

ANALISIS MODEL MANGSA PEMANGSA PADA PENANGKAPAN IKAN YANG DIPENGARUHI OLEH KONSERVASI

Eka Yuniarti¹, Abadi²

¹ Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Surabaya

² Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Surabaya
email: ekay2009@ymail.com¹, abadi4@yahoo.com²

ABSTRAK

Dalam tulisan ini, dibentuk suatu model mangsa pemangsa pada kegiatan penangkapan ikan yang dipengaruhi konservasi, sehingga daerah penangkapan dibagi menjadi daerah bebas tangkap dan daerah konservasi. Model matematika terdiri dari tiga komponen spesies yakni populasi ikan di daerah bebas tangkap, populasi ikan di daerah konservasi dan populasi pemangsa. Kemudian ditentukan kestabilan penyelesaian sistem tersebut dengan menentukan titik kritis atau titik setimbangnya terlebih dahulu. Kemudian diambil beberapa kasus yang berkaitan dengan konservasi sebagai perbandingan. Dari analisis yang telah dilakukan diperoleh perubahan keadaan setimbang populasi ikan di daerah konservasi dan populasi pemangsa pada tiap-tiap kasus.

Kata kunci: penangkapan ikan, konservasi, pemangsa

1. PENDAHULUAN

Dalam kegiatan penangkapan ikan seringkali terdapat masalah yang dapat menyebabkan populasi ikan berkurang bahkan dapat mengakibatkan kepunahan, diantaranya adalah masalah pemangsa dan penangkapan berlebih (*overfishing*). Oleh karena itu, dilakukan suatu upaya perlindungan ikan dari penangkapan berlebih (*overfishing*), yakni dengan konservasi. Konservasi diharapkan mampu melindungi ikan-ikan dari kepunahan dan dapat meningkatkan kelestarian hidup biota laut. Dengan adanya konservasi, kegiatan penangkapan hanya dapat dilakukan di daerah bebas tangkap.

Beberapa jurnal penelitian tentang model mangsa pemangsa dengan konservasi telah dilakukan oleh para peneliti, di antaranya Dubey [5] yang telah membuat model mangsa pemangsa dengan membagi menjadi dua kasus, yakni ketika pemangsa hidupnya bergantung penuh terhadap

mangsa dan ketika pemangsa bergantung sebagian terhadap mangsa. Kar dan Pahar [8] membuat model mangsa pemangsa pada kegiatan penangkapan ikan di mana pemangsa harus berkompetisi untuk mendapatkan mangsa dan pemangsa dapat menangkap mangsa di daerah bebas tangkap maupun di daerah konservasi. Rui Zhang *et al* [11] membuat model mangsa pemangsa pada kegiatan penangkapan ikan dimana pemangsa diasumsikan selalu berada dan memangsa ikan di daerah bebas tangkap serta mengalami penangkapan bersama ikan mangsa yang ada di daerah tersebut.

Penulisan ini merupakan modifikasi dari model yang dibuat oleh Rui Zhang *et al* [11] dengan mengasumsikan pemangsa tidak mengalami penangkapan. Daerah penangkapan dibagi menjadi daerah bebas tangkap dan daerah konservasi. Antara kedua daerah tersebut tidak terdapat sekat sehingga ikan-ikan dapat bermigrasi dari satu daerah ke daerah lainnya.

Akan dikonstruksi model mangsa pemangsa pada kegiatan penangkapan ikan yang dipengaruhi oleh konservasi. Kemudian akan ditentukan titik kritis dari model tersebut dan selanjutnya akan dilakukan analisis kestabilan titik kritis tersebut berdasarkan kriteria nilai eigen yang diperoleh. Penulisan ini diharapkan mampu memberi wawasan tentang kegiatan penangkapan ikan di laut dengan adanya konservasi dan melibatkan adanya pemangsa.

2. PEMBAHASAN

2.1 Model Matematika

Daerah penangkapan dibagi menjadi dua, yakni daerah bebas tangkap dan daerah konservasi. Oleh karena itu, populasi ikan juga dibagi menjadi populasi ikan di daerah bebas tangkap dan populasi ikan di daerah konservasi. Daerah konservasi hanya

diperuntukkan sebagai tempat perlindungan ikan-ikan dan terumbu karang sehingga kegiatan penangkapan ikan hanya dapat dilakukan di daerah bebas tangkap. Diasumsikan pemangsa selalu berada dan hidup di daerah bebas tangkap dan mendapatkan mangsa ikan-ikan di daerah tersebut. Akan tetapi, pemangsa tidak mengalami penangkapan meskipun hidupnya di daerah bebas tangkap. Diperoleh model mangsa pemangsa pada penangkapan ikan dengan konservasi yang berupa persamaan diferensial nonlinier sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 - \alpha x_1 y - qE x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) + \sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2 \\ \frac{dy}{dt} &= -m y + \beta x_1 y\end{aligned}\quad (1.1)$$

