ISOMORFISMA PADA GRAF P_4

Eka Adhistiasari [1], I Ketut Budayasa [2]
[1] Jurusan Matematika, Fakultas Martematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, UNESA
Kampus Ketintang 60231,Surabaya
Email : tias-adhis@yahoo.co.id [1], ketutbudayasa@yahoo.com [2]

ABSTRAK

Diberikan dua buah graf sederhana dan terhubung, G dan G', dengan derajat minimum $\delta=3$ dan minimal 5 titik. Didefinisikan graf lintasan dari graf G dengan k titik, $P_k(G)$, adalah graf yang mempunyai himpunan titik yang berupa himpunan lintasan dari graf G. Jika graf G dan G' memenuhi salah satu dari dua kondisi : jika u adalah sebuah titik dari suatu segitiga di G maka $d(u)\geq 4$, G dan G' tidak memuat sebarang C_4 sebagai subgraf maka akan dibahas mengenai sebarang isomorfisma dari graf lintasan P_4 yaitu $P_4(G)$ ke $P_4(G')$ bisa dibangun oleh sebuah isomorfisma(titik) dari G onto G' serta hubungan isomorfisma suatu graf terhubung G dengan graf lintasannya atau $G \simeq P_4(G)$.

Kata kunci : Isomorfisma, isomorfisma(titik), hubungan isomorfisma

I.PENDAHULUAN

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 dalam menyelesaikan masalah jembatan Konigsberg, Rusia. Walaupun graf telah banyak dipelajari sejak dulu, namun semakin majunya teknologi komputer, telah membangkitkan minat baru untuk mempelajari graf dan menjadikannya sebagai salah satu cabang matematika yang akhir-akhir ini berkembang pesat. Diantaranya adalah banyaknya penemuan-penemuan baru mengenai graf. Mulai jenis-jenis graf yang telah banyak dikenal seperti *Complete graph, Bipartite, Complete Bipartite, Cycle, Path, Star, Caterpillar.*

Pendefinisian graf lintasan *(Path graph)* pertama kali pada sebuah jurnal Matematika yang berjudul *"Path Graphs"* oleh Broersma dan Hoede, sehingga jurnal tersebut seringkali dijadikan acuan dalam pengembangannya. Banyak ahli matematika mempelajari tentang perluasan konsep tersebut. Salah satunya pada jurnal matematika yang berjudul *"Isomorphisms of P_4 Graphs"* yang disusun oleh Xueliang Li dari Northwestern Poly technical University dan Biao Zhao dari Xinjiang University. Berdasarkan jurnal tersebut, skripsi kali ini membahas mengenai isomorfisma suatu graf lintasan. Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk mengetahui bahwa suatu isomorfisma graf lintasan P_4, $P4(G)$ ke $P_4(G')$, bisa dibangun oleh suatu isomorfisma titik dari G ke G' serta hubungan isomorfik antara suatu graf G dengan graf lintasan P_4-nya.

Graf lintasan $P_k(G)$ dari sebuah graf G adalah graf yang titik-titiknya merupakan himpunan $\prod_k$, dimana $\prod_k$ adalah himpunan seluruh lintasan dari G dengan k titik $(k\geq 1)$. Terkait dengan isomorfisma suatu graf, salah satu fungsinya adalah dalam bidang kimia yaitu untuk mengidenifikasi struktur kimia suatu atom. Tulisan in merupakan hasil rangkuman dan kolaborasi dari definisi-definisi serta teorema-teorema pada sumber [1], [2], [3], [4], dan [5].

2. KAJIAN PUSTAKA

2.1 GRAF

Definisi 2.1.1
Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari obyek-obyek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik v di $V(G)$. Dengan kata lain, $V(G)$ disebut himpunan titik G dan himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi G. Banyaknya elemen pada $V(G)$ dan $E(G)$ berturut-turut dinyatakan dengan $|V(G)|$ dan $|E(G)|$.

Definisi 2.1.2
Misal G graf, $k\geq 1$. Misal $\prod_k$ (G) adalah himpunan semua lintasan di G dengan k titik. Didefinisikan graf lintasan dari G dan dinotasikan $P_k(G)$ adalah graf yang himpunan titiknya $\prod_k$ (G) dan himpunan sisi $\varepsilon_k(G)$dengan sifat untuk sebarang $H,K\in\prod_k(G)$ dengan $H= x_1x_2x_3...x_k$ dan $K= y_1y_2y_3...y_k$ terdapat

sebuah sisi $HK \in \varepsilon_k(G)$ jika dan hanya jika $x_i = y_{i+1}$ atau $y_i = x_{i+1}$ untuk $1 \le i \le k-1$.

2.2 ISOMORFISMA

Definisi 2.2.1
Dua buah graf G dan H dikatakan isomorfik, bisa ditulis $G \cong H$ jika terdapat fungsi bijektif $f : V(G) \rightarrow V(H)$ sedemikian hingga $u, v \in V(G)$ jika dan hanya jika $f(u), f(v) \in V(H)$ berhubungan langsung.

Definisi 2.2.2
Isomorfisma titik dari $G \rightarrow H$ adalah sebuah fungsi bijektif $f : V(G) \rightarrow V(H)$ sedemikian hingga $u, v \in V(G)$ berhubungan langsung jika dan hanya jika $f(u), f(v) \in V(H)$ berhubungan langsung. Himpunan isomorfisma titik dari $G \rightarrow H$ dinotasikan dengan $\Gamma(G, H)$.

