ESTIMASI *MISSING* DATA DALAM MULTIVARIAT
BERDASARKAN DATA YANG TERAMATI

Hutrisah S.M Sitohang[1], Prof. I Ketut Budayasa, Ph.D[2].
[1] Jurusan Matematika, Fakultas Martematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, UNESA
Kampus Ketintang 60231,Surabaya
Email : hutrisa-sitohang@yahoo.co.id[1],ketutbudayasa@yahoo.com[2]

ABSTRAK

Missing data adalah informasi yang tidak tersedia dalam sebuah subyek atau kasus. Fenomena *missing* data banyak dijumpai dalam survei. Banyak hal yang menyebabkan terjadinya *missing* data. Sehingga terkadang beberapa pihak tertentu mengabaikan, menghapus sebagian variabel yang mengandung *missing*. Mengingat data sangat mahal dan berharga, maka penelitian ini, menduga parameter yang membuat fungsi *likelihood* maksimum untuk data yang seluruhnya teramati dan juga diamati sebanyak *n* anggota sebagai sampel (dengan $n<N$), dengan menggunakan data teramati maka nilai harapan bersyarat data tidak teramati $Y^{(N-n)}$ juga akan maksimum. Algoritma EM adalah salah satu metode yang menangani kasus *missing*. Ketika algoritma EM menghasilkan nilai penduga parameter maka penduga parameter tersebut merupakan nilai tunggal yang tetap.

Kata kunci : Missing data, Maksimum likelihood, Algoritma ekspektasi maksimum (EM).

1. PENDAHULUAN

Permasalahan *missing* data merupakan permasalahan yang sudah muncul sejak lama. *Missing* data pertama kali diperkenalkan oleh Orchard dan Woodbury (1972). *Missing* data merupakan informasi yang tidak tersedia dalam sebuah subyek atau kasus. Dalam Statistical Package for The Sosial Science (SPSS) *missing* data adalah adanya sel – sel kosong pada satu atau beberapa variabel. Banyak hal yang menyebabkan terjadi *missing* data, seperti peralatan yang tidak berfungsi dengan baik, kesalahan mekanis, penolakan dari responden untuk menjawab kuisioner, dan tidak adanya jawaban dari setiap pertanyaan yang spesifik sehingga tidak mengetahui variabel yang dipermasalahkan. Prinsip *missing* data telah banyak diterapkan untuk menyelesaikan berbagai masalah prediksi dan penduga parameter.

Banyak ahli matematika mempelajari tentang perluasan konsep tersebut. Salah satunya pada jurnal statistik yang berjudul *A Note On The Missing Value Principle And The EM-Algorithm For Estimation And Prediction In Sampling From Finite Populations With A Multinormal Superpopulation Model* yang disusun oleh S. Zacks dari N.Y, USA dan Josemar Rodriguez dari Brazil The University of Sao Paulo.

Berdasar jurnal tersebut skripsi ini membahas mengenai estimasi *missing* data dalam multivariat berdasarkan data yang teramati. Bertujuan untuk mengestimasi fungsi *likelihood* untuk seluruh data *Y* teramati dan data sebanyak *n* data sampel teramati sehingga penduga parameternya maksimum.. Model linier $Y = X\beta + e$ berdistribusi normal untuk fungsi *likelihood* pada data teramati sebanyak *n* dengan $n < N$. Tulisan ini merupakan hasil rangkuman dan kolaborasi dari defenisi dan teorema pada sumber [4]dan [8].

2. KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas mengenai beberapa defenisi, metode yang akan digunakan sebagai landasan teori pada pembahasan.

2.1 Missing Data

Missing data adalah informasi yang tidak tersedia untuk sebuah subyek (kasus). Dalam *Statistical Package for the Social Science* (SPSS) *missing* data adalah adanya sel-sel kosong pada satu atau beberapa variabel. Tujuan data *missing* untuk memprediksi dan mendapatkan cara penggantian suatu nilai konstanta terhadap nilai yang *missing* .

2.2 Pola missing data

Ada beberapa jenis pola data *missing* yaitu :

pola data missing univariat, pola multivariat nonrespone, pola data missing monoton, pola data missing tanpa strutur khusus, pola matching pattern, pola faktor analisis.

2.3 Asumsi mekanisme missing data

Litlle dan Rubin (1987) mengklasifikasi mekanisme *missing* data dalam tiga hal yaitu: *Missing Completely at Random* (MCAR), *Missing at Random* (MAR), dan *Non-ignorable*.

