

Penalaran Siswa SMA dalam Pembuktian Matematika pada Materi Trigonometri Ditinjau dari Kemampuan Matematika

Binti Nur Hidayah^{1*}, Dini Kinati Fardah²

^{1*2} Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia

DOI: <https://doi.org/10.26740/mathedunesa.v12n2.p663-683>

Article History:

Received: 26 June 2023

Revised: 27 July 2023

Accepted: 3 August 2023

Published: 4 August 2023

Keywords:

Reasoning, Proof,
Mathematical Ability,
Trigonometry

*Corresponding author:

rayyan@xxxx.ac.id

Abstract: Reasoning in mathematical proof is a thinking process to draw conclusions based on logical ideas by rebuilding previous knowledge and connecting it with current knowledge in order to demonstrate the truth of a mathematical statement supported by logical arguments. Differences in students' mathematical abilities allow for differences related to reasoning in mathematical proof. The purpose of this research is to describe the reasoning of high school students with high, medium and low mathematical ability when proving mathematics with trigonometry material. This research used a descriptive research type with a qualitative approach. The research subjects consisted of 3 students from class X, namely students with high, medium and low mathematical abilities. The research material was obtained from the results of mathematical ability tests, mathematical proof tests, and interviews. The results showed that the three students understood the problem by identifying information that was known and that was not known to students with high mathematical ability and logical reasons, but students with moderate and low mathematical ability, there were statements that were not accompanied by logical reasons. In planning the completion, students with high mathematical ability are accompanied by logical reasons but students with moderate and low mathematical ability have statements that are not accompanied by logical reasons. In carrying out the completion plan students with high mathematical ability can solve problems according to plan accompanied by logical reasons, for students with moderate mathematical ability can solve problems according to plan, even though there are statements that are not accompanied by logical reasons, but students with low mathematical ability they cannot solve problems and did not succeed in carrying out according to the plan because they were confused about proceeding with problem solving. In re-examining the process and results, students with high ability get conclusions from their completion and examine the process from the start, starting from reading the problem, planning, implementing plans and conclusions with logical reasons, for students with moderate mathematical ability getting conclusions from their completion and checking their calculations with logical reasons. However, students with low mathematical ability did not get a conclusion from the solution because they could not solve the problem and did not re-examine the process.

PENDAHULUAN

Terdapat lima proses siswa untuk memperoleh dan menerapkan pengetahuan matematis salah satunya penalaran dan pembuktian (*reasoning and proof*) (NCTM, 2000). Penalaran matematika siswa merupakan tujuan dari pembelajaran matematika. Kemendikbud (2022:133) menyatakan bahwa untuk menggeneralisasi, membuat bukti, menyatakan argumen, membuat pernyataan dalam matematika dapat menerapkan penalaran siswa pada sifat dan pola serta melaksanakan manipulasi matematis. Penalaran adalah kegiatan untuk berfikir dalam menarik kesimpulan sah atau membuat pernyataan baru berdasarkan pernyataan yang sudah ada dan dianggap benar (Wilkinson, dkk, 2018; Hendriana, dkk,

2018). Sedangkan menarik kesimpulan dan membuat pernyataan baru berdasarkan pernyataan yang sudah ada dan dianggap benar berkaitan dengan pembuktian dalam matematika. Dalam penelitian ini penalaran didefinisikan sebagai proses berfikir untuk menarik kesimpulan dengan menganalisis suatu masalah, dan mengungkapkan ide-ide secara logis dengan membangun kembali pengetahuan sebelumnya serta menghubungkannya dengan pengetahuan yang sekarang.

Pembuktian matematika merupakan pernyataan-pernyataan untuk menunjukkan kebenaran suatu teorema dalam pembelajaran matematika (Pelc, 2014). McCrone dan Martin (2009) menyatakan peran pembuktian yaitu untuk memberikan siswa kesempatan untuk mengatur diri mereka sendiri dan akan mencapai titik dimana mereka berpikir secara rasional serta dapat menggunakan penalaran mereka. Dalam penelitian ini pembuktian didefinisikan sebagai serangkaian proses untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan matematika didukung dengan beberapa argumen yang masuk akal agar diterima kebenarannya.

Pembuktian merupakan bagian dari jenis masalah. Polya (2004) menyatakan bahwa jenis masalah dibagi menjadi 2 yaitu masalah untuk menemukan penyelesaian (*problem to find*) dan masalah untuk pembuktian (*problem to prove*). Berdasarkan hal tersebut pembuktian matematika dibutuhkan untuk memecahkan permasalahan dan untuk memecahkan masalah tersebut membutuhkan penalaran (Iqlima, 2020). Sehingga Penalaran berkaitan erat dengan pembuktian matematika.

Indikator yang dipakai dalam penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan penalaran dalam pembuktian matematika dengan menghubungkan penalaran dan tahapan pemecahan masalah polya. Tahapan pemecahan polya digunakan karena sederhana dan aktivitas pada setiap tahapannya jelas, serta siswa akan menggunakan pengetahuan dan keterampilan memecahkan masalah dalam pembuktian pada penelitian ini (Nursoffina, 2022). Lebih lanjut dijelaskan bahwa pemecahan masalah dan penalaran tidak dapat lepas dari proses berpikir agar mendapatkan kesimpulan dari masalah yang akan dipecahkan sehingga keduanya berkaitan dengan erat.

Dalam Kurikulum 2013, salah satu bidang penalaran dan pembuktian yaitu membuat rencana, mengkontruksi pernyataan-pernyataan matematika, membuktikan kebenaran suatu prinsip, rumus atau teorema dengan cara yang berbeda (Kemendikbud, 2016). Berdasarkan uraian tersebut menunjukkan bahwa pembuktian merupakan aspek yang harus diperhatikan ketika mempelajari matematika khususnya pada jenjang SMA.

Pembuktian matematika untuk siswa bukanlah hal mudah. Beberapa siswa mengatakan kesulitan ketika mereka harus menyelesaikan soal tentang bukti matematika. Salah satu contoh, berdasarkan pengalaman peneliti dalam mengajar, beberapa siswa SMA kesulitan menginterpretasikan makna dari pertanyaan pembuktian. Ada yang tidak bisa menentukan cara awal atau ide awal dalam memecahkan pertanyaan pembuktian tersebut. Stylianou dkk (2009) menyatakan bahwa penyebab siswa kesulitan dalam mengerjakan soal pembuktian matematika karena kemampuan pemecahan masalah matematika siswa yang rendah.

Berdasarkan uraian tersebut menjadi pertimbangan peneliti untuk memilih siswa SMA sebagai subjek penelitian. Selain itu, berdasarkan tahap perkembangan Piaget, siswa SMA dikelompokkan pada tahap operasi formal (Utari dkk, 2019). Tahap operasi formal siswa mempunyai kemampuan berpikir dalam menyusun ide-ide yang abstrak dan menalar langkah yang akan terjadi. Hal ini memungkinkan siswa SMA dapat menyelesaikan masalah tentang penalaran dalam pembuktian matematika.

Trigonometri merupakan materi yang ada di SMA dan termasuk materi yang kompleks. Trigonometri merupakan materi yang mengkombinasikan konsep dan prosedur dalam matematika seperti aljabar dan geometri (Ilmi dan Rosyidi, 2017). Pada Kurikulum 2013, materi trigonometri membutuhkan kemampuan siswa dalam kegiatan bernalar dan membuktikan agar siswa dapat berpikir secara kritis, sistematis dan logis dengan baik (Latifa, 2017). Namun, kenyataan di lapangan banyak siswa yang kesulitan dalam materi trigonometri. Berdasarkan hasil Ujian Nasional tahun 2019 pada indikator soal “menyelesaikan masalah kontekstual berhubungan dengan aturan sinus dan/atau kosinus” masih diangka 42,04. Menurut Ikram (2013) salah satu penyebabnya yaitu banyak rumus yang perlu dipahami siswa dan hanya diberikan untuk dihafalkan serta siswa kesulitan dalam mengaitkan materi trigonometri dengan materi matematika lainnya. Dengan demikian, menunjukkan bahwa pembuktian pada materi trigonometri menjadi materi matematika yang sulit bagi siswa.

Pada dasarnya, setiap siswa mempunyai kemampuan matematika yang tidak sama. Cahyanti (2019) menyatakan bahwa kemampuan matematika siswa dapat dikategorikan menjadi tiga kategori yaitu kemampuan matematika tinggi, kemampuan matematika sedang dan kemampuan matematika rendah. Pengkategorian tersebut didapatkan dari skor siswa dalam mengerjakan tes kemampuan matematika. Kemampuan matematika siswa yang berbeda memungkinkan terjadinya penalaran dalam pembuktian matematika yang berbeda juga. Hasil penelitian Cahyanti (2019) menunjukkan bahwa kemampuan matematika siswa memiliki pengaruh pada penalaran siswa dalam menyelesaikan masalah matematika. Selain itu, Iqlima (2020) menunjukkan siswa dengan kemampuan matematika yang berbeda maka penalaran analogi dalam pemecahan masalah juga akan memiliki perbedaan. Dari uraian di atas peneliti ingin mengetahui lebih detail tentang perbedaan kemampuan matematika pada penalaran siswa SMA dalam pembuktian matematika.