Definisi 2.2.3
Isomorfisma sisi dari $G \rightarrow H$ adalah sebuah fungsi bijektif $f : E(G) \rightarrow E(H)$ sedemikian hingga dua sisi terkait di G jika dan hanya jika peta*(images)* dari kedua sisi tersebut juga terkait di H. Jelas bahwa isomorfisma sisi dari dua graf adalah sebuah isomorfisma titik dari graf garisnya. Himpunan isomorfisma sisi dari $G \rightarrow H$ dinotasikan dengan $\Gamma_e(G, H)$.

Selanjutnya akan disederhanakan bahwa $\Gamma(P_4(G), P_4(G')) = \Gamma_4(G, G')$ dan disebut anggota-anggota isomorfisma P_4 dari G ke G'.

3. PEMBAHASAN

Akan dibahas mengenai beberapa kondisi yang menunjukkan sebarang isomorfisma dari graf lintasan, yaitu $P_4(G)$ ke $P_4(G')$ bisa dibangun oleh suatu isomorfisma titik dari G onto G' serta hubungan isomorfisma suatu graf G ke graf lintasan P_4-nya. Pada pembahasan berikut ini, graf yang dibahas hanya terbatas pada graf terhubung sederhana dengan minimal 5 titik dan $\delta = 3$.

Definisi 3.1
Neigborhood atau persekitaran dari suatu titik u pada graf dinotasikan $N(u)$ adalah suatu himpunan yang didefinisikan sebagai $N(u) = \{ v \in V(G) \mid u — v\}$.

Definisi 3.2
Diberikan bilangan bulat tak negatif d. Himpunan dari semua graf dengan derajat minimum d dinotasikan $\mathscr{G}_d$.

Sehingga bisa ditulis $\mathscr{G}_d = \{G \mid \delta(G) \ge d\}$.

Definisi 3.3
Fungsi $f \in \Gamma_e(G, G')$, didefinisikan sebuah pemetaan f^* yaitu $f^*(tuvw) = f(tu)f(uv)f(vw)$ untuk suatu lintasan P_4, *tuvw* di G dan f^* merupakan pemetaan yang dibangun oleh f yang dinotasikan $\Gamma^*(G, G') = \{ f^* \mid f \in \Gamma_e(G, G')\}$

Teorema 3.1
Jika $G, G' \in \mathscr{G}_3$ maka,

1. $\Gamma^*(G, G') \subseteq \Gamma_4(G, G')$
2. Fungsi T : $\Gamma_e(G, G') \rightarrow \Gamma^*(G, G')$ yang diberikan oleh $T(f) = f^*$ merupakan fungsi satu-satu.

Bukti :

1. Misal *tuvw* adalah sebuah lintasan P_4 di G dan $f \in \Gamma_e(G, G')$, maka $f(tu)$, $f(uv)$, $f(vw) \in E(G')$. Karena f mengawetkan keterkaitan dan tak-keterkaitan, diketahui bahwa $f(tu)f(uv)f(vw)$ merupakan sebuah lintasan empat titik di G'.

Dengan kata lain f^* merupakan fungsi dari $\Pi_4(G) \rightarrow \Pi_4(G')$, sehingga jelas bahwa f^* adalah fungsi bijektif.

Karena f^* merupakan fungsi dari $\Pi_4(G) \rightarrow \Pi_4(G')$ dan dibangun oleh fungsi f maka $f^* \in \Gamma_4(G, G')$.

Dengan kata lain diperoleh $\Gamma^*(G, G') \subseteq \Gamma_4(G, G')$.

2. Misal f_1, $f_2 \in \Gamma_e(G, G')$ dan $f_1 \neq f_2$.

Maka ada sebuah sisi *uv* sedemikian hingga $f_1(uv) \neq f_2(uv)$. Karena G $\in \mathscr{G}_3$ maka bisa ditemukan suatu lintasan P_4, misal *tuvw* sedemikian hingga $f_1^*(tuvw) \neq f_2^*(tuvw)$. Jadi, fungsi T adalah fungsi satu-satu. ■

Definisi 3.4
Misal *tuvw* merupakan lintasan P_4. Didefinisikan sisi *uv* adalah sisi tengah atau *middle edge* dari P_4 dan *tuvw* = *wvut (simetris).*

Definisi 3.5
$S(uv)$ adalah himpunan dari semua lintasan P_4 dengan sisi tengah bersama *uv*. Sebarang subset dari $S(uv)$ dinamakan *double star (*bintang ganda*)* pada sisi *uv*.

Pemetaan $f : \Pi_4(G) \rightarrow \Pi_4(G')$ dinamakan mengawetkan *double star (double star-preserving)* jika himpunan *f (S(uv))* adalah sebuah *double star* di *G'* untuk setiap sisi *uv* dari *G*.

Teorema 3.2

Misal *G, G'* ∈ $\mathcal{G}_3$ dan $f:\Pi_4(G)\rightarrow\Pi_4(G')$ merupakan pemetaan satu-satu atau fungsi bijektif. Fungsi *f* adalah fungsi yang dibentuk oleh isomorfisma sisi dari *G* ke *G'* jika dan hanya jika *f* dan f^{-1} adalah isomorfisma P_4 yang mengawetkan *double star*.