2.4 Model regresi linier multivariat

Model regresi linier $\underset{(N\times 1)}{Y} = \underset{(N\times p)}{X}\,\underset{(p\times 1)}{\beta} + \underset{(N\times 1)}{e}$

Jika ditulis dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \\ \hdashline Y_{n+1} \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \\ \hdashline X_{n+1} & X_{n+2} & \cdots & X_{n+p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_{N1} & X_{N2} & \vdots & X_{Np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}$$

Y ini adalah vektor pengamatan yang terdiri atas *N* populasi. Dimana vektor tersebut diamati sebanyak- *n* dengan $n < N$ berarti yang tidak teramati sebanyak *N-n.* Sehingga vektor *Y* dan *V* dapat dipartisi sebagai berikut :

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ \hdashline y_{n+1} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{(n)} \\ \hdashline Y^{(N-n)} \end{bmatrix} \text{ dan } V = \left[\begin{array}{c:c} V_{11} & V_{12} \\ \hdashline V_{21} & V_{22} \end{array}\right]$$

Dimana :

Submatriks V_{11} berordo $n \times n$

Submatriks V_{12} berordo $n \times (N-n)$

Submatris V_{21} berordo $(N-n) \times n$

Submatriks V_{22} berordo $(N-n) \times (N-n)$

2.5 Maksimum *likelihood* estimator

Metode MLE (*Maximum Likelihood Estimator*) adalah suatu metode penaksiran parameter yang dapat digunakan untuk menaksir parameter suatu model yang diketahui distribusinya. Sebagaimana diketahui bahwa taksiran parameter melalui metode MLE adalah melakukan turunan parsial fungsi *likelihood* terhadap parameter yang akan ditaksir.

Misal model linier $Y = X\beta + e$, diasumsikan berdistribusi normal maka fungsi *likelihood* pada data teramati $y^{(n)}$ adalah ;

$$L\left(\beta; y^{(n)}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} V_{11}^{1/2}} \left[e^{-\frac{1}{2}} \left(y^{(n)} - X_1\beta\right)' V_{11} \left(y^{(n)} - X_1\beta\right) \right]$$

Dimana, estimasi fungsi *likelihood* (MLE) dari β, akan maksimum jika $\beta = \hat{\beta}$, dengan

$$\hat{\beta} = \left[X_1{}' V_{11}^{-1} X_1 \right]^{-1} X_1 V_{11}^{-1} y^{(n)}.$$

2.6 Algoritma EM

Algoritma (EM) merupakan metode yang digunakan untuk menemukan parameter-parameter *maximum likelihood* dari distribusi himpunan data yang diketahui, jika himpunan data tersebut *incomplete* atau mempunyai nilai yang hilang *(missing value)*. .

Pada beberapa permasalahan data *incomplete* , distribusi data lengkap (*complete*) *Y* dapat dihitung dengan :

$$P(Y \mid \beta) = P\left(y^{(n)} \mid \beta\right) P\left(Y^{(N-n)} \mid y^{(n)}; \beta\right)$$

Persamaan diatas dengan nilai β dapat dituliskan sebagai berikut :

$$l(\beta \mid Y) = l\left(\beta \mid y^{(n)}\right) + \log P\left(Y^{(N-n)} \mid y^{(n)}, \beta\right) + c$$

dengan *c* adalah konstanta sembarang. Johnson dan Wichern (2002) menyatakan bahwa EM algoritma terdiri atas tahap prediksi *(prediction step)* tahap estimasi *(estimation step)* dan tahap maksimum *(maximation step).*

2.7 Turunan matriks

Jika vektor $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ dan vektor $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Maka didefinisikan :

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_n} & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Beberapa sifat turunan matriks :

1. Jika $y = f(x) = Ax$ maka $\frac{\partial f}{\partial x} = A'$ dan $\frac{\partial f}{\partial x'} = A$
2. Jika A matriks persegi dan $y = f(x) = x'Ax$ sehingga $\frac{\partial f}{\partial x} = (A + A')x$ dan $\frac{\partial f}{\partial x} = x'(A + A')$
3. Jika A matriks simetri maka $A = A'$ sehingga $\frac{\partial f}{\partial x} = 2Ax$

3. PEMBAHASAN

Pada pembahasan berikut beberapa permasalahan akan dibahas yaitu mengestimasi fungsi *likelihood* untuk seluruh data Y teramati sehingga penduga parameternya maksimum, mengestimasi fungsi *likelihood* jika sebanyak n data sampel teramati dan mengestimasi fungsi *likelihood* $(N-n)$ data yang tidak teramati

3.1 Mengestimasi Fungsi *Likelihood* Untuk Seluruh Data *Y* Teramati.

Pada teorema berikut akan dibuktikan jika data yang digunakan teramati seluruhnya berdistribusi normal ketika suatu populasi Y teramati seluruhnya, dan kemudian dicari penduga parameter β yang membuat fungsi *likelihood* maksimum .