Berdasarkan latar belakang di atas, peneliti tertarik untuk melakukan penelitian yang berjudul “Penalaran Siswa SMA dalam Pembuktian Matematika pada Materi Trigonometri Ditinjau dari Kemampuan Matematika”. Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan penalaran siswa SMA dengan kemampuan matematika tinggi, kemampuan matematika sedang dan kemampuan matematika rendah dalam pembuktian matematika pada materi trigonometri.

METODE

Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini yaitu pendekatan kualitatif dengan jenis penelitian deskriptif. Tujuan Penelitian ini untuk mendeskripsikan penalaran siswa dalam

pembuktian matematika pada materi trigonometri. Untuk sumber data dalam penelitian ini menggunakan siswa kelas X SMA semester genap tahun pelajaran 2022/2023.

Subjek yang digunakan ada tiga subjek yaitu siswa kemampuan matematika tinggi, siswa kemampuan matematika sedang dan siswa kemampuan matematika rendah. Siswa tersebut dipilih menggunakan nilai yang didapatkan dari tes kemampuan matematika. Nilai tes kemampuan matematika dianalisis dengan skala skor tes kemampuan yang telah dibuat.

Instrumen yang digunakan dalam penelitian ini ada dua yaitu instrumen utama dan instrumen pendukung. Instrumen utama menggunakan peneliti sendiri dan instrumen pendukung menggunakan Soal Tes Kemampuan Matematika (TKM), Soal Tes Penalaran dalam Pembuktian Matematika (TPM) dan Pedoman Wawancara. Tes kemampuan matematika bertujuan untuk menentukan subjek dalam penelitian ini. Soal tes kemampuan matematika terdapat 5 soal uraian yang berdasarkan level kognitif yang dibagi menjadi 3 yaitu pengetahuan dan pemahaman (level 1), aplikasi (level 2), dan penalaran (level 3). Penggolongan subjek dilakukan menggunakan skor tes kemampuan matematika dan acuan normatif standar deviasi yang diadaptasi dari Ebel & Frisbie (1991) yang dijelaskan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Kategori dan Skala Tes Kemampuan Matematika

Kategori Kemampuan Matematika	Interval
Tinggi	$x \geq \bar{x} + 0,5S$
Sedang	$\bar{x} - 0,5s \leq x < \bar{x} + 0,5S$
Rendah	$x < \bar{x} - 0,5S$

Keterangan:

x : Skor Tes Siswa

\bar{x} : Rata-rata skor semua siswa

S : Standar Deviasi

Untuk mendapatkan rata-rata skor dari semua siswa dihitung menggunakan rumus nilai rata-rata menurut Sugiyono (2013) sebagai berikut.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad (1)$$

Untuk mencari standar deviasi dapat menggunakan rumus menurut Sugiyono (2013) sebagai berikut.

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (2)$$

Keterangan:

x_i : Nilai x ke 1 sampai ke n

\bar{x} : Rata-rata skor semua siswa

S : Standar Deviasi

n : Jumlah sampel

Sesudah melakukan tes kemampuan matematika dan didapatkan tiga subjek dengan kemampuan matematika tinggi, sedang dan rendah sesuai kriteria akan mengikuti tes penalaran dalam pembuktian matematika. Tes penalaran dalam pembuktian matematika digunakan untuk mendeskripsikan penalaran dalam pembuktian matematika siswa pada materi trigonometri. tes penalaran dalam pembuktian matematika terdiri atas dua masalah

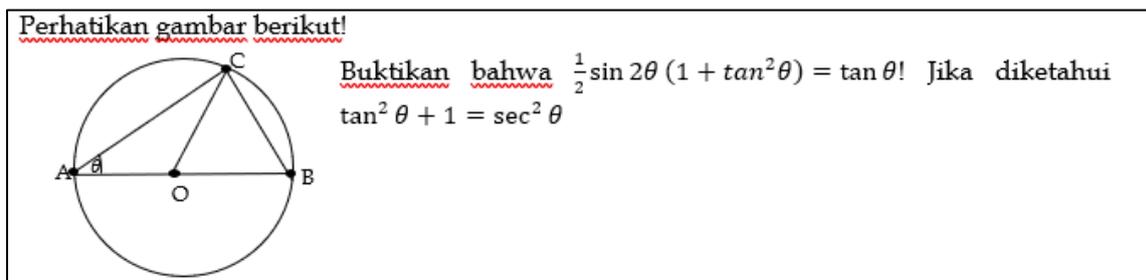
pembuktian yang berkaitan dengan materi trigonometri yang meliputi identitas trigonometri dan aturan sinus cosinus. Setelah ketiga subjek mengerjakan tes penalaran dalam pembuktian matematika, akan dilakukan wawancara berdasarkan pedoman wawancara yang telah disediakan dengan tujuan untuk mengkonfirmasi jawaban dan memperoleh informasi lebih lanjut dari lembar jawaban yang sudah siswa tuliskan.

Hasil tes penalaran dalam pembuktian matematika yang didapatkan siswa dari menyelesaikan masalah pembuktian matematika akan dianalisis berdasarkan indikator penalaran dalam pembuktian matematika yang telah dibuat oleh peneliti pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Indikator Penalaran dalam Pembuktian Matematika

No.	Tahapan Pemecahan Masalah Polya	Indikator Penalaran	Indikator Penalaran dalam Pembuktian
1.	Memahami masalah (<i>understanding the problem</i>)	1. Mengumpulkan fakta	a. Mengidentifikasi informasi yang diketahui secara eksplisit disertai dengan alasan yang logis (U1) b. Mengidentifikasi informasi yang diketahui secara implisit disertai dengan alasan yang logis (U2)
2.	Merencanakan penyelesaian (<i>devising a plan</i>)	2. Mengajukan dugaan	a. Menentukan rencana atau dugaan penyelesaian masalah pembuktian disertai dengan alasan yang logis (D1) b. Mengidentifikasi hubungan antara rencana yang digunakan untuk menyelesaikan masalah pembuktian disertai dengan alasan yang logis (D2)
3.	Melaksanakan rencana penyelesaian (<i>carrying out the plan</i>)	3. Melakukan manipulasi matematika 4. Menyusun pembuktian matematika disertai alasan	a. Melakukan manipulasi matematika pada masalah pembuktian disertai alasan yang logis (C1) b. Melaksanakan rencana penyelesaian pada masalah pembuktian disertai alasan yang logis (C2)
4.	Memeriksa kembali proses dan hasil (<i>looking back</i>)	5. Menarik kesimpulan dari penyelesaian masalah 6. Memeriksa kembali kebenaran penyelesaian masalah	a. Menarik kesimpulan dari penyelesaian masalah pembuktian disertai alasan yang logis (L1) b. Memeriksa kembali kebenaran penyelesaian masalah pembuktian disertai alasan yang logis (L2)

Untuk analisis data hasil wawancara dilakukan dengan tiga langkah yaitu reduksi data (*data reduction*), penyajian data (*display data*), dan penarikan kesimpulan (*conclusion*). Instrumen tes penalaran dalam pembuktian matematika yang digunakan untuk penelitian ini sebagai berikut.



Gambar 1. Masalah Pembuktian Trigonometri

Setelah subjek menyelesaikan tes penalaran dalam pembuktian, setiap subjek akan diwawancarai secara bergantian Untuk mempermudah penyajian data, dibuatlah kode wawancara pada Tabel 3 berikut.

Tabel 3. Kode Wawancara

Kode Wawancara	Keterangan
PTG-a	Percakapan/pertanyaan ke-a yang diberikan peneliti kepada subjek dengan kemampuan matematika tinggi.
PSD-a	Percakapan/pertanyaan ke-a yang diberikan peneliti kepada subjek dengan kemampuan matematika sedang.
PRD-a	Percakapan/pertanyaan ke-a yang diberikan peneliti kepada subjek dengan kemampuan matematika rendah.
TG-a	Jawaban terhadap percakapan/pertanyaan ke-a oleh subjek dengan kemampuan matematika tinggi kepada peneliti.
SD-a	Jawaban terhadap percakapan/pertanyaan ke-a oleh subjek dengan kemampuan matematika sedang kepada peneliti.
RD-a	Jawaban terhadap percakapan/pertanyaan ke-a oleh subjek dengan kemampuan matematika rendah kepada peneliti.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebanyak 28 siswa kelas X SMA Islam Insan Cendekia Baitul Izzah Nganjuk diberikan Tes Kemampuan Matematika sehingga diperoleh 9 siswa dengan kemampuan matematika tinggi, 7 siswa dengan kemampuan matematika sedang dan 12 siswa dengan kemampuan matematika rendah. Kemudian dipilih 1 siswa yang memiliki skor tertinggi dari masing-masing kategori, memiliki komunikasi yang baik dan memiliki jenis kelamin yang sama sehingga didapatkan 3 subjek penelitian yaitu 1 siswa kemampuan matematika tinggi, 1 siswa kemampuan matematika sedang dan 1 siswa kemampuan matematika rendah. Berikut daftar 3 siswa yang terpilih melalui tes kemampuan matematika.