Bukti :

$\Longrightarrow$

Fungsi *f* fungsi yang dibangun oleh isomorfisma sisi dan $f:\Pi_4(G)\rightarrow\Pi_4(G')$, maka ada sebuah lintasan P_4, misal *tuvw* di *G* dan $f_e(tu)f_e(uv)f_e(vw)$ merupakan sebuah lintasan P_4 di *G'*. Menurut definisi 3.6, sisi *uv* merupakan sisi tengah bersama sehingga setiap diambil lintasan P_4 lain di G maka sisi tengahnya tetap *uv* dan selalu terdapat peta yang lain juga di *G'*, sehingga terdapat *S(uv)* dan *double star* pada *uv* di G'. $f \in \Gamma_4(G,G')$ dan *f(S(uv))* adalah sebuah *double star* dari *G'* dengan kata lain *f* merupakan isomorfisma P_4 yang mengawetkan *double star,* karena f^{-1} memiliki sifat yang sama dengan *f*, maka f^{-1} juga isomorfisma P_4 yang mengawetkan *double star*.

$\Longleftarrow$

Misal *f* dan f^{-1} adalah isomorfisma P_4 yang mengawetkan double star. Jadi, untuk setiap sisi *uv* di *G*, terdapat sebuah sisi *u'v'* di *G'* sedemikian hingga $f(S(uv))\subseteq S(u'v')$. Selain itu, *u'v'* secara tunggal ditentukan oleh *uv* karena *f* fungsi bijektif (terdapat korespondensi satu-satu). Jika $f(S(uv))\subseteq S(u'v')$ dan *G* ∈ $\mathcal{G}_3$ maka $f^{-1}(S(u'v'))\subseteq S(uv)$.

Dapat disimpulkan bahwa fungsi *f* menentukan fungsi yang didefinisikan dengan baik $f_e:E(G)\rightarrow E(G')$ yang mana $f(S(uv))=S(f_e(uv))$. Tidak sulit untuk melihat bahwa f_e adalah fungsi bijektif.

- Akan dibuktikan bahwa f_e mengawetkan keterhubungan dan tak-keterhubungan. Faktanya, jika *tuv* adalah sebuah lintasan P_3 di *G*, maka ada sebuah lintasan P_4 di *S(tu)* yang terhubung ke suatu lintasan P_4 di *S(uv)*. Karena *f* adalah suatu isomorfisma P_4 dan $f(S(tu))=S(f_e(tu))$ boleh dikatakan juga $f(S(uv))=S(f_e(uv))$, maka terdapat sebuah lintasan P_4 di $S(f_e(tu))$ yang terhubung ke suatu lintasan P_4 di $S(f_e(uv))$. Ini berakibat bahwa $f_e(tu)$ berhubungan langsung dengan $f_e(uv)$ di *G'*. Karena f^{-1} memiliki sifat yang sama seperti *f* , maka f_e mengawetkan tak-keterhubungan.

Tahap akhir akan dibuktikan bahwa *f* dibangun oleh f_e. Misal *tuvw* sebuah lintasan P_4 dan misal *xtuv* ∈ *S(tu)* . Karena *f* mengawetkan *double star,* diketahui *f(xtuv)*∈ $f(S(tu))=S(f_e(tu))$ dan *f(xtuv)* berhubungan langsung dengan *f(tuvw)*∈ $S(f_e(uv))$. Maka $f_e(tu)\ f_e(uv)$ adalah lintasan P_3 bersama dari *f(xtuv)* dan *f(tuvw)*. Karena simetri, $f_e(uv)f_e(vw)$ adalah lintasan P_3 lain dari *f(tuvw)* dan karena itu *f(tuvw)*= $f_e(tu)\ f_e(uv)\ f_e(vw)$. ■

Lemma 3.1

Misal *G,G'* ∈ $\mathcal{G}_3$ dan fungsi *f* merupakan isomorfisma P_4 dari *G* ke *G'*. Asumsikan *G* dan *G'* memenuhi salah satu kondisi dibawah ini :

1. Jika *u* adalah titik dari suatu segitiga di *G*, maka $d(u) \geq 4$.
2. *G* dan *G'* tidak memuat sebarang C_4 sebagai subgraf.

maka *f* merupakan fungsi yang mengawetkan double-star jika dan hanya jika untuk setiap lintasan P_3, *tuv*, di *G*, $f(x_1tuv), ..., f(x_rtuv)$ mempunyai sebuah sisi tengah bersama dan $f(tuvy_1), ..., f(tuvy_s)$ mempunyai sebuah sisi tengah bersama, dimana $x_i \in N(t)\setminus\{u,v\}$ untuk $1\leq i\leq r$ dan $y_j \in N(v)\setminus\{u,v\}$ untuk $1\leq j\leq s$.