Teorema 3.1

Jika diberikan fungsi *likelihood* yang berdistribusi normal $L(\beta;Y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}|V|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(Y-X\beta)'V^{-1}(Y-X\beta)}$

diamati sebanyak *Y*, maka penduga parameter akan maksimum jika $\hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y$.

Bukti :

Untuk mendapatkan $\hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y$ akan dicari fungsi *likelihood* dengan mengalikan terhadap logaritma natural, diperoleh sebagai berikut :

$$\ln L(\beta;Y) = \ln \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}|V|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(Y-X\beta)'V^{-1}(Y-X\beta)}$$

$$\ln L(\beta;Y) = \ln \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}|V|^{\frac{1}{2}}} + \ln\left[e^{-\frac{1}{2}(Y-X\beta)'V^{-1}(Y-X\beta)}\right]$$

$$= \ln \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}|V|^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}(Y-X\beta)'V^{-1}(Y-X\beta) \qquad (3.1.1)$$

Selanjutnya mencari nilai penduga yang memakimumkan fungsi *likelihood* tersebut. Dilakukan dengan menurunkan parsial terhadap parameter (β), kemudian persamaan hasil turunan disamadengankan nol.

Untuk turunan parsial $\ln L(\beta;Y)$ terhadap parameter β adalah :

$$= \frac{\partial \ln \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}|V|^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}(Y-X\beta)'V^{-1}(Y-X\beta)}{\partial\beta}$$

$$\frac{\partial \ln \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}|V|^{\frac{1}{2}}}}{\partial\beta} - \frac{\partial \frac{1}{2}(Y-X\beta)'V^{-1}(Y-X\beta)}{\partial\beta}$$

$$= -\frac{\delta}{\delta\beta}\left(\frac{1}{2}\right)(Y-X\beta)'V^{-1}(Y-X\beta)$$

MLE diperoleh jika $\frac{\partial \ln L(\beta;Y)}{\partial\beta} = 0$

atau $-\frac{\delta}{\delta\beta}\left(\frac{1}{2}\right)(Y-X\beta)'V^{-1}(Y-X\beta) = 0$

Berdasar sifat turunan matriks $y = f(x) = x'Ax$

maka $\frac{\partial f}{\partial x} = (A + A')x$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{2}(Y-X\beta)'V^{-1}(Y-X\beta)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(-X)'\left(V^{-1} + (V^{-1})'\right)(Y-X\beta)$$

Karena V^{-1} matriks simetris maka $(V^{-1})'$ juga simetri $V^{-1} = (V^{-1})'$ .Jadi $V^{-1} + (V^{-1})' = 2V^{-1}$.

Dengan demikian ,

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{2}(Y-X\beta)'V^{-1}(Y-X\beta)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(-X')(2V^{-1})(Y - X\beta)$$
$$= -X'V^{-1}(Y - X\beta)$$
$$= -X'V^{-1}Y - X'V^{-1}X\beta$$

Diperoleh persamaan karateristik :

$-X'V^{-1}Y - X'V^{-1}X\beta = 0$ ini ekivalen dengan :

$X'V^{-1}X\beta = X'V^{-1}Y$

Maka , $\beta = \left(X'V^{-1}X\right)' X'V^{-1}Y$.

Jadi, penduga parameter β yang memaksimumkan fungsi *likelihood* adalah :

$\hat{\beta} = \left(X'V^{-1}X\right)' X'V^{-1}Y$.

Dengan demikian teorema terbukti. $\square$

3.2 Mengestimasi Fungsi *Likelihood* Jika Sebanyak *N* Data Sampel Teramati

Misalkan dari populasi yang beranggotakan sebanyak *N*, tidak semuanya teramati. Berarti ada data yang tidak teramati atau hilang (‘*missing*’). Misalkan data yang teramati hanya sebanyak *n* dengan $n < N$. Berarti yang tidak teramati sebanyak $N - n$. Sehingga vektor *Y* dan *V* dapat dipartisi sebagai berikut :

Fungsi *likelihood* dari β , didasarkan atas submatriks pengamatan $y^{(n)}$ adalah :

$$L\left(\beta; y^{(n)}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|V_{11}\right|^{\frac{1}{2}}}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(y^{(n)} - X_1\beta\right)' V_{11}^{-1}\left(y^{(n)} - X_1\beta\right)}\right]$$

Teorema 3.2

Fungsi $L\left(\beta; y^{(n)}\right)$ akan maksimum jika $\beta = \hat{\beta}$ dengan $\hat{\beta} = \left(X_1' V_{11}^{-1} X_1\right)^{-1} X_1' V_{11}^{-1} y^{(n)}$.