Tabel 4. Subjek Terpilih

Inisial Subjek	Jenis Kelamin	Kemampuan Matematika	Nilai TKM	Kode
NZP	Perempuan	Tinggi	98	TG
IKA	Perempuan	Sedang	52	SD
AA	Perempuan	Rendah	34	RD

Selanjutnya ketiga siswa tersebut diberikan tes penalaran dalam pembuktian matematika.

Hasil analisis data terkait penalaran siswa dengan kemampuan matematika tinggi, sedang dan rendah dalam pembuktian matematika pada materi trigonometri disajikan dalam bentuk deskripsi sebagai berikut.

Penalaran Siswa dengan Kemampuan Matematika Tinggi dalam Pembuktian Matematika pada Materi Trigonometri

Memahami Masalah (Understanding the Problem)

Diket =	$AO = 1 \text{ satuan}$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$
	$CO = 1 \text{ satuan}$	$\angle BAC = \theta$
	$BO = 1 \text{ satuan}$	$\angle BOC = 2\theta$

Gambar 2. Penyelesaian TG dalam Memahami Masalah

Dari Gambar 2 TG menuliskan informasi dari masalah pembuktian terdapat informasi yang kurang lengkap yaitu besar sudut C dan panjang AB tetapi TG dalam mengidentifikasi informasi yang diketahui secara eksplisit dari masalah pembuktian disertai alasan yang ditunjukkan pada transkrip wawancara berikut.

PTG-1 : "Apa yang diketahui dari soal tersebut?"

TG-1 : "Panjang jari-jari lingkaran yang berpusat di O yaitu 1 satuan, sehingga AO, OC, OB panjangnya 1 satuan. Panjang AB = 2 satuan, sudut C yaitu 90° , sudut A yaitu θ dan sudut O yaitu 2θ serta $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ ".

Dari transkrip wawancara di atas TG melengkapi informasi yang diketahui dari masalah pembuktian disertai alasan yang logis. TG juga menyebutkan informasi yang diketahui secara implisit disertai alasan yang logis seperti ditunjukkan pada transkrip wawancara berikut.

PTG-2 : "Kamu mendapatkan panjang AB = 2 satuan darimana?"

TG-2 : "Panjang AB = 2 satuan karena OB merupakan jari-jari lingkaran yang panjangnya 1 satuan dan AB merupakan diameter lingkaran maka $AB = 2 \times OB$ ".

PTG-3 : "Untuk sudut C yaitu 90° darimana?"

TG-3 : "Karena sudut C menghadap diameter lingkaran"

PTG-4 : "Lalu untuk sudut O yaitu 2θ darimana?"

TG-4 : "Karena sudut A merupakan sudut keliling dan sudut O merupakan sudut pusat yang menghadap busur yang sama maka sudut O $2 \times$ sudut A.

Dari transkrip wawancara di atas TG menjelaskan bahwa $AB = 2$ satuan disertai alasan karena diameter lingkaran, sudut C = 90° karena menghadap diameter lingkaran dan sudut O = 2θ karena sifat sudut pusat dan sudut keliling.

Berdasarkan uraian di atas TG mengidentifikasi informasi yang diketahui secara eksplisit (U1) dan implisit (U2) disertai alasan yang logis.

Merencanakan Penyelesaian (Devising a Plan)

Rencana =	• menggunakan perbandingan trigonometri
	• menggunakan konsep sudut pusat dan keliling
	• menggunakan konsep sinus atau sin

Gambar 3. Penyelesaian TG dalam Merencanakan Penyelesaian

Dari gambar 2, TG menuliskan rencana yang akan digunakan untuk menyelesaikan masalah pembuktian secara jelas. TG menyebutkan rencana yang akan digunakan dan menjelaskan hubungan antar konsep yang digunakan secara jelas disertai alasan yang logis. Hal tersebut ditunjukkan melalui transkrip wawancara berikut.

PTG-5 : "Apakah terdapat hubungan antar konsep yang kamu gunakan?"

TG-5 : "Ada mbak, sudut keliling dan sudut pusat untuk menentukan titik O, terus saya gunakan perbandingan trigonometri untuk mencari sisi-sisi segitiga dan untuk aturan sinus nanti membutuhkan sisi-sisi segitiga"

Dari wawancara di atas TG menyebutkan hubungan antar konsep yang digunakan dengan alasan yang jelas dan logis. Selain itu TG juga menyebutkan alasan memilih rencana penyelesaian yang digunakan secara jelas disertai alasan yang logis. Hal tersebut ditunjukkan melalui transkrip wawancara berikut.

PTG-6 : "Kamu menggunakan perbandingan trigonometri untuk apa?"

TG-6 : "Untuk mencari sisi AC dan CB"

PTG-7 : "Sisi-sisi yang kamu ketahui nanti akan digunakan untuk apa?"

TG-7 : "Aturan sinus mbak"

PTG-8 : "Aturan sinu kamu gunakan untuk apa?"

TG-8 : "Untuk mencari bentuk lain dari $\sin 2\theta$ "

PTG-9 : "Terus selanjutnya apa?"

TG-9 : "Mengganti $\sin 2\theta$ ke pembuktian $\frac{1}{2} \sin 2\theta (1 + \tan^2 \theta)$ "

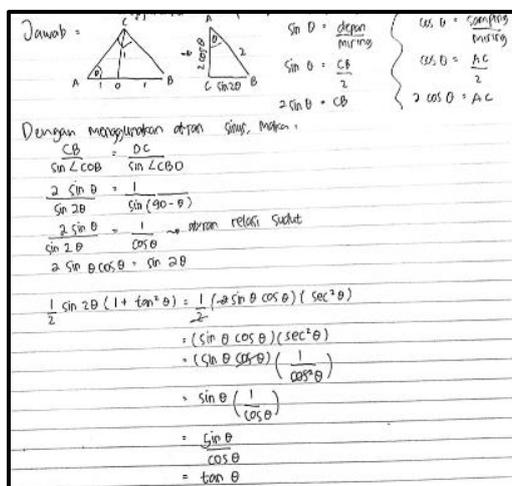
PTG-10 : "Kenapa mencari $\sin 2\theta$?"

TG-10 : "Karena menurut saya untuk menyelesaikan $\frac{1}{2} \sin 2\theta (1 + \tan^2 \theta)$ saya perlu menemukan bentuk lain $\sin 2\theta$ dan $1 + \tan^2 \theta$ yang sudah diketahui dari soal sehingga saya mencari $\sin 2\theta$ yang belum diketahui dari soal."

Dari wawancara di atas TG menyebutkan menggunakan perbandingan trigonometri untuk mencari sisi segitiga yang belum diketahui yang akan digunakan untuk aturan sinus, aturan sinus sendiri untuk mencari bentuk lain $\sin 2\theta$ yang nantinya diganti ke pembuktian $\frac{1}{2} \sin 2\theta (1 + \tan^2 \theta)$ dengan alasan untuk menyelesaikan pembuktian perlu menemukan bentuk lain dari $\sin 2\theta$ dan $1 + \tan^2 \theta$.

Berdasarkan uraian di atas TG menentukan rencana penyelesaian masalah pembuktian (D1) dan mengidentifikasi hubungan antara rencana yang digunakan untuk menyelesaikan masalah pembuktian (D2) dan disertai alasan yang logis.

Melaksanakan Rencana Penyelesaian (Carrying Out the Plan)



Gambar 4. Penyelesaian TG dalam Melaksanakan rencana penyelesaian

Dari Gambar 4, TG menuliskan penyelesaian masalah pembuktian sesuai dengan rencana awal yaitu menggunakan perbandingan trigonometri untuk mendapatkan panjang

CB dan AC, selanjutnya TG menjelaskan alasan dari penyelesaian masalah tersebut disertai alasan yang logis. Hal tersebut ditunjukkan melalui transkrip wawancara berikut.

PTG-11 : "Kamu menggunakan rumus apa untuk perbandingan trigonometri itu?"

TG-11 : " $\sin \theta = \frac{\text{depan}}{\text{miring}}$, $\cos \theta = \frac{\text{samping}}{\text{miring}}$ "

PTG-12 : "Darimana kamu menamai depan, samping dan miring?"

TG-12 : "Depan itu maksudnya sisi depannya sudut θ , samping maksudnya sisi sampingnya sudut θ dan miring maksudnya sisi miring pada segitiga siku-siku tersebut."

PTG-13 : "Disitu $\sin \theta = \frac{CB}{2}$ darimana?"