Bukti :

$\Longrightarrow$ Fungsi *f* merupakan fungsi yang mengawetkan *double star*, jadi $\forall\, uv \in E(G), \exists\, u'v' \in E(G')$. Jika *tuv* adalah sebuah lintasan P_3 di *G*, maka ada sebuah lintasan P_4, *xtuv* ∈ *S(tu)*, yang terhubung langsung dengan lintasan P_4 di *S(uv)*, misal *tuvy*. Karena *f* mengawetkan double star, *f(xtuv)* ∈ *f(S(tu))*, maka ada titik-titik *x* lain yang terkait dengan *t* atau $x_i \in N(t)$, sehingga $f(x_1tuv), f(x_2tuv),..., f(x_rtuv)$ mempunyai sisi tengah bersama. Begitu juga dengan titik-titik *y* lain yang terkait dengan *v* dengan kata lain $y_j \in N(v)$, sehingga $f(tuvy_1),f(tuvy_2),..., f(tuvy_s)$ juga mempunyai sisi tengah bersama

$\Longleftarrow$ Misal *uv* sebarang sisi dari *G* dan misal *tuvw*, *t'uvw'* adalah dua lintasan P_4 di *S(uv)*. Akan dibedakan dalam 4 kasus yaitu :

Kasus 1 : empat titik *t,t',w* dan *w'* adalah pasangan titik berbeda.

Dari kondisi ini, diketahui bahwa *f(tuvw)* dan *f(tuvw')* mempunyai sebuah sisi tengah bersama dan *f(tuvw')* dan *f(t'uvw')* mempunyai sebuah sisi tengah bersama. Maka *f(tuvw)* dan *f(t'uvw')* mempunyai sisi tengah bersama.

Kasus 2 : $t = t'$ atau $w = w'$.

Dari kondisi ini, diketahui bahwa *f(tuvw)* dan *f(t'uvw')* mempunyai sebuah sisi tengah bersama.

Kasus 3 : $t = w'$ tetapi $t' \neq w$ atau $t' = w$ tetapi $t \neq w'$.

Dengan pembuktian yang sama dengan kasus 1, bisa ditunjukkan bahwa *f(tuvw)* dan *f(t'uvw')* mempunyai sisi tengah bersama.

Kasus 4 : $t = w'$ dan $t' = w$.

Jika *G* dan *G'* memenuhi (1), maka terdapat sebuah titik $x \in N(u) \setminus \{t,v,t'\}$.

Dari kondisi ini, diketahui bahwa *f(tuvw)* dan *f(xuvw)* mempunyai sebuah sisi tengah bersama, *f(xuvw)* dan *f(xuvw')* mempunyai sebuah sisi tengah bersama, dan *f(xuvw')* dan *f(t'uvw')* mempunyai sisi tengah bersama. Maka *f(tuvw)* dan *f(t'uvw')* mempunyai sebuah sisi tengah bersama.

Dengan menjumlahkan kasus-kasus di atas, diketahui *f(S(uv))* adalah sebuah *double star* dari *G'* dengan kata lain fungsi *f* merupakan fungsi yang mengawetkan *double star*. ■

Lemma 3.2

Misal $f \in \Gamma_4(G,G')$ dan x_1tuv, x_2tuv ,$tuvy_1$ serta $tuvy_2$ merupakan empat lintasan P_4 dari *G*, maka $f(x_1tuv)$ dan $f(x_2tuv)$ mempunyai sisi tengah bersama jika dan hanya jika $f(tuvy_1)$ dan $f(tuvy_2)$ mempunyai sisi tengah bersama.

Bukti :

Diketahui bahwa x_1tuv, x_2tuv, $tuvy_1$ serta $tuvy_2$ merupakan lintasan P_4 di *G* dan $f \in \Gamma_4(G,G')$. Fungsi *f* merupakan fungsi bijektif, jelas bahwa $f(x_1tuv)$ dan $f(x_2tuv)$ mempunyai sisi tengah bersama.

Misal *tuv* adalah sebuah lintasan P_3 di *G*, sehingga ada sebuah lintasan P_4, $xtuv \in S(tu)$, yang terhubung langsung dengan lintasan P_4 di *S(uv)*, misal *tuvy*. Sehingga $f(tuvy_1)$ dan $f(tuvy_2)$ juga mempunyai sisi tengah bersama. Begitu juga sebaliknya. ■

Lemma 3.3

$f \in \Gamma_4(G,G')$ dan x_1tuv, x_2tuv ,$tuvy_1$ serta $tuvy_2$ merupakan empat lintasan P_4 dari *G*. Jika $f(x_1tuv)$ dan $f(x_2tuv)$ tidak mempunyai sisi tengah bersama maka $f(x_1tuv)$, $f(x_2tuv)$, $f(tuvy_1)$ dan $f(tuvy_2)$ merupakan sebuah C_4 di *G'*.

Bukti :

x_1tuv, x_2tuv ,$tuvy_1$ serta $tuvy_2$ merupakan 4 lintasan P_4 di *G*. Jelas bahwa x_1tuv, x_2tuv mempunyai sisi tengah bersama *tu*. Jika peta dari kedua lintasan tersebut, $f(x_1tuv)$ dan $f(x_2tuv)$ tidak mempunyai sisi tengah bersama maka *f* tidak mengawetkan *double star*. Menurut Lemma 3.2, $f(tuvy_1)$ dan $f(tuvy_2)$ juga tidak mempunyai sisi tengah bersama. Sehingga bisa disimpulkan 4 lintasan P_4 tersebut membentuk sikel C_4.■

Teorema 3.3

Misal $G,G' \in \mathcal{G}_3$. Asumsikan *G* dan *G'* memenuhi salah satu kondisi dibawah ini :

1. Jika *u* adalah titik dari suatu segitiga di *G*, maka $d(u) \geq 4$.
2. *G* dan *G'* tidak memuat sebarang C_4 sebagai subgraf.

