuplikan wawancara berikut.

PB4 : "Berarti kesimpulannya pernyataan pada soal no 2 ini benar atau salah?"

SB4 : "Pernyataannya salah karena berdasarkan contoh saya jika grafik fungsi kuadrat memotong sumbu- x di dua titik yang berabsis negatif maka a dan c itu lebih dari nol."

Keterangan:

PB4: Pertanyaan peneliti untuk subjek keempat untuk proposisi matematika yang bernilai salah

SB4: Jawaban subjek keempat untuk proposisi matematika yang bernilai salah

Berdasarkan hal ini, subjek keempat dikategorikan ke dalam level 4 pada skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai salah.

Hasil tes tulis subjek kelima adalah sebagai berikut.

Jawab: Grafik fungsi kuadrat memotong sumbu x di dua titik
Diketahui: yang berabsis negatif
Akan dibuktikan: $a < 0$ dan $c < 0$
Bukti:
misalkan ada grafik fungsi kuadrat
grafik memotong sumbu x di
 $x_1 = -7 \rightarrow (x+7) = 0$
 $x_2 = -3 \rightarrow (x+3) = 0$
 $y = (x+7)(x+3)$
 $y = x^2 + 3x + 7x + 21$
 $y = x^2 + 10x + 21$
 $a > 0$ $c > 0$
Jadi, apabila grafik fungsi kuadrat memotong sumbu x di dua titik yang berabsis negatif, saat dicari fungsi kuadratnya, nilai a dan c tidak selalu kurang dari nol.
pernyataan tersebut SALAH

Gambar 8. Pekerjaan Subjek Kelima untuk Proposisi yang Bernilai Salah

Subjek kelima dapat menentukan yang diketahui dan yang akan dibuktikan dengan benar. Pada pernyataan $P \Rightarrow Q$, P disebut yang diketahui dan Q disebut yang akan dibuktikan. Awalnya subjek kelima tidak bisa memberikan dugaan tentang kebenaran dari proposisi tersebut. Oleh karena itu, subjek kelima mencoba memberikan satu contoh spesifik yang memenuhi anteseden. Karena contoh yang dibuat menunjukkan bahwa proposisi bernilai salah, maka subjek kelima menyimpulkan bahwa proposisi bernilai salah berdasarkan kontra contoh yang dibuat. Karena subjek kelima dapat membuat satu kontra contoh yang spesifik, maka subjek kelima dikategorikan ke dalam level 4 pada skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai salah.

Berdasarkan uraian di atas diketahui bahwa semua subjek baik subjek untuk proposisi matematika yang bernilai benar maupun subjek untuk proposisi matematika yang bernilai salah membuktikan proposisi yang diberikan secara induktif. Oleh karena itu, subjek untuk proposisi matematika yang bernilai benar mencapai level 1-2 padanskema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai benar. hal ini sesuai dengan hasil penelitian yang dilakukan oleh Lee (2015) yang menyatakan bahwa bahwa sebagian besar subjek mencapai level 1 dan level 2 pada skema pembuktian subjek dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai benar.

Selain itu, kesalahan umum yang dilakukan oleh hampir semua subjek dalam membuktikan proposisi matematika yaitu melakukan pembuktian mulai dari konsekuensi menuju anteseden. Hal ini sesuai yang

diungkapkan oleh Stavrou (2014) yaitu salah satu kesalahan umum yang dilakukan oleh subjek dalam membuktikan proposisi Matematika adalah melakukan pembuktian yang dimulai dari konsekuen menuju anteseden. Hal ini terjadi karena subjek belum pernah mempelajari logika matematika, sehingga subjek belum mengetahui bahwa nilai kebenaran dari $P \Rightarrow Q$ tidak sama dengan nilai kebenaran dari $Q \Rightarrow P$.

PENUTUP

Simpulan

1. Skema Pembuktian Siswa dalam Membuktikan Proposisi Matematika yang Bernilai Benar

Ketiga subjek menentukan apa yang diketahui dan apa yang akan dibuktikan dengan memperhatikan anteseden dan konsekuen dari proposisi tersebut. Pada proposisi $P \Rightarrow Q$, P disebut sebagai yang diketahui dan Q disebut sebagai yang akan dibuktikan.

Mereka membuktikan proposisi tersebut secara induktif dengan menggunakan contoh-contoh spesifik. Namun, contoh yang dibuat oleh salah satu subjek tidak sesuai dengan proposisi karena logika yang digunakan adalah konvers dari implikasinya. Oleh karena itu, dia dikategorikan ke dalam level 1 sedangkan subjek lainnya dikategorikan ke dalam level 2.

2. Skema Pembuktian Siswa dalam Membuktikan Proposisi Matematika yang Bernilai Salah

Kelima subjek menentukan apa yang diketahui dan apa yang akan dibuktikan dengan memperhatikan anteseden dan konsekuen dari proposisi tersebut. Selain itu, pembuktian dilakukan secara induktif dengan menggunakan contoh-contoh spesifik.