TG-13 : "CB itu sisi depannya sudut θ dan 2 itu panjang AB"

Dari transkrip wawancara di atas TG menyebutkan rumus perbandingan trigonometri $\sin \theta = \frac{\text{depan}}{\text{miring}}$, $\cos \theta = \frac{\text{samping}}{\text{miring}}$ dan menerapkannya pada masalah pembuktian untuk mencari sisi-sisi dalam segitiga tersebut. Selanjutnya TG menggunakan aturan sinus pada segitiga OCB yang ditunjukkan melalui transkrip wawancara berikut.

PTG-14 : "Kamu menggunakan rumus apa untuk aturan sinus?"

TG-14 : " $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ "

PTG-15 : "Dilembar jawaban kamu menuliskan $\frac{CB}{\sin \angle COB} = \frac{OC}{\sin \angle CBO}$ darimana?"

TG-15 : "CB adalah sisi yang berada di depan sudut COB, sedangkan OC adalah sisi yang berada di depan sudut CBO maka pernyataan tersebut dapat diperbandingkan"

PTG-16 : "Aturan sinus kamu gunakan untuk apa?"

TG-16 : "Untuk mencari nilai $\sin 2\theta$, yang akan saya gunakan untuk menyelesaikan pembuktian $\frac{1}{2} \sin 2\theta (1 + \tan^2 \theta) = \tan \theta$ "

Dari transkrip wawancara di atas TG menyebutkan rumus aturan sinus yaitu $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ dan menerapkannya dalam masalah pembuktian. Untuk mencari nilai $\sin 2\theta$, yang akan TG gunakan untuk menyelesaikan pembuktian $\frac{1}{2} \sin 2\theta (1 + \tan^2 \theta) = \tan \theta$. Dalam menyelesaikan masalah pembuktian TG melakukan manipulasi matematika disertai alasan yang logis. Hal tersebut ditunjukkan pada transkrip wawancara berikut.

PTG-17 : "Dari $\frac{1}{\sin(90-\theta)}$ kenapa bisa menjadi $\frac{1}{\cos \theta}$?"

TG-17 : "Karena menggunakan aturan relasi sudut, yaitu $\sin(90 - \theta) = \cos \theta$ "

PTG-18 : "Selanjutnya itu kenapa $\sec^2 \theta$ bisa kamu rubah menjadi $\frac{1}{\cos^2 \theta}$?"

TG-18 : "Karena $\sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ berdasarkan materi yang pernah saya gunakan"

PTG-19 : "Disitu kenapa $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ bisa menjadi $\tan \theta$?"

TG-19 : "Karena materi yang sudah saya dapatkan dan agar sesuai dengan yang diminta untuk dibuktikan."

Dari transkrip wawancara di atas TG melakukan manipulasi matematika dengan menggunakan aturan relasi sudut dan identitas trigonometri yang pernah didapatkan. TG melaksanakan penyelesaian sesuai dengan rencana awal. Hal tersebut ditunjukkan dalam transkrip wawancara berikut.

PTG-20 : "Apakah kamu melaksanakan langkah penyelesaian sesuai dengan rencana awal kamu?"

TG-20 : "Iya, saya sudah melaksanakan penyelesaian sesuai dengan rencana awal"

Berdasarkan uraian di atas TG melakukan manipulasi pada masalah pembuktian disertai alasan yang logis (C1) dan melaksanakan rencana penyelesaian pada masalah

pembuktian disertai alasan yang logis (C2) serta TG melaksanakan rencana penyelesaian sesuai dengan rencana awal.

Memeriksa Kembali Proses dan Hasil (Looking Back)

Jadi, terbukti bahwa $\frac{1}{2} \sin 2\theta (1 + \tan^2 \theta) = \tan \theta$

Gambar 5. Penyelesaian TG dalam Memeriksa Kembali Proses dan Hasil

Dari gambar 4, TG menuliskan kesimpulan yang didapatkan dari penyelesaian masalah pembuktian. TG juga memeriksa kembali proses dan hasil penyelesaiannya disertai alasan yang logis. Hal tersebut ditunjukkan dalam transkrip wawancara berikut.

PTG-21 : "Apakah setelah selesai kamu memeriksa kembali pekerjaan kamu?"

TG-21 : "Iya"

PTG-22 : "Terus bagaimana cara kamu memeriksanya?"

TG-22 : "Membaca soal apakah penyelesaian dari saya sudah sesuai dengan yang dimaksud soal, mengecek rencana awal saya dan mengecek perhitungan saya juga apakah sudah tepat atau belum."

Dari transkrip wawancara di atas TG memeriksa kembali proses dan hasil dengan mengecek dari awal yaitu mulai dari masalah pembuktian, rencana awal, perhitungan dan kesimpulan sehingga didapatkan pembuktian yang sesuai.

Berdasarkan uraian di atas TG menarik kesimpulan dari penyelesaian masalah pembuktian disertai alasan yang logis (L1) dan memeriksa kembali proses dan hasil dari penyelesaian masalah pembuktian disertai alasan yang logis (L2).

Penalaran Siswa dengan Kemampuan Matematika Sedang dalam Pembuktian Matematika pada Materi Trigonometri

Memahami Masalah (Understanding the Problem)

s. Diketahui : $\cdot AO = OB = OC = 1$
 $AO + OB = 2$
 $\cdot \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

Gambar 6. Penyelesaian SD dalam Memahami Masalah

Dari Gambar 6, SD menuliskan informasi yang kurang lengkap yaitu tidak menyebutkan sudut A, C dan O serta tidak menyebutkan Panjang AB hanya menyebutkan $AO + OB = 2$. Tetapi SD menjelaskan dengan lengkap dalam wawancara. Hal tersebut ditunjukkan dalam transkrip wawancara berikut.

PSD-1 : "Apa yang diketahui dari soal tersebut?"

SD-1 : "Yang diketahui dari soal ini yaitu jari-jari menuju pusat memiliki nilai 1. $AO = OB = OC = 1$. Sama seperti nomor 1 diketahui sudut $A = \theta$ maka sudut $O = 2\theta$ dan disini juga diketahui bahwa $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ "

Dari transkrip wawancara di atas SD melengkapi informasi yang diketahui secara eksplisit dari masalah pembuktian disertai alasan yang logis. SD juga menyebutkan informasi yang diketahui secara implisit dari masalah pembuktian tidak disertai alasan yang logis pada beberapa pernyataan seperti ditunjukkan pada transkrip wawancara berikut.

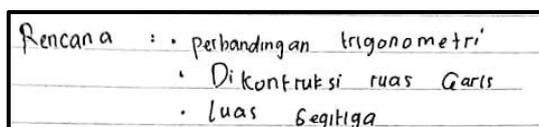
PSD-2 : "Di lembar jawaban kamu tuliskan bahwa $\angle C = 90^\circ$ itu dari mana?"

- SD-2 : "Jadi di dalam segitiga siku-siku sudah pasti memiliki sudut siku-siku yang nilainya 90° dan itu berada di sudut terbesar yang ditempati oleh sudut C"
- PSD-3 : "Kamu tau dari mana bahwa segitiga ABC merupakan segitiga siku-siku?"
- SD-3 : "Bentuknya segitiga siku-siku jika dimiringkan"
- PSD-4 : "Iya, kenapa kamu yakin bahwa segitiga tersebut siku-siku?"
- SD-4 : "Bingung mbak"

Dari cuplikan wawancara di atas SD menyebutkan bahwa sudut $C = 90^\circ$ karena sudut C di dalam segitiga siku-siku yang merupakan sudut terbesar yaitu 90° . SD mengetahui bahwa segitiga ABC siku-siku karena bentuknya ketika dimiringkan seperti segitiga siku-siku.

Berdasarkan uraian di atas SD mengidentifikasi informasi yang diketahui secara eksplisit dari masalah pembuktian (U1) disertai alasan yang logis dan informasi yang diketahui secara implisit dari masalah pembuktian (U2) yang tidak disertai alasan yang logis pada beberapa pernyataan.

Merencanakan Penyelesaian (Devising a Plan)



Gambar 7. Penyelesaian SD dalam Merencanakan Penyelesaian

Dari Gambar 7, SD menuliskan rencana yang akan digunakan untuk menyelesaikan masalah pembuktian. SD menyebutkan kembali rencana yang akan digunakan pada saat wawancara dengan jelas dan menjelaskan hubungan antar konsep yang digunakan disertai alasan yang logis. Hal tersebut ditunjukkan melalui transkrip wawancara berikut.

- PSD-5 : "Apakah terdapat hubungan antar konsep yang kamu gunakan?"
- SD-5 : "Ada mbak, seperti perbandingan trigonometri saya gunakan untuk menentukan sisi-sisi segitiga, lalu setelah sisinya ketemu akan saya gunakan untuk mencari luas segitiga, dan saya mengkonstruksi CD untuk tinggi segitiga."