Dengan $x_1(t)$ adalah populasi ikan di daerah bebas tangkap, $x_2(t)$ adalah populasi ikan di daerah konservasi, dan $y(t)$ adalah populasi pemangsa. Semua parameter diasumsikan bernilai positif. σ_1 adalah banyaknya ikan yang bermigrasi masuk ke daerah konservasi dan σ_2 adalah banyaknya ikan yang bermigrasi keluar dari daerah konservasi. r_1 dan r_2 merupakan laju pertumbuhan populasi ikan di daerah bebas tangkap dan laju pertumbuhan populasi ikan di daerah konservasi. m adalah kematian alami pemangsa tanpa adanya mangsa. α merupakan penurunan jumlah mangsa x_1 akibat pemangsaan sedangkan β merupakan peningkatan jumlah pemangsa (y) akibat pemangsaan. K_1 dan K_2 merupakan kapasitas maksimum daerah bebas tangkap dan kapasitas maksimum daerah konservasi untuk dapat menampung ikan-ikan. q adalah indeks dari alat tangkap yang digunakan dan E merupakan upaya penangkapan yang dilakukan.

2.2 Titik kritis

Dengan menggunakan teori mencari titik kritis:

$$\begin{aligned}r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 - \alpha x_1 y - qE x_1 &= 0 \\ r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) + \sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2 &= 0 \\ -m y + \beta x_1 y &= 0\end{aligned}$$

maka diperoleh tiga kemungkinan titik kritis yakni, $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$ dan $P_3(x_1^*, x_2^*, y^*)$.

Dari sistem persamaan diferensial (1.1) diperoleh $\bar{x}_2 = \frac{1}{\sigma_2} \left(\frac{r_1}{K} \bar{x}_1^2 - (r_1 - \sigma_1 - qE) \bar{x}_1 \right)$. Setelah mensubstitusikan \bar{x}_2 diperoleh \bar{x}_1 dalam suatu persamaan pangkat tiga:

$$a\bar{x}_1^3 + b\bar{x}_1^2 + c\bar{x}_1 + d = 0$$

Dengan:

$$\begin{aligned}a &= \frac{r_2 r_1^2}{K_2 \sigma_2^2 K_1^2} \\ b &= -\frac{2r_1 r_2}{K_2 K_1 \sigma_2^2} (r_1 - \sigma_1 - qE) \\ c &= \frac{r_2}{K_2 \sigma_2^2} (r_1 - \sigma_1 - qE)^2 - \frac{(r_2 - \sigma_2) r_1}{\sigma_2 K_1} \\ d &= \left(\frac{r_2 - \sigma_2}{\sigma_2} \right) (r_1 - \sigma_1 - qE) - \sigma_1\end{aligned}$$

Selain itu, diperoleh:

$$\begin{aligned}x_1^* &= m/\beta, \\ x_2^* &= \frac{(r_2 - \sigma_2) + \sqrt{(r_2 - \sigma_2)^2 + 4 \left(\frac{r_2}{K_2} \right) (\sigma_1 x_1^*)}}{2r_2/K_2}, \\ \text{Dan } y^* &= \frac{(r_1 - \sigma_1 - qE) x_1^* - \frac{r_1}{K_1} (x_1^*)^2 \pm \sigma_2 x_2^*}{\alpha x_1^*}\end{aligned}$$

2.3 Nilai Eigen

Analisis kestabilan dilakukan dengan mencari nilai eigen pada masing-masing titik kritis di atas. Nilai eigen ditentukan dengan menggunakan rumus: $\det(A - \lambda I) = 0$ dengan A = matriks Jacobian.