$f \in \Gamma_4(G,G')$ jika dan hanya jika *f* merupakan fungsi yang dibangun oleh sebuah isomorfisma sisi dari *G* ke *G'*, dengan kata lain $P_4(G)$ isomorfik ke $P_4(G')$ jika dan hanya jika graf garis *L(G)* isomorfik ke *L(G')*.

Bukti :

Dari Teorema 3.2, hanya perlu dibuktikan bahwa *f* dan *f'* mengawetkan *double star*. Karena *G* mempunyai sifat yang sama seperti *G'*, hanya perlu ditunjukkan bahwa *f* mengawetkan *double star*. Bagian "jika" sudah jelas.

Maka akan dibuktikan bagian "hanya jika".

- Hanya perlu ditunjukkan bahwa *f* memenuhi kondisi dari Lemma 3.1. Misal *tuv* adalah sebuah lintasan P_3 di G, $x_1tuv, ..., x_mtuv$ dan $tuvy_1,... tuvy_n$ menjadi lintasan P_4 dari G, dengan $x_i \in N(t)\setminus\{u,v\}$ untuk $1 \leq i \leq m$, $y_i \in N(v)\setminus\{u,t\}$ untuk $1 \leq j \leq n$.
- Jika *G* dan *G'* memenuhi kondisi (1), maka $m \geq 2$ dan $n \geq 2$. Tanpa menghilangkan perumuman, mengingat $f(x_1tuv)$, $f(x_2tuv)$, $f(tuvy_1)$ dan $f(tuvy_2)$. Misal bahwa $f(x_1tuv)$ dan $f(x_2tuv)$ tidak

memiliki sisi tengah bersama. Berdasarkan Lemma 3.3, $f(x_1tuv)$, $f(x_2tuv)$, $f(tuvy_1)$ dan $f(tuvy_2)$ membentuk sebuah C_4 di G' (dinotasikan $C' = abcda$), katakan $f(x_1tuv)=abcd$, $f(x_2tuv)=cdab$, $f(tuvy_1)=bcda$ dan $f(tuvy_2)=dabc$. Karena G dan G' memenuhi kondisi (1), maka ada 2 titik $p,q \in N(x_1)$ dan sebuah titik $z \in N(u)\backslash\{v\}$ sedemikian hingga px_1tu , qx_1tu dan x_1tuz adalah lintasan P_4 di G. Jika $f(x_1tuv)$ dan $f(x_1tuz)$ mempunyai sisi tengah bersama, dan keduanya $f(x_1tuv)$ dan $f(x_1tuz)$ terhubung langsung ke $f(px_1tu)$, diketahui bahwa $f(x_1tuv)$ dan $f(x_1tuz)$ mempunyai lintasan P_3 bersama, katakan saja abc, dan $f(x_1tuz) = abcd'$. Jadi $f(x_1tuz)$ terhubung langsung ke $f(tuvy_2)$, tetapi x_1tuz tidak terhubung langsung dengan $tuvy_2$ di G, sebuah kontradiksi untuk fakta bahwa $f \in \Gamma_4(G,G')$. Jika $f(x_1tuv)$ dan $f(x_1tuz)$ tidak mempunyai sisi tengah bersama, berdasarkan Lemma 3.3, $f(x_1tuv)$, $f(x_1tuz)$, $f(px_1tu)$ dan $f(qx_1tu)$ membentuk sebuah sikel C_4 di G'(dinotasikan dengan C''). Jelas bahwa, $C' = C''$, jadi didapat $f(x_1tuz) = f(x_1tuv)$, sebuah kontradiksi. Maka $f(x_1tuv)$ dan $f(x_2tuv)$ mempunyai sisi tengah bersama. Dari Lemma 3.2 , didapat bahwa $f(tuvy_1)$ dan $f(tuvy_2)$ mempunyai sebuah sisi tengah bersama.

- Jika G dan G' memenuhi kondisi (2), akan dibedakan menjadi 3 kasus dibawah ini :