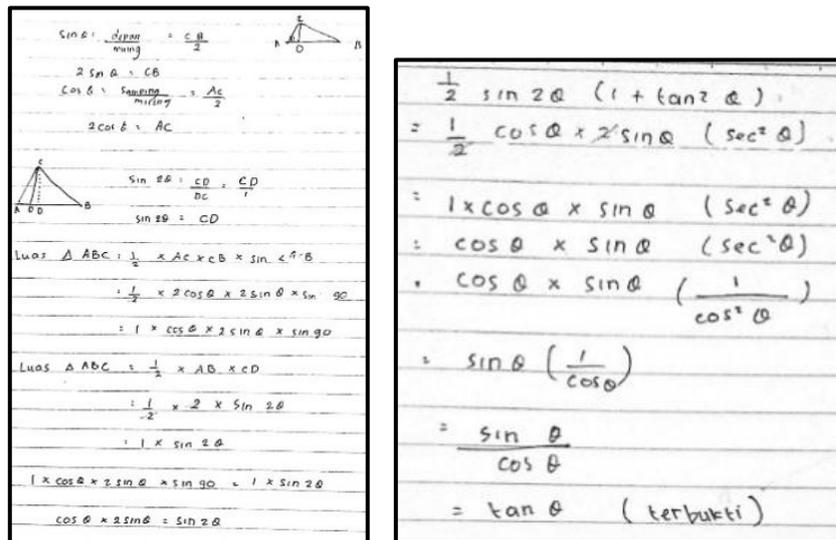
Dari wawancara di atas SD menyebutkan hubungan antar konsep yang digunakan dengan alasan yang jelas dan logis. Selain itu SD juga menyebutkan alasan menggunakan rencana penyelesaian secara jelas tetapi tidak disertai alasan yang logis pada beberapa pernyataan. Hal tersebut ditunjukkan melalui transkrip wawancara berikut.

- PSD-6 : "Kamu menggunakan rumus apa untuk mencari luas segitiga?"
- SD-6 : " $\frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$?"
- PSD-7 : "Siapa yang menjadi alas dan tinggi?"
- SD-7 : "Yang menjadi alas yaitu sisi AC dan tinggi sisi BC"
- PSD-8 : "Bagaimana kamu menentukan?"
- SD-8 : "Tadi kan segitiga ABC dimiringkan jadi yang bawah sisi AC, yang tinggi sisi BC dan miringnya sisi AB"
- PSD-9 : "Apakah kamu hanya menyelesaikan dengan menggunakan rumus segitiga itu?"
- SD-9 : "Tidak, saya juga menggunakan rumus luas segitiga ABC yaitu $\frac{1}{2} \times AC \times CB \times \sin \angle ACB$ "
- PSD-10 : "Apakah rumus itu hanya digunakan untuk segitiga siku-siku?"
- SD-10 : "Tidak kayaknya mbak, untuk semua segitiga"
- PSD-11 : "Apakah kamu yakin?"
- SD-11 : "Kurang tau mbak bingung pokok itu merupakan cara mencari luas segitiga"

Dari wawancara di atas SD menyebutkan menggunakan luas segitiga dengan 2 rumus yaitu $\frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$ dan $\frac{1}{2} \times AC \times CB \times \sin \angle ACB$ dengan alasan untuk mencari bentuk lain $\sin 2\theta$ yang nantinya diganti ke pembuktian $\frac{1}{2} \sin 2\theta (1 + \tan^2 \theta)$. Tetapi ketika ditanya apakah rumus itu hanya digunakan untuk segitiga siku-siku SD bingung menjawabnya.

Berdasarkan uraian di atas SD menentukan rencana penyelesaian masalah pembuktian tidak disertai alasan yang logis pada beberapa pernyataan (D1) dan mengidentifikasi hubungan antara rencana yang digunakan untuk menyelesaikan masalah pembuktian disertai alasan yang logis (D1).

Melaksanakan Rencana Penyelesaian (Carrying Out the Plan)



Gambar 8. Penyelesaian SD dalam Melaksanakan Rencana Penyelesaian

Dari Gambar 8, SD menuliskan penyelesaian masalah pembuktian sesuai dengan rencana awal yaitu menggunakan perbandingan trigonometri untuk mendapatkan panjang CB , AC , CD dan OD , selanjutnya SD menjelaskan alasan dari penyelesaian masalah tersebut disertai alasan yang logis. Hal tersebut ditunjukkan melalui transkrip wawancara berikut.

PSD-12 : "Kamu menggunakan rumus apa untuk perbandingan trigonometri itu?"

SD-12 : " $\sin \theta = \frac{\text{depan}}{\text{miring}}$, $\cos \theta = \frac{\text{samping}}{\text{miring}}$ "

PSD-13 : "Darimana kamu menentukan depan, samping dan miring?"

SD-13 : "Depan karena depannya sudut, samping karena sampingnya sudut dan miring karena sisi miring."

PSD-14 : "Dari mana kamu dapatkan itu?"

SD-14 : "Dari materi sebelumnya mbak"

PSD-15 : "Terus kenapa kamu mencari Panjang AC , CB dan CD ?"

SD-15 : "Untuk mencari luas segitiga."

Dari transkrip wawancara di atas SD menyebutkan rumus perbandingan trigonometri $\sin \theta = \frac{\text{depan}}{\text{miring}}$, $\cos \theta = \frac{\text{samping}}{\text{miring}}$ dan menerapkan pada masalah pembuktian untuk mencari sisi-sisi dalam segitiga tersebut yang akan digunakan untuk mencari luas segitiga. Selanjutnya SD menggunakan luas segitiga untuk mencari $\sin 2\theta$ tetapi tidak disertai alasan yang logis pada beberapa pernyataan yang ditunjukkan melalui transkrip wawancara berikut.

- PSD-16 : "Tadi kamu menggunakan 2 luas segitiga yang berbeda, lalu akan kamu gimanakan?"
 SD-16 : "Nanti saya akan mencari luas segitiga dengan 2 cara lalu akan saya sama dengankan"
 PSD-17 : "Gimana cara kamu sama dengankan?"
 SD-17 : "Pokok saya sama dengankan mbak, karena menurut saya nilai luasnya sama mbak"
 PSD-18 : "Dari mana kamu menentukan bahwa kedua segitiga tersebut memiliki nilai luas yang sama?"
 SD-18 : "Gak tau mbak bingung"

Dari transkrip wawancara di atas SD menyebutkan menggunakan 2 rumus segitiga yang akan disama dengankan karena kedua rumus tersebut nilai luasnya sama tetapi SD tidak memberikan alasan. Dalam menyelesaikan masalah pembuktian SD melakukan manipulasi matematika disertai alasan yang logis. Hal tersebut ditunjukkan pada transkrip wawancara berikut.

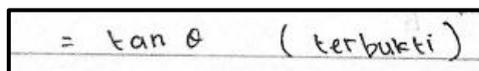
- PSD-19 : "Lalu $1 + \tan^2 \theta$ kenapa bisa berubah menjadi $\sec^2 \theta$?"
 SD-19 : "Tadi dari soal mbak"
 PSD-20 : "Terus kenapa dibawahnya berubah kembali menjadi $\frac{1}{\cos^2 \theta}$?"
 SD-20 : "Saya pernah dapat $\sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ "
 PSD-21 : "Terus kenapa hasil akhir kamu menjadi $\tan \theta$?"
 SD-21 : "Karena berdasarkan identitas trigonometri $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$ "

Dari transkrip wawancara di atas SD melakukan manipulasi matematika dengan menggunakan identitas trigonometri yaitu $\sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ dan $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$ yang pernah didapatkan. SD melaksanakan penyelesaian sesuai dengan rencana awal. Hal tersebut ditunjukkan dalam transkrip wawancara berikut.

- PSD-22 : "Apakah kamu melaksanakan rencana dengan rencana awal kamu?"
 SD-22 : "Iya, saya sudah melaksanakan penyelesaian sesuai dengan rencana awal"

Berdasarkan uraian di atas SD melakukan manipulasi pada masalah pembuktian disertai alasan yang logis (C1) dan melaksanakan rencana penyelesaian pada masalah pembuktian tetapi tidak disertai alasan yang logis pada beberapa pernyataan (C2) serta SD melaksanakan rencana penyelesaian sesuai dengan rencana awal.

Memeriksa Kembali Proses dan Hasil (Looking Back)



$$= \tan \theta \quad (\text{ terbukti })$$

Gambar 9. Penyelesaian SD dalam Memeriksa Kembali Proses dan Hasil

Dari gambar 8, SD tidak menuliskan kesimpulan yang didapatkan secara lengkap, SD hanya menuliskan bahwa masalah pembuktian sudah terbukti. Tetapi SD melengkapi kesimpulan melalui wawancara. SD juga memeriksa kembali proses dan hasil penyelesaiannya disertai alasan yang logis. Hal tersebut ditunjukkan dalam transkrip wawancara berikut.