Nilai Eigen di Titik Kritis $P_1(0, 0, 0)$

Diperoleh matriks Jacobian dari sistem (1.1) pada titik kritis P_1 , yaitu:

$$A = \begin{pmatrix} r_1 - \sigma_1 - qE & \sigma_2 & 0 \\ \sigma_1 & r_2 - \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -m \end{pmatrix}$$

Setelah melakukan perhitungan untuk mencari nilai eigen diperoleh suatu persamaan pangkat tiga, yaitu:

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Dengan:

$$\begin{aligned}a &= -(r_1 - \sigma_1 - qE + r_2 - \sigma_2 - m) \\ b &= -m(r_1 - \sigma_1 - qE + r_2 - \sigma_2) + \\ &\quad (r_1 - \sigma_1 - qE)(r_2 - \sigma_2) - \sigma_1 \sigma_2 \\ c &= m((r_1 - \sigma_1 - qE)(r_2 - \sigma_2) - \sigma_1 \sigma_2)\end{aligned}$$

Nilai Eigen di Titik Kritis $P_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$

Diperoleh matriks Jacobian dari sistem (1.1) pada titik kritis P_2 , yaitu:

$$A = \begin{pmatrix} r_1 - \sigma_1 - qE - \frac{2r_1\bar{x}_1}{K_1} & \sigma_2 & -\alpha\bar{x}_1 \\ \sigma_1 & r_2 - \sigma_2 - \frac{2r_2\bar{x}_2}{K_2} & 0 \\ 0 & 0 & -m + \beta\bar{x}_1 \end{pmatrix}$$

Setelah melakukan perhitungan untuk mencari nilai eigen diperoleh suatu persamaan pangkat tiga, yaitu:

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Dengan:

$$a = -\left(-m + \beta\bar{x}_1 + r_1 - \sigma_1 - qE - \frac{2r_1\bar{x}_1}{K_1} + r_2 - \sigma_2 - \frac{2r_2\bar{x}_2}{K_2}\right)$$

$$b = \left(r_1 - \sigma_1 - qE - \frac{2r_1\bar{x}_1}{K_1} + r_2 - \sigma_2 - \frac{2r_2\bar{x}_2}{K_2}\right) \left(-m + \beta\bar{x}_1\right) + \left(r_1 - \sigma_1 - qE - \frac{2r_1\bar{x}_1}{K_1}\right) \left(r_2 - \sigma_2 - \frac{2r_2\bar{x}_2}{K_2}\right) - \sigma_1\sigma_2$$

$$c = -\left(r_1 - \sigma_1 - qE - \frac{2r_1\bar{x}_1}{K_1}\right) \left(r_2 - \sigma_2 - \frac{2r_2\bar{x}_2}{K_2}\right) \left(-m + \beta\bar{x}_1\right) + \sigma_1\sigma_2 \left(-m + \beta\bar{x}_1\right)$$

Nilai Eigen di Titik Kritis $P_3(x_1^*, x_2^*, y^*)$

Diperoleh matriks Jacobian dari sistem (1.1) pada titik kritis P_3 , yaitu:

$$A = \begin{pmatrix} r_1 - \sigma_1 - qE - \alpha y^* - \frac{2r_1 x_1^*}{K_1} & \sigma_2 & -\alpha x_1^* \\ \sigma_1 & r_2 - \sigma_2 - \frac{2r_2 x_2^*}{K_2} & 0 \\ \beta y^* & 0 & -m + \beta x_1^* \end{pmatrix}$$

Setelah melakukan perhitungan untuk mencari nilai eigen diperoleh suatu persamaan pangkat tiga, yaitu:

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Dengan:

$$a = -\left(-m + \beta x_1^* + r_1 - \sigma_1 - qE - \alpha y^* - \frac{2r_1 x_1^*}{K_1} + r_2 - \sigma_2 - \frac{2r_2 x_2^*}{K_2}\right)$$

$$\frac{2r_1 x_1^*}{K_1} + r_2 - \sigma_2 - \frac{2r_2 x_2^*}{K_2}$$

$$b = \left(r_1 - \sigma_1 - qE - \alpha y^* - \frac{2r_1 x_1^*}{K_1} + r_2 - \sigma_2 - \frac{2r_2 x_2^*}{K_2}\right) \left(-m + \beta x_1^*\right) + \left(r_1 - \sigma_1 - qE - \alpha y^* - \frac{2r_1 x_1^*}{K_1}\right) \left(r_2 - \sigma_2 - \frac{2r_2 x_2^*}{K_2}\right) + \beta \alpha y^* x_1^* - \sigma_1 \sigma_2$$

$$c = -\left(r_1 - \sigma_1 - qE - \alpha y^* - \frac{2r_1 x_1^*}{K_1}\right) \left(r_2 - \sigma_2 - \frac{2r_2 x_2^*}{K_2}\right) \left(-m + \beta x_1^*\right) + \sigma_1 \sigma_2 \left(-m + \beta x_1^*\right) - \beta \alpha y^* x_1^* \left(r_2 - \sigma_2 - \frac{2r_2 x_2^*}{K_2}\right)$$

2.4 Analisis Kestabilan dan Penerapan

Untuk menganalisis kestabilan titik kritis sistem diambil beberapa nilai parameter sebagai berikut: $r_1 = 4$; $r_2 = 3,5$; $\sigma_1 = 2,5$; $a = 2$; $\beta = 1$; $m = 2$; $q = 0,1$; $E = 3$; $K_1 = 40$; $K_2 = 50$.