Namun, satu subjek menentukan konsekuen sebagai yang diketahui dan anteseden sebagai yang akan dibuktikan. Selain itu pembuktian dilakukan mulai dari konsekuen menuju ke anteseden dengan memberikan 1 contoh spesifik. Di akhir jawabannya, subjek tersebut menyimpulkan bahwa proposisi bernilai benar.

Cara yang serupa juga dilakukan oleh 2 subjek lainnya. Meskipun keduanya menentukan anteseden sebagai yang diketahui dan konsekuen sebagai yang akan dibuktikan tetapi pembuktian dilakukan mulai dari konsekuen menuju ke anteseden dengan memberikan 1 contoh spesifik. Namun, dari 2 subjek tersebut, satu subjek menyimpulkan bahwa proposisi bernilai benar sedangkan yang lainnya menyimpulkan bahwa proposisi bernilai salah. Oleh karena itu, mereka dikategorikan ke dalam level 1 pada skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai salah.

Dua subjek lainnya menggunakan 1 kontra contoh spesifik untuk menunjukkan bahwa proposisi bernilai salah. Oleh karena itu, mereka dikategorikan ke dalam level 4.

Saran

Berdasarkan hasil penelitian skema pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi Matematika menunjukkan bahwa subjek masih mencapai level yang rendah dalam membuktikan proposisi Matematika yang bernilai benar yaitu level 1 dan level 2. Selain itu, dari 5 subjek untuk proposisi matematika yang bernilai salah, satu subjek dikategorikan ke dalam level 0, dua subjek dikategorikan ke dalam level 1, dan dua subjek dikategorikan ke dalam level 4. Subjek dengan level 0 sampai 1 mempunyai pola atau kesalahan yang sama dalam membuktikan proposisi yang diberikan yaitu membuktikan proposisi $P \Rightarrow Q$ dengan cara membuktikan proposisi $Q \Rightarrow P$. Hal ini menunjukkan bahwa kemampuan pembuktian siswa dalam membuktikan proposisi matematika yang bernilai benar maupun salah masih belum baik. Oleh karena itu, dalam pembelajaran, pendidik diharapkan dapat melatih subjek untuk membuktikan proposisi Matematika mengingat kemampuan subjek dalam hal ini juga merupakan salah satu kompetensi yang harus dicapai subjek ketika belajar Matematika. Meskipun demikian, beberapa subjek dapat memberikan contoh-contoh yang benar terhadap proposisi yang diberikan. Hal itu bisa digunakan sebagai pintu masuk bagi guru dalam membelajarkan pembuktian deduktif.

DAFTAR PUSTAKA

- Garner, Betty K. 2007. *Getting to Got It! Helping Struggling Students Learn How to Learn*. Alexandria: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Hadi, Sutrisno. 2004. *Metodologi Research Jilid 3*. Yogyakarta: Andi.
- Hanna, G. 2000. "Proof, Explanation and Exploratori: An Overview". *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 44: pp. 5-23.
- Harel, Guershon dan Sowder, Larry. 1998. "Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies". *Issues in Mathematical Education*, Vol. 7: pp. 234-283.
- Hernadi, Julan. 2008. "Metoda Pembuktian Dalam Matematika". *Jurnal Pendidikan Matematika*. Vol. 2 (1).
- Kemendikbud. 2016. Silabus Mata Pelajaran Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah/Sekolah Menengah Kejuruan/Madrasah Aliyah Kejuruan

- (SMA/MA/SMK/MAK). Jakarta: Badan Penelitian dan Pengembangan Pusat Kurikulum.
- Lee, Kosze. 2015. "Students' Proof Schemes for Mathematical Proving and Disproving of Propositions". *Journal of Mathematical Behaviour*, Vol. 41: pp. 26-44
- Masriyah. 2012. *Pengantar Dasar Matematika*. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya
- Ministry of Education of Australia. 2009. *Shape of the Australian Curriculum: Mathematics*. Commonwealth of Australian.
- Ngilawajan, Darma Andreas. 2013. "Proses Berpikir Siswa SMA dalam Memecahkan Masalah Matematika Materi Turunan Ditinjau dari Gaya Kognitif Field Independent dan Field Dependent". *Pedagogia*. Vol. 2 (1): pp. 71-83.
- Permendiknas No. 22 Tahun 2006 tentang Standar Isi untuk Satuan Pendidikan Dasar dan Menengah.
- Soesianto dan Dwiyo. 2003. *Logika Proposisional*. Bandung: Pustaka Grafika
- Stavrou, Stavros Georgius. 2014. "Common Errors and Misconceptions in Mathematical Proving by Education Undergraduates". *IUMPST*. Vol. 1: pp. 1-8.
- Suherman, dkk. 2003. *Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer*. Bandung: Universitas Pendidikan Matematika.