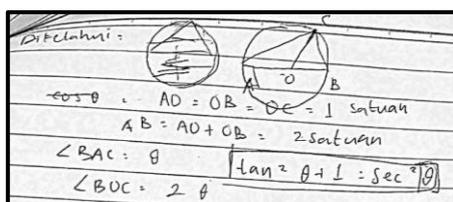
- PSD-23 : "Kamu kan sudah menyelesaikan soal ini, jadi kesimpulan apa yang kamu dapatkan untuk soal ini?"
 SD-23 : "Kesimpulan saya untuk soal nomor 2 terbukti bahwa $\frac{1}{2} \sin 2\theta (1 + \tan^2 \theta) = \tan \theta$ "
 PSD-24 : "Bagaimana cara kamu memeriksanya?"
 SD-24 : "Mencoba untuk mengecek perhitungan dari awal."
 PSD-25 : "Berarti kamu hanya mengecek perhitungan untuk rencana dan yang diketahui tidak kamu cek?"
 SD-25 : "Tidak, karena saya sudah sesuai dengan rencana awal"

Dari transkrip wawancara di atas SD menyebutkan kesimpulan dari masalah pembuktian yaitu $\frac{1}{2} \sin 2\theta (1 + \tan^2 \theta) = \tan \theta$. SD juga memeriksa kembali proses dan hasil dengan mengecek perhitungannya saja karena SD sudah melaksanakan penyelesaian sesuai dengan rencana awal sehingga tidak perlu di cek kembali apa yang diketahui dan rencana penyelesaian.

Berdasarkan uraian di atas SD menarik kesimpulan dari penyelesaian masalah pembuktian disertai alasan yang logis (L1) dan memeriksa kembali proses dan hasil dari penyelesaian masalah pembuktian disertai alasan yang logis meskipun hanya perhitungan saja (L2).

Penalaran Siswa dengan Kemampuan Matematika Rendah dalam Pembuktian Matematika pada Materi Trigonometri

Memahami Masalah (Understanding the Problem)



Gambar 10. Penyelesaian RD dalam Memahami Masalah

Dari Gambar 10, RD menuliskan informasi yang kurang lengkap yaitu tidak menyebutkan sudut ACB. Tetapi RD melengkapi informasi tersebut pada saat wawancara. Hal tersebut ditunjukkan dalam transkrip wawancara berikut.

PRD-1 : "Apa yang diketahui dari soal tersebut?"

RD-1 : "Panjang jari-jari lingkaran yang berpusat di O sebesar 1 satuan maka $AO = OB = OC = 1$ satuan. Disini juga diketahui bahwa $\angle BAC = \theta$ yang tertera dalam soalnya, dan $\angle BOC = 2\theta$ serta $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ "

Dari transkrip wawancara di atas RD melengkapi informasi yang diketahui secara eksplisit dari masalah pembuktian disertai alasan yang logis. RD juga menyebutkan informasi yang diketahui secara implisit dari masalah pembuktian tidak disertai alasan yang logis pada beberapa pernyataan seperti ditunjukkan pada transkrip wawancara berikut.

PRD-2 : "Di lembar jawaban kamu tuliskan bahwa $\angle BOC = 2\theta$ itu dari mana?"

RD-2 : "Karena sudut A besarnya θ maka sudut O $2 \times \theta$ sehingga menjadi 2θ "

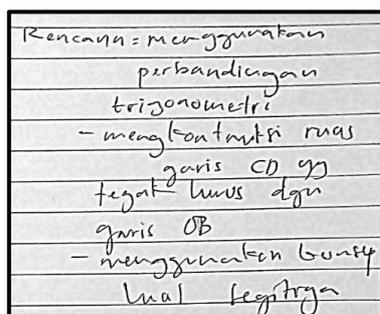
PRD-3 : "Kenapa kamu mengalikan 2?"

RD-3 : "Gak tau mbak saya berfikir jika $\angle A = \theta$ maka $\angle O = 2 \times \theta$ "

Dari cuplikan wawancara di atas RD menyebutkan bahwa $\angle BOC = 2\theta$ karena sudut A besarnya θ maka sudut O $2 \times \theta$ sehingga menjadi 2θ . SD mengalikan 2 karena itu merupakan cara yang terfikirkan RD bahwa $\angle A = \theta$ maka $\angle O = 2 \times \theta$.

Berdasarkan uraian di atas RD mengidentifikasi informasi yang diketahui secara eksplisit dari masalah pembuktian (U1) disertai alasan yang logis dan informasi yang diketahui secara implisit dari masalah pembuktian (U2) tidak disertai alasan yang logis pada beberapa pernyataan.

Merencanakan Penyelesaian (Devising a Plan)



Gambar 11. Penyelesaian RD dalam Merencanakan Penyelesaian

Dari Gambar 11, RD menuliskan rencana yang akan digunakan untuk menyelesaikan masalah pembuktian secara jelas. RD menyebutkan kembali rencana yang akan digunakan pada saat wawancara dengan jelas dan menjelaskan hubungan antar konsep yang digunakan disertai alasan yang logis. Hal tersebut ditunjukkan melalui transkrip wawancara berikut.

PRD-4 : "Apakah terdapat hubungan antar konsep yang kamu gunakan?"

RD-4 : "Ada mbak, perbandingan trigonometri saya gunakan untuk mencari sisi-sisi segitiga, lalu setelah sisinya ketemu akan saya gunakan untuk mencari luas segitiga, dan saya mengkonstruksi CD yang tegak lurus dengan garis OB."

Dari wawancara di atas RD menyebutkan hubungan antar konsep yang digunakan dengan alasan yang jelas dan logis. Selain itu RD juga menyebutkan rencana penyelesaian yang digunakan secara jelas tetapi tidak disertai alasan yang logis pada beberapa pernyataan. Hal tersebut ditunjukkan melalui transkrip wawancara berikut.

PRD-5 : "Kenapa kamu menggunakan konsep luas segitiga?"

RD-5 : "Karena yang terpikirkan oleh saya"

PRD-6 : "Kamu nanti menggunakan segitiga apa?"

RD-6 : "Segitiga ABC"

PRD-7 : "Dari luas segitiga untuk mendapatkan apa?"

RD-7 : "Untuk mendapatkan nilai $\sin 2\theta$ "

Dari wawancara di atas RD menyebutkan menggunakan luas segitiga karena yang terpikirkan oleh RD dan untuk mencari bentuk lain $\sin 2\theta$ yang nantinya diganti ke pembuktian $\frac{1}{2} \sin 2\theta (1 + \tan^2 \theta)$.

Berdasarkan uraian di atas RD menentukan rencana penyelesaian masalah pembuktian tidak disertai alasan yang logis pada beberapa pernyataan (D1) dan mengidentifikasi hubungan antara rencana yang akan digunakan dalam menyelesaikan masalah pembuktian disertai alasan yang logis.

Melaksanakan Rencana Penyelesaian (Carrying Out the Plan)

The image shows two columns of handwritten mathematical work. The left column contains the following steps:

$$\sin \theta = \frac{CB}{AB} = \frac{CB}{2} \rightarrow CB = 2 \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{2} \rightarrow AC = 2 \cos \theta$$

$$\sin 2\theta = \frac{CD}{OC} = \frac{CD}{1} \rightarrow CD = \sin 2\theta$$

$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times AC \times CB \times \sin \angle ACB$$

$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times AB \times CD$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2$$

$$= 2$$

The right column contains the following steps:

$$\text{Luas } \triangle ABC = \text{Luas } \triangle ABC$$

$$\frac{1}{2} \times AC \times CB \times \sin \angle ACB = \frac{1}{2} \times AB \times CD$$

$$\cos \theta \times 2 \sin \theta \times 1 = \sin 2\theta$$

$$\sin 2\theta = \cos \theta \times 2 \sin \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\sec \theta$$

Gambar 12. Penyelesaian RD dalam Melaksanakan rencana penyelesaian

Dari Gambar 12, RD menuliskan penyelesaian masalah pembuktian pada rencana pertama sesuai dengan rencana awal yaitu menggunakan perbandingan trigonometri, untuk rencana kedua RD menuliskan mencari luas segitiga ABC dengan menggunakan 2 rumus selanjutnya RD menggabungkan kedua rumus tersebut dan berhenti karena bingung. Hal tersebut ditunjukkan melalui transkrip wawancara berikut.

PRD-8 : "Setelah perbandingan trigonometri kamu mencari apa?"

RD-8 : "mencari luas segitiga ABC"

PRD-9 : "menggunakan rumus apa?"

RD-9 : "Rumus $L = \frac{1}{2} \times AC \times CB \times \sin \angle ACB$ dan $L = \frac{1}{2} \times AB \times CD$ "

PRD-10 : "Kenapa kamu menggunakan 2 rumus segitiga?"

SD-14 : "Nanti akan saya sama dengankan"

PSD-15 : "Kenapa begitu?"