Karena dalam tulisan ini model mangsa pemangsa dipengaruhi oleh konservasi, maka akan diambil beberapa kasus yang berkaitan dengan pengaruh konservasi, yakni adanya migrasi. Kasus 1: jika migrasi yang masuk daerah konservasi lebih kecil daripada migrasi yang keluar ($\sigma_1 < \sigma_2$), kasus 2: jika migrasi yang masuk daerah konservasi sama dengan migrasi yang keluar ($\sigma_1 = \sigma_2$), dan kasus 3: jika migrasi yang masuk daerah konservasi lebih besar daripada migrasi yang keluar ($\sigma_1 > \sigma_2$). Oleh karena itu, diambil nilai σ_2 pada kasus 1 sebesar 3, pada kasus 2 sebesar 2,5 dan pada kasus 3 sebesar 1.

Setelah mensubstitusikan nilai-nilai parameter ke dalam persamaan-persamaan di atas diperoleh hasil sebagai berikut:

Kasus 1 menghasilkan titik kritis dan nilai eigen:

- $P_1(0, 0, 0)$ menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = -1,91$; $\lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = 3,61$.
- $P_2(42,24; 42,58; 0)$ menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = -9,23$; $\lambda_2 = -3,47$; $\lambda_3 = 40,24$.
- $P_3(2; 12,75; 10,06)$ menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = -17,48$; $\lambda_2 = -1,56 + 0,72i$; $\lambda_3 = -1,56 - 0,72i$

Kasus 2 menghasilkan titik kritis dan nilai eigen:

- $P_1(0, 0, 0)$ menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = -1,4$; $\lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = 3,6$.
- $P_2(40,36; 45,77; 0)$ menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = -8,75$; $\lambda_2 = -3,53$; $\lambda_3 = 38,36$.

- P_3 (2; 18,21; 11,88) menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = -21,02$; $\lambda_2 = -1,74 + 0,68i$; $\lambda_3 = -1,74 - 0,68i$.

Kasus 3 menghasilkan titik kritis dan nilai eigen:

- P_1 (0, 0, 0) menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = 0,14$; $\lambda_2 = 3,56$; $\lambda_3 = -2$.
- P_2 (30,26; 55,27; 0) menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = 28,26$; $\lambda_2 = -3,45$; $\lambda_3 = -6,64$.
- P_3 (2; 37,61; 9,90) menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = -16,83$; $\lambda_2 = -2,47 + 0,64i$; $\lambda_3 = -2,47 - 0,64i$.

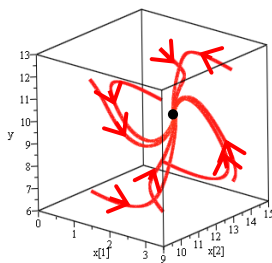
Melalui analisis kestabilan titik kritis berdasarkan nilai eigen diperoleh:

Kasus 1 (jika migrasi yang masuk daerah konservasi lebih kecil dari migrasi keluar ($\sigma_1 < \sigma_2$)) menghasilkan tiga titik kritis yaitu P_1 (0,0,0) yang berupa *sadel* tidak stabil, P_2 (42,24; 42,58; 0) berupa titik *sadel* yang tidak stabil, dan P_3 (2; 12,75; 10,06) berupa titik *fokus* yang stabil.

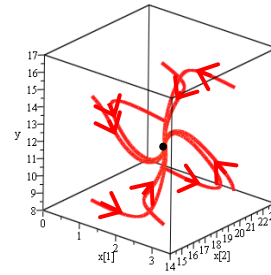
Kasus 2 (migrasi masuk daerah konservasi sama dengan migrasi yang keluar ($\sigma_1 = \sigma_2$)) menghasilkan tiga titik kritis yaitu P_1 (0,0,0) yang berupa *sadel* tidak stabil, P_2 (40,36; 45,77; 0) berupa titik *sadel* yang tidak stabil, dan P_3 (2; 18,21; 11,88) berupa titik *fokus* yang stabil.