  1. $m \geq 2$ dan $n \geq 2$
     Tanpa menghilangkan perumuman, mengingat $f(x_1tuv)$, $f(x_2tuv)$, $f(tuvy_1)$ dan $f(tuvy_2)$. Misalkan bahwa $f(x_1tuv)$ dan $f(x_2tuv)$ tidak mempunyai sisi tengah bersama. Berdasarkan Lemma 3.3 $f(x_1tuv)$, $f(x_2tuv)$, $f(tuvy_1)$ dan $f(tuvy_2)$ membentuk sebuah C_4 di G', terjadi kontradiksi. Maka $f(x_1tuv)$ dan $f(x_2tuv)$ mempunyai sebuah sisi tengah bersama, dan $f(tuvy_1)$ dan $f(tuvy_2)$ mempunyai sebuah sisi tengah bersama.
  2. $m=1$ dan $n \geq 2$ (atau $n=1$ dan $m \geq 2$)
     Jika $m=1$, sisi tv harus elemen $E(G)$. Karena G tidak memuat sebarang C_4 sebagai subgraf, terdapat dua titik $p,q \in N(x_1)$ dan titik $z \in N(u)\backslash \{t,v\}$ sedemikian hingga px_1tu, qx_1tu dan x_1tuz adalah lintasan P_4 di G. Sebuah pembuktian yang sama seperti kasus 1, yang menunjukkan bahwa $f(x_1tuv)$ dan $f(x_1tuz)$ memiliki sisi tengah bersama, dan $f(px_1tu)$, $f(qx_1tu)$ memiliki sebuah sisi tengah bersama. Misal $f(x_1tuv)=abcd$, $f(px_1tu)=habc$, $f(qx_1tu)=kabc$ dan $f(x_1tuz)=abce$. Karena keduanya $f(tuvy_1)$ dan $f(tuvy_2)$ berhubungan langsung ke $f(x_1tuv)$ tetapi tidak dengan $f(x_1tuz)$, maka $f(tuvy_1)=bcdw$ dan $f(tuvy_2)=bcdw'$, dengan kata lain $f(tuvy_1)$ dan $f(tuvy_2)$ mempunyai sisi tengah bersama.
  3. $m=1$ dan $n=1$
     Karena graf G tidak memuat sebarang C_4 sebagai subgraf, terdapat dua titik $p,q \in N(x_1)$ dan titik $z \in N(u)\backslash \{t,v\}$ sedemikian hingga px_1tu, qx_1tu dan x_1tuz adalah lintasan P_4 di G. Sebuah pembuktian yang sama seperti kasus 1, yang menunjukkan bahwa $f(x_1tuv)$ dan $f(x_1tuz)$ memiliki sisi tengah bersama, dan $f(px_1tu)$, $f(qx_1tu)$ memiliki sebuah sisi tengah bersama. Karena $f(tuvy_1)$ berhubungan langsung dengan $f(x_1tuv)$ sehingga keduanya memiliki lintasan P_3 yang sama di G. Jelas bahwa x_1tuv dan $tuvy_1$ mempunyai sisi tengah bersama.

Dengan menjumlahkan kasus-kasus diatas, dapat dibuktikan bahwa f adalah fungsi yang mengawetkan double star. ■

Teorema 3.4

Misal $G,G' \in \mathscr{G}_3$. Asumsikan G dan G' memenuhi salah satu kondisi dibawah ini :

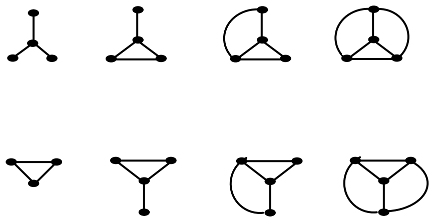
1. Jika u adalah titik dari suatu segitiga di G, maka $d(u) \geq 4$.
2. G dan G' tidak memuat sebarang C_4 sebagai subgraf.

$f \in \Gamma_4(G,G')$ jika dan hanya jika f merupakan fungsi yang dibangun oleh sebuah isomorfisma dari G ke G', dengan kata lain $P_4(G)$ isomorfik ke $P_4(G')$ jika dan hanya jika G isomorfik ke G'.

Bukti :

Teorema berikut merupakan Teorema 3.2 dalam *Selected Topics in Graph Theory* [4,

hal.276] yang telah dibuktikan oleh R. L. Hemminger dan L. W. Beineke :
“ G dan G' graf terhubung, tetapi G dan G' bukan graf seperti pada gambar yang ditunjukkan di bawah ini, setiap f adalah isomorfisma sisi dari G ke G' jika dan hanya dibangun oleh sebuah isomorfisma dari G ke G'.”



$\Longleftarrow$

(i) Dari Teorema 3.2 pada [4], didapat bahwa setiap f isomorfisma dari G ke G' maka ada f yang merupakan isomorfisma sisi dari G ke G' atau dengan kata lain jika $G \cong G'$ maka $L(G) \cong L(G')$.

(ii) Dari Teorema 3.3 didapat bahwa jika $L(G) \cong L(G')$ maka $P_4(G) \cong P_4(G')$.

Sehingga dari *(i)* dan *(ii)* didapat bahwa jika $G \cong G'$ maka $P_4(G) \cong P_4(G')$.

$\Longrightarrow$

(i) Dari Teorema 3.3 didapat bahwa jika $P_4(G) \cong P_4(G')$ maka $L(G) \cong L(G')$.

(ii) Dari teorema 3.2 pada [4], didapat bahwa setiap f yang merupakan isomorfisma sisi maka f dibangun oleh isomorfisma dari G ke G' atau dengan kata lain $L(G) \cong L(G')$ maka $G \cong G'$.

Sehingga dari (i) dan (ii) bisa disimpulkan bahwa jika $P_4(G) \cong P_4(G')$ maka $G \cong G'$. ■

Akibat 3.1
Misal $G, G' \in \mathcal{G}_3$. Asumsikan G dan G' memenuhi salah satu kondisi dibawah ini :

1. Jika u adalah titik dari suatu segitiga di G, maka $d(u) \geq 4$.
2. G dan G' tidak memuat sebarang C_4 sebagai subgraf.