SD-15 : "saya terpikirknya begitu."

Dari transkrip wawancara di atas RD menyebutkan menggunakan 2 rumus untuk mencari luas segitiga ABC yaitu $L = \frac{1}{2} \times AC \times CB \times \sin \angle ACB$ dan $L = \frac{1}{2} \times AB \times CD$. Selanjutnya RD menggabungkan kedua rumus tersebut dengan alasan cara yang terpikirkan RD. RD juga melakukan manipulasi matematika pada penyelesaian masalah pembuktian tetapi tidak disertai alasan yang logis pada beberapa pernyataan yang ditunjukkan melalui transkrip wawancara berikut.

PRD-16 : "Kenapa $\frac{1}{2}$ kamu dicoret?"

RD-16 : "Karena beda ruas"

PRD-17 : "Terus kenapa itu dibawah berubah menjadi $\sin \angle ABC$?"

RD-17 : "Oh iya keliru nulis harusnya $\sin \angle ACB$ "

PRD-18 : "Terus itu darimana $AB \times CD$ hasilnya $\sin 2\theta$?"

RD-18 : "Pada tahap itu saya sudah bingung"

Dari transkrip wawancara di atas RD menyebutkan mencoret $\frac{1}{2}$ karena beda ruas setelah kedua rumus luas segitiga digabung, setelah itu RD bingung dalam manipulasi matematika yang akan dilakukan karena dia tidak bisa menyelesaikan masalah pembuktian.

Berdasarkan uraian di atas RD melakukan manipulasi pada sebagian penyelesaian masalah pembuktian tidak disertai alasan yang logis (C1) dan melaksanakan rencana penyelesaian pada masalah pembuktian tetapi tidak disertai alasan yang logis pada beberapa pernyataan (C2). RD menyebutkan menggunakan rumus luas segitiga tetapi

bingung melanjutkan penyelesaian sehingga RD tidak bisa menyelesaikan masalah pembuktian.

Memeriksa Kembali Proses dan Hasil (Looking Back)

Pada tahap memeriksa kembali proses dan hasil RD tidak mendapatkan kesimpulan dan tidak memeriksa kembali proses dan hasil. Hal tersebut ditunjukkan melalui transkrip wawancara berikut.

PRD-18: "Apakah kamu mendapatkan kesimpulan untuk nomor soal ini?"

RD-18 : "Tidak, karena langkah saya tidak selesai dan saya sudah bingung"

PRD-19: "Apakah kamu memeriksa penyelesaian kamu?"

RD-19 : "Tidak saya periksa karena saya belum menyelesaikan soal ini"

Dari transkrip wawancara di atas RD tidak mendapatkan kesimpulan dari penyelesaian yang dilakukan karena langkah penyelesaian RD belum selesai dan RD sudah bingung untuk melanjutkan. RD juga tidak memeriksa kembali pengerjaan dengan alasan karena RD belum menyelesaikan masalah pembuktian tersebut.

Berdasarkan uraian di atas RD tidak menemukan kesimpulan dari masalah pembuktian dan tidak memeriksa kembali proses dan hasil penyelesaian masalah pembuktian karena tidak bisa menyelesaikan masalah pembuktian.

Pembahasan

Secara keseluruhan ketiga subjek memiliki penyelesaian yang berbeda. Untuk siswa kemampuan matematika tinggi dan sedang dapat mengerjakan masalah pembuktian sedangkan siswa rendah tidak dapat mengerjakan masalah pembuktian.

Ketiga siswa cenderung memiliki kesamaan dalam aktivitas memahami masalah dan merencanakan penyelesaian. Ketiga siswa memahami masalah dengan mengidentifikasi dan menjelaskan informasi yang diketahui secara eksplisit dari masalah pembuktian pada saat wawancara serta mengidentifikasi informasi yang diketahui secara implisit dari masalah pembuktian yaitu menjelaskan diameter lingkaran dan sudut disertai alasan yang logis untuk siswa dengan kemampuan tinggi. Hasil penelitian Cahyani (2019) menjelaskan bahwa siswa dengan kemampuan matematika tinggi mengumpulkan informasi dengan mencatat informasi pada lembar jawaban dan menyampaikan alasan dari apa yang dilakukan disertai dengan alasan yang logis.

Tetapi untuk siswa dengan kemampuan sedang dalam mengidentifikasi informasi yang diketahui secara implisit dari masalah pembuktian terdapat alasan yang tidak logis dalam pernyataan ketika menjelaskan sudut. Hal tersebut sesuai dengan hasil penelitian Listanti (2020) yang menjelaskan bahwa siswa dengan kemampuan matematika sedang mencatat informasi yang didapatkan dari soal pada lembar jawaban. Selain itu hasil penelitian Cahyani (2019) menyatakan bahwa siswa dengan kemampuan matematika sedang tidak memberikan argument yang logis dari apa yang dilakukan.

Untuk siswa dengan kemampuan matematika rendah dalam mengidentifikasi informasi yang diketahui secara implisit dari masalah pembuktian tidak disertai alasan yang logis. Hal tersebut sesuai dengan hasil penelitian Hasanah (2018) yang menyebutkan bahwa siswa

dengan kemampuan matematika rendah tidak menyebutkan informasi secara lengkap dan kurang dalam memberikan alasan atau bukti kebenaran dari penyelesaian yang didapatkan.

Dalam merencanakan penyelesaian ketiga siswa menuliskan pada lembar penyelesaian dahulu sebelum melaksanakan penyelesaian dan untuk siswa dengan kemampuan matematika tinggi disertai alasan yang logis tetapi untuk siswa dengan kemampuan matematika sedang dan rendah tidak disertai alasan yang logis pada beberapa pernyataan. Hal tersebut sesuai dengan hasil penelitian Cahyani (2019) bahwa siswa dengan kemampuan matematika sedang dan rendah mengajukan dugaan atau rencana terkait solusi dari masalah dan langkah-langkah penyelesaian yang akan dilakukan tetapi dalam memberikan argumen tidak logis.

Selain itu, ada perbedaan pada ketiga siswa dalam melaksanakan rencana penyelesaian dan memeriksa kembali proses dan hasil. Siswa dengan kemampuan matematika tinggi menuliskan penyelesaian dengan jelas di lembar penyelesaian, melakukan manipulasi matematika dari awal sampai akhir dan melaksanakan rencana penyelesaian sesuai rencana awal disertai alasan yang logis. Hal tersebut sesuai dengan hasil penelitian Hasanah (2018) yang menyebutkan bahwa siswa dengan kemampuan matematika tinggi dapat menyelesaikan soal berdasarkan rencana yang telah dibuat.

Untuk siswa dengan kemampuan matematika sedang menuliskan penyelesaian dengan jelas di lembar penyelesaian, melakukan manipulasi matematika dari awal sampai akhir dan melaksanakan rencana penyelesaian sesuai dengan rencana awal meskipun tidak disertai alasan yang logis pada beberapa pernyataan. Hal tersebut sesuai dengan hasil penelitian Cahyani (2019) yang menyatakan bahwa siswa dengan kemampuan matematika sedang dapat melaksanakan rencana penyelesaian sesuai rencana dan dalam memberikan argumen tidak disertai alasan yang logis.

Untuk siswa dengan kemampuan matematika rendah menuliskan sebagian penyelesaian di lembar penyelesaian, melakukan manipulasi matematika pada sebagian rencana dan tidak menyelesaikan masalah pembuktian dan tidak berhasil melaksanakan sesuai rencana. Hal tersebut sesuai dengan hasil penelitian Putri (2022) yang menyatakan bahwa siswa dengan kemampuan matematika rendah belum dapat menyelesaikan masalah yang diberikan dengan benar.

Dalam memeriksa kembali proses dan hasil penyelesaian. Siswa dengan kemampuan matematika tinggi mendapatkan kesimpulan dari masalah pembuktian dan memeriksa kebenaran dari penyelesaian mulai dari awal yaitu mulai dari membaca masalah, rencana, pelaksanaan rencana dan kesimpulan. Hal tersebut sesuai dengan hasil penelitian Hasanah (2018) yang menyatakan bahwa siswa dengan kemampuan matematika tinggi memeriksa kembali apa yang telah dilakukan pada tahap sebelumnya dan menganalisis kesimpulan.

Untuk siswa dengan kemampuan matematika sedang mendapatkan kesimpulan dari masalah pembuktian dan memeriksa kebenaran dari penyelesaian meskipun hanya perhitungannya saja. Hal tersebut sesuai dengan hasil penelitian Cahyani (2019) bahwa

siswa dengan kemampuan matematika sedang memeriksa hasil pekerjaannya dengan menghitung ulang dan diperoleh solusi yang bernilai benar serta mendapatkan kesimpulan.