Kasus 3 (migrasi masuk daerah konservasi lebih besar dari migrasi yang keluar ($\sigma_1 > \sigma_2$)) menghasilkan yaitu P_1 (0,0,0) yang berupa titik *sadel* tidak stabil, P_2 (30,26; 55,27; 0) berupa titik *sadel* yang tidak stabil, dan P_3 (2; 37,61; 9,90) berupa titik *fokus* yang stabil.

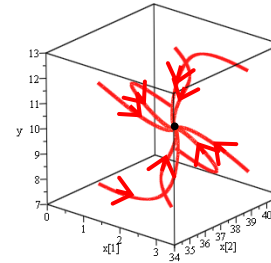
Berikut ini merupakan beberapa gambar fase sistem pada kasus 1, kasus 2 dan kasus 3.



Gambar 1. Trayektori kasus 1 ($\sigma_1 < \sigma_2$)



Gambar 2. Trayektori kasus 2 ($\sigma_1 = \sigma_2$)



Gambar 3. Trayektori kasus 3 ($\sigma_1 > \sigma_2$)

Ketiga gambar tersebut diambil dari beberapa nilai awal yang berbeda dan arah semua trayektori menuju titik kritis P_3 yang berupa titik *fokus* dan bersifat stabil. Pada gambar 1, semua trayektori menuju ke titik kritis P_3 (2; 12,75; 10,06). Pada gambar 2, semua trayektori menuju ke titik kritis P_3 (2; 18,21; 11,88). Pada gambar 3, semua trayektori menuju ke titik kritis P_3 (2; 37,61; 9,90).

3. SIMPULAN DAN SARAN

Dalam tulisan ini, model matematika dianalisis dalam tiga kasus. Hasil analisis menunjukkan bahwa titik kritis P_3 pada tiap kasus berupa titik *fokus* yang bersifat stabil. Dari hasil analisis diperoleh bahwa semakin kecil angka migrasi σ_2 terhadap σ_1 , jumlah pemangsa akan semakin menurun. Hal ini disebabkan semakin sedikit populasi ikan di daerah bebas tangkap akibat migrasi x_1 ke daerah konservasi semakin banyak, sedangkan migrasi x_2 ke daerah bebas tangkap semakin sedikit, sehingga berkurang pula populasi pemangsa (y) akibat berkurangnya mangsa di daerah bebas tangkap tersebut. Sedangkan populasi di daerah konservasi semakin meningkat.

Model mangsa pemangsa pada penangkapan ikan ini diharapkan dapat dikembangkan dengan melibatkan pemangsa yang berkompetisi untuk mendapatkan mangsa sedangkan kompetisi mangsa tidak diperhatikan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anton, Howard. 1987. *Aljabar Linear Elementer*. Edisi kelima. Jakarta: Erlangga.
- [2] Beltrami, Edward. 1987. *Mathematic For Dynamic Modelling*. New York: Academic Press.
- [3] Borreli, Robert L, and Coleman Courtney S. 1996. *Differential Equations a Modelling Perspective*. Preliminary edition. United states of America.
- [4] Bretscher, Otto and Robert Winters. 2005. *Nonlinear System and Linearization* (online). (www.math.rwinters.com/s21b/supplements/nonlinear2005.pdf).
- [5] Dubey, B. 2007. *A Prey-Predator Model with a Reserved Area*. Modeling and Control Vol. 12, No. 4.
- [6] Dubey, B dkk. 2003. *A Model for Fishery Resource with Reserve Area*. Nonlinear Analysis: Real World Applications 4.
- [7] Ekawati, Novi Oktaria. 2006. *Analisis Kestabilan Model Rantai Makanan Tiga Spesies dengan Manifold Pusat*. Bogor: Program Studi Matematika FMIPA IPB.
- [8] Kar, T,K and U,K Pahar. 2007. *A Model Prey-Predator fishery with Marine Reserve*. Journal of Fisheries and Aquatic Science Vol. 2, No. 3.
- [9] Nugroho, Susilo. 2009. *Pengaruh Vaksinasi Terhadap Penyebaran Penyakit dengan Model Endemi SIR*. Surakarta: FMIPA Universitas Sebelas Maret.
- [10] R, Grimshaw. 1990. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Oxford: Blackwell Scientific Publications.
- [11] Zhang, Rui dkk. 2007. *Analisis of a Prey-Predator Fishery Model with Prey Reserve*. Applied Mathematical Sciences vol. 1, No. 50.