Maka pemetaan P_4 merupakan fungsi satu-satu.
Bukti :
Dari Teorema 3.4, didapat bahwa pemetaan P_4 merupakan pemetaan bijektif, sehingga jelas bahwa pemetaan tersebut juga pemetaan satu-satu. ■

Lemma 3.4
Graf P_4 tidak memuat segitiga.
Bukti :
Berdasarkan definisi 3.1, graf lintasan merupakan graf yang himpunan titiknya $\prod_k$ (G) dan himpunan sisi $\varepsilon_k(G)$ dengan sifat untuk sebarang $H,K \in \prod_k(G)$ dengan $H = x_1x_2x_3...x_k$ dan $K = y_1y_2y_3...y_k$ terdapat sebuah sisi $HK \in \varepsilon_k(G)$ jika dan hanya jika $x_i = y_{i+1}$ atau $y_i = x_{i+1}$ untuk $1 \leq i \leq k-1$. Sehingga dua buah titik akan terhubung dengan sebuah sisi jika titik-titik tersebut mempunyai selisih satu sisi dari lintasan yang menjadi elemen titik tersebut. Jadi jelas bahwa graf P_4 tidak memuat segitiga.

Andaikan graf P_4 memuat segitiga........................ (*)

Misal $X,Y,Z \in P_4(G)$, maka $X= x_1x_2x_3x_4$,$Y= y_1y_2y_3y_4$, $Z=z_1z_2z_3z_4$. Jika X berhubungan langsung dengan Y maka X akan bergeser satu titik ke kanan atau Y bergeser satu titik ke kiri. Jika Y berhubungan langsung dengan Z maka Y juga akan bergeser satu titik ke kanan dan begitu pula sebaliknya. Sehingga antara X dan Z terdapat selisih atau gap 2 titik, dan tidak mungkin X akan berhubungan langsung dengan Z. *(terjadi kontradiksi dengan (*)).* Jadi benar bahwa graf P_4 tidak memuat segitiga. ■

Teorema 3.5
Graf terhubung G dikatakan isomorfik ke graf lintasan P_4-nya jika dan hanya jika G merupakan sebuah sikel dengan panjang minimal 4.
Bukti :

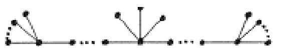
$\Longrightarrow$

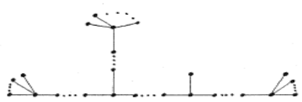
Misal G mempunyai n titik. Maka $P_4(G)$ harus mempunyai n titik juga. Jadi G harus mempunyai tepat n subgraf P_4. Karena G terhubung, maka G mempunyai sebuah pohon rentang T *(*menurut *Teorema 2.1.1).* Misal sebuah lintasan terpanjang di T menjadi $x_1x_2 \ldots x_{r-1}x_r$ $(r \geq 4)$. Jika $d(x_{r-1}) = m \geq 3$, misal $N(x_{r-1}) \setminus \{x_{r-2}, x_r\} = \{x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_{r+m-2}\}$. Jika T merupakan tranformasi kedalam sebuah pohon T^* dengan memindahkan sisi-sisi akhir $x_{r-1}x_i$ dari x_{r-1} , dan menambahkan itu ke titik akhir x_{i-1} , i =

r+1 , . . . , r+m-2 , kemudian banyaknya lintasan P_4 di T^* lebih rendah daripada di T dengan $(d(x_{r-1}) - 2)(d(x_{r-2}) - 2)$, yang tidak negatif. Jika $d(x_{r-1}) = 2$, misal T_s menjadi sebuah pohon bagian gantung dari x_j , $3 \leq j \leq r-2$, dan misal x adalah *neighbor* dari x_j di T_s . Jika T merupakan transformasi kedalam sebuah pohon T^* dengan memindahkan pohon bagian gantung T_s dari x_j dan menambahkannya ke titik akhir x_r dari pohon hasil, maka banyaknya lintasan P_4 di T^* lebih rendah daripada di T dengan $(d(x)-1)(d(x_j)- 2) + d(x_{j-1}) + d(x_{j+1})-3$, yang positif.

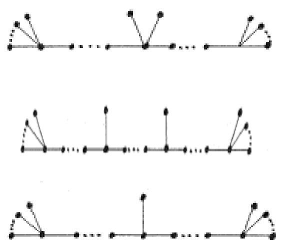
Dengan mengulang dua perubahan diatas, setiap pohon T bisa berubah ke P_n yang mempunyai $n-3$ subgraf P_4. Jika T tidak mempunyai lebih dari n subgraf P_4 , maka itu tidak mempunyai sebuah titik x_i dengan derajat 6 atau lebih di lintasan terpanjang $x_1x_2 \ldots x_{r-1}x_r$ $(r \geq 4)$, untuk $3 \leq i \leq r-2$, seperti perubahan diatas bisa memperoleh T kedalam sebuah P_n dengan sebuah perubahan paling sedikit 4 pada banyaknya lintasan P_4 dan T , dan maka G akan memiliki paling sedikit $(n-1)+4 = n+1$ subgraf P_4. Dengan cara yang sama, T tidak mempunyai dua atau lebih titik x_i dengan derajat 4 atau 5, atau 4 atau lebih titik dengan derajat 3 dilintasan terpanjang $x_1x_2 \ldots x_{r-1}x_r$ $(r \geq 4)$, untuk $3 \leq i \leq r-2$. Dan misal u menjadi sebuah *neighbor* dari x_i , $3 \leq i \leq r-2$, maka $d(u) \leq 3$. Jika $d(u)=3$, maka hanya ada satu titik dengna derajat 3 di $\{x_i \;\; 3 \leq i \leq r-2\}$. Susunan yang mungkin tersisa dari pohon rentang G:

(a)





(b)



(c)

(d)

Pada kasus *(a)*, banyaknya subgraf P_4 adalah sama dengan banyaknya titik. $P_4(G)$ memuat titik terasing jika dua titik berhubungan langsung dari sebuah sisi yang terkait dengan dua sisi terakhir. Dengan dasar dari graf P_4, bisa dilihat bahwa G tidak bisa menjadi sebuah pohon.