Untuk siswa dengan kemampuan matematika rendah tidak mendapatkan kesimpulan dan tidak memeriksa proses dan hasil dari masalah pembuktian. Hal tersebut sesuai dengan hasil penelitian Hasanah (2018) bahwa siswa dengan kemampuan matematika rendah tidak dapat menarik kesimpulan dari soal karena tidak dapat menyelesaikan masalah yang ada dan tidak memeriksa kembali penyelesaian.

PENUTUP

Siswa dengan kemampuan matematika tinggi dalam memahami masalah mengidentifikasi informasi yang diketahui secara eksplisit dan implisit dari masalah pembuktian disertai alasan yang logis yaitu dengan menyebutkan jari-jari, diameter dan besar sudut. Dalam merencanakan penyelesaian siswa dengan kemampuan matematika tinggi menentukan rencana penyelesaian masalah pembuktian yaitu menggunakan konsep perbandingan trigonometri, kesebangunan dan aturan sinus serta mengidentifikasi hubungan antara rencana yang akan digunakan dalam menyelesaikan masalah pembuktian disertai alasan yang logis. Dalam melaksanakan rencana penyelesaian siswa dengan kemampuan matematika tinggi melakukan manipulasi matematika dan melaksanakan rencana penyelesaian pada masalah pembuktian sesuai dengan rencana awal yang sudah ditentukan dengan rinci dan jelas disertai alasan yang logis. Dalam memeriksa kembali proses dan hasil siswa dengan kemampuan matematika tinggi menarik kesimpulan dan memeriksa kembali kebenaran dari penyelesaian masalah pembuktian mulai dari awal yaitu membaca masalah, mengecek yang diketahui dan rencana awal serta perhitungan yang telah dilakukan disertai alasan yang logis.

Siswa dengan kemampuan matematika sedang dalam memahami masalah mengidentifikasi informasi yang diketahui secara eksplisit dan implisit dari masalah pembuktian tidak disertai alasan yang logis pada beberapa pernyataan yaitu ketika menentukan sudut. Dalam merencanakan penyelesaian siswa dengan kemampuan matematika sedang menentukan rencana penyelesaian masalah pembuktian tidak disertai alasan yang logis pada beberapa pernyataan yaitu ketika menjelaskan konsep perbandingan trigonometri dan kesebangunan serta mengidentifikasi hubungan antara rencana yang akan digunakan disertai alasan yang logis. Dalam melaksanakan rencana penyelesaian siswa dengan kemampuan matematika sedang melakukan manipulasi matematika dan melaksanakan rencana penyelesaian pada masalah pembuktian disertai alasan yang logis serta terdapat langkah yang tidak sesuai dengan rencana awal. Dalam memeriksa kembali proses dan hasil siswa dengan kemampuan matematika tinggi menarik kesimpulan dan memeriksa kembali kebenaran dari penyelesaian masalah pembuktian disertai alasan yang logis.

Siswa dengan kemampuan matematika rendah dalam memahami masalah mengidentifikasi informasi yang diketahui secara eksplisit dan implisit dari masalah pembuktian tidak disertai alasan yang logis pada beberapa pernyataan yaitu ketika

menjelaskan besar sudut. Dalam merencanakan penyelesaian siswa dengan kemampuan matematika rendah menentukan rencana penyelesaian masalah pembuktian tidak disertai alasan yang logis yaitu ketika menjelaskan kesebangunan dan luas segitiga serta mengidentifikasi hubungan antara rencana yang digunakan disertai alasan yang logis. Dalam melaksanakan rencana penyelesaian siswa dengan kemampuan matematika rendah melakukan manipulasi matematika pada sebagian penyelesaian dan tidak dapat menyelesaikan masalah pembuktian. Dalam memeriksa kembali proses dan hasil siswa dengan kemampuan matematika rendah tidak mendapatkan kesimpulan dan tidak memeriksa kembali proses dan hasil dari penyelesaian masalah pembuktian.

Dalam penelitian ini, peneliti memberikan saran. Bagi guru, dengan adanya penelitian ini guru harus lebih memperhatikan siswa khususnya yang memiliki kemampuan matematika sedang dan rendah karena proses penalaran pada beberapa indikator belum maksimal. Guru dapat melatih kemampuan penalaran siswa dengan memberikan pembuktian yang dapat merangsang proses bernalar siswa dan melatih siswa untuk memberikan argumen dengan baik terhadap penyelesaian yang telah dilakukan. Sehingga penalaran siswa dalam pembuktian matematika diharapkan dapat meningkat.

Bagi peneliti lain, yang akan melakukan penelitian sejenis disarankan untuk menggunakan materi yang berbeda, untuk subjek penelitian juga tidak hanya siswa kelas X SMA melainkan pada semua jenjang pendidikan. Selain itu, peneliti harus memperhatikan kondisi siswa saat pengambilan data salah satunya tidak melaksanakan penelitian pada siang hari karena siswa kurang bersemangat dan sudah malas serta untuk menghindari keterbatasan waktu saat wawancara diakibatkan karena jam sekolah sudah selesai sehingga wawancara tidak bisa dilakukan secara detail.

DAFTAR PUSTAKA

- Brodie, Karin dkk. 2009. *Teaching Mathematical Reasoning Secondary School Classroom*. The Open University.
- Cahyanti, Rizki Dwi dan Endah Budi Rahaju. 2019. Penalaran Siswa Dalam Menyelesaikan Masalah Matematika Ditinjau Dari Kemampuan Matematika. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika, Volume 8 No. 3. ISSN :2301-9085*.
- Ebel, Robert L. dan David A. Frisbie. 1991. *Essentials of Educational Measurement*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- Hasanah, S. I., Tafrilyanto, C. F., & Aini, Y. 2019. Mathematical Reasoning: The characteristics of students' mathematical abilities in problem solving. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1188, No. 1, p. 012057). IOP Publishing.
- Hendriana, H., Prahmana, R. C. I., & Hidayat, W. (2018). Students Performance Skills in Creative Mathematical Reasoning. *Infinity Journal*, 7 (2), 83-96.
- Ikram, M. 2013. *Eksplorasi Penalaran Siswa Dalam Pemecahan Masalah Trigonometri Ditinjau Dari Kemampuan Berpikir Logis Pada Siswa Kelas XII-IPA* (Doctoral dissertation, Tesis Program Pascasarjana Universitas Negeri Makassar. Tidak Diterbitkan).
- Ilmi, Muhamad Bakhril dan Abdul Haris Rosyidi. 2017. Penalaran Siswa SMA Dalam Pembuktian Matematika Pada Materi Trigonometri Ditinjau Dari Perbedaan Jenis Kelamin. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika, Volume 3 No. 6*.
- Iqlima, T. W., & Susanah, S. 2020. Profil Penalaran Analogi Siswa dalam Pemecahan Masalah Matematika Ditinjau dari Kemampuan Matematika. *MATHEdunesa*, 9(1), 35-39.

- Latifa, Afin Nur. 2017. Reasoning and Proof Dalam Model Pembelajaran Reciprocal Materi Trigonometri Siswa SMA. *Ideal Mathedu: Indonesian Digital Journal of Mathematics and Education*. Volume 4, Nomor 6.
- Listanti, D. R., & Mampouw, H. L. 2020. Profil pemecahan masalah geometri oleh siswa smp ditinjau dari perbedaan kemampuan matematika. *Jurnal Cendekia: Jurnal Pendidikan Matematika*, 4(1), 365-379.
- McCrone, S. M. & Martin T. S. 2009. *Formal Proof in High School Geometry*. New York: Routledge.
- Nursoffina, M., & Efendi, N. 2022. Analisis Hubungan Penalaran Matematis dengan Pemecahan Masalah terhadap Materi Matematika Siswa SD. *Academia Open*, 6.
- Pelc, A. 2014. Why Do We Believe Theorems? 1–34. Retrieved from <http://arxiv.org/abs/1411.4857>.
- Puti. Sekartaji M, S. dan Rani Kurnia Putri. 2022. Profil Pemecahan Masalah Matematika Berdasarkan Teori Polya Ditinjau Dari Kemampuan Matematika Siswa. *Jurnal Cendekia: Jurnal Pendidikan Matematika*, Volume 06, No. 02, pp.1176-1787.
- Polya, G. 2004. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. United States of America: Princeton University Press.
- Stylianou, Despina A, dkk. 2009. *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective*. New York: Routledge.
- Sugiyono. 2013. *Metode Penelitian Kuantitatif Kualitatif Dan R&D*. Bandung: Alfabeta.
- Utari, T., & Hartono, H. 2019. Muatan penalaran dan pembuktian matematis pada buku teks matematika SMA kelas X Kurikulum 2013. *Jurnal Riset Pendidikan Matematika*, 6(1), 1-13.
- Wilkinson, L. C., Bailey, A. L., & Maher, C. A. 2018. Students' Mathematical Reasoning, Communication, and Language Representations: A Video-Narrative Analysis. *ECNU REVIEW OF EDUCATION*, 1(3), 1–22. <https://journals.sagepub.com/doi/epub/10.30926/ecnuoe2018010301>.