Pada kasus *(b)* dan *(c)*, sebuah sisi harus ditambahkan dengan sedikitnya n lintasan dengan panjang 3 untuk mendapatkan sebuah graf. Akan tetapi, pada Lemma 3.4, maka sedikitnya ada 3 subgraf P_4 yang ditambahkan $n-1$ atau $n-2$ titik yang ditunjukkan pada pohon rentang T dan $P_4(G)$ mempunyai sedikitnya $n+1$ titik.

Pada kasus *(d)*, penambahan dari sebuah sisi utama pada sebuah graf tunggal G, karena sebaliknya itu termasuk dalam kasus *(b)* atau *(c)*. Ketika $\alpha \geq 2 \; atau \; \beta \geq 2$, maka sedikitnya 4 subgraf P_4 yang ditambahkan $n-3$ titik yang ditunjukkan pada pohon rentang T dan $P_4(G)$ mempunyai sedikitnya $n+1$ titik. Ketika $\alpha = 1 \; dan \; \beta = 1$, jika banyaknya titik yang berderajat 3 adalah dua maka G memuat $n+3$ subgraf P_4 , dan jika banyaknya titik yang berderajat 3 tersebut adalah satu maka G memuat $n+1$ subgraf P_4. Satu kemungkinan yang tersisa adalah dengan menambahkan satu sisi yang berhubungan langsung dengan dua titik akhir dari T, dan G adalah sebuah sikel dengan panjang minimal 4.

$\Longleftarrow$

Misalkan $G = C_n$, $n \geq 4$ dengan $V(C_n) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}\}$.

Untuk setiap i, $0 \leq i \leq n-1$, maka :

$X_i = (v_i v_{i+1} v_{i+2} v_{i+3}) \in V(P_4(C_n))$ dengan indeks v "diambil" modulo n.

Karena $0 \leq i \leq n-1$, maka $|V(P_4(C_n))| = n$.

Titik X_i di $P_4(C_n)$ hanya berhubungan langsung dengan titik-titik :

$X_{i+1} = (v_{i+1}v_{i+2}v_{i+3}v_{i+4})$ dan $X_{i-1} = (v_{i-1}v_i v_{i+1}v_{i+2})$ sedemikian sehingga $d_{P_4(C_n)}(X_i) = 2\,;\ \forall i, 0 \le i \le n-1$.

Dengan demikian bisa disimpulkan $P_4(C_n) = C_n$. Sehingga didapat $P_4(G) \cong G$.■

4.PENUTUP

4.1 SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Misal $G, G' \in \mathscr{G}_3$. Asumsikan G dan G' memenuhi salah satu kondisi dibawah ini:
   i. Jika u adalah titik dari suatu segitiga di G, maka $d(u) \geq 4$.
   ii. G dan G' tidak memuat sebarang C_4 sebagai subgraf.

   maka,
   a. $P_4(G)$ isomorfik ke $P_4(G')$ jika dan hanya jika graf garis $L(G)$ isomorfik ke $L(G')$.
   b. $P_4(G)$ isomorfik ke $P_4(G')$ jika dan hanya jika G isomorfik ke G'.
   c. Pemetaan P_4 merupakan fungsi satu-satu
2. Jika G sebuah graf maka $P_4(G)$ tidak memuat segitiga
3. Hubungan isomorfis suatu graf G dan graf lintasan $P_4(G)$ diperoleh bahwa, $G \cong P_4(G)$ jika dan hanya jika graf G merupakan sikel dengan panjang minimal 4.

4.2 SARAN

Dalam mempelajari lebih mendalam mengenai graf lintasan, $P_k(G)$ graf lintasan dengan k titik, $k \geq 4$ beserta aplikasi yang terkait dapat menjadi suatu inspirasi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Budayasa, I. Ketut, Ph.D(2007) Teori Graph dan Aplikasinya. Surabaya. University Press, Universitas Negeri Surabaya.

[2] H.J.Broersma and C. Hoede (1989)Path graph. J. Graph Theory 13(2), pp.427-444

[3] Li,Xueliang and Zhao B.(1997). Isomorphisms of P4-graphs. Australasian Journal of Combinatorics 15, pp.135-143

[4] R. L. Hemminger and L. W. Beineke.(1978). Line graphs and line digraphs, in: Selected Topics in Graph Theory (Eds. L. W. Beineke and R. J. Wilson), pp.271-305. Academic press, London.

[5] Witno,Amin.(2006).Graph Theory. WON Series in Discrete Mathematics and Modern Algebra vol. 4 [Online]. http://www.philadelphia.edu.jo/math/witno/notes/won4.pdf). [Diakses: 24 Mei 2012].