Bukti :

Analog dengan bukti teoerma 3.1

Teorema berikut adalah ekspektasi (nilai harapan) subvektor acak $Y^{(N-n)}$ jika diberikan subvektor $y^{(n)}$ dan β .

Teorema 3.3

$E\left[Y^{(N-n)} \mid y^{(n)}, \beta\right] = Ay^{(n)} + B\beta$,

dimana $A = V_{21}V_{11}^{-1}$ dan $B = X_2 - V_{21}V_{11}^{-1}X_1$

Bukti :

Fungsi padat peluang *Y* dalam $y^{(n)}$ dan $Y^{(N-n)}$ adalah :

$$f\left(y^{(n)}, Y^{(N-n)}\right) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22}\end{bmatrix}^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} y^{(n)-\mu_1} \\ Y^{((N-n)-\mu_2)}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} y^{(n)-\mu_1} \\ Y^{((N-n)-\mu_2)}\end{bmatrix}}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{N}{2}}\left|V_{11}\right|^{-\frac{1}{2}}\left|K\right|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} y^{(n)-\mu_1} \\ Y^{((N-n)-\mu_2)}\end{bmatrix}' V^{-1}\begin{bmatrix} y^{(n)-\mu_1} \\ Y^{((N-n)-\mu_2)}\end{bmatrix}}$$

dengan $K = V_{22} - V_{21}V_{11}^{-1}V_{12}$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} -K^{-1} & -K^{-1}V_{21}V_{11}^{-1} \\ -V_{11}^{-1}V_{12}K^{-1} & V_{11}^{-1} + V_{11}^{-1}V_{12}K^{-1}V_{21}V_{11}^{-1}\end{bmatrix}$$

$$f\left(y^{(n)}, \beta\right) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left|V_{11}\right|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(y^{(n)} - \mu_1\right)' V_{11}^{-1}\left(y^{(n)} - \mu_2\right)}$$

sehingga,

$$f\left(Y^{(N-n)} \mid y^{(n)}, \beta\right) = (2\pi)^{-(N-n)/2}\left|K\right|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(y^{(n)} - a\right)' K^{-1}\left(y^{(n)} - a\right)}$$

dengan $a = \mu_2 + V_{21}V_{11}^{-1}\left(y^{(n)} - \mu_1\right)$.

Dengan demikian,

$$E\left[Y^{(N-n)} \mid y^{(n)}, \beta\right] = \mu_2 + V_{21}V_{11}^{-1}\left(y^{(n)} - \mu_1\right)$$
$$= X_2\beta + V_{21}V_{11}^{-1}\left(y^{(n)} - X_1\beta\right)$$
$$= V_{21}V_{11}^{-1}y^{(n)} + \left(X_2 - V_{21}V_{11}^{-1}X_1\right)\beta$$

Karena $A = V_{21}V_{11}^{-1}$ dan $B = X_2 - V_{21}V_{11}^{-1}X_1$,

maka $E\left[Y^{(N-n)} \mid y^{(n)}, \beta\right] = Ay^{(n)} + B\beta$

Dengan demikian teorema terbukti. $\square$

3.3 Mengestimasi fungsi *likelihood* $(N-n)$ data yang tidak teramati jika diberikan data termati.

Dari penduga β pada teorema 3.2 dan nilai harapan $Y^{(N-n)}$ diberikan $y^{(n)}$ dan β pada teorema 3.3, kita definisikan suku barisan $\beta^{(p)}$ sebagai berikut :

$$\beta^{(p+1)} = (X_1' V_{11}^{-1} X_1)^{-1}\ X_1 V_{11}^{-1}\begin{bmatrix} y^{(n)} \\ Ay^{(n)} + B\beta^{(p)}\end{bmatrix}$$

Dimana $\beta^{(p)}$ matriks yang entrinya sembarang bilangan. Selanjutnya klaim :

Jika $V^{-1} = \sum = \begin{bmatrix} \sum_{11} & \sum_{12} \\ \sum_{21} & \sum_{22}\end{bmatrix}$ maka :

$$\sum_{11} = V_{11}^{-1} + V_{11}^{-1}V_{12}\left(V_{22} - V_{21}V_{11}^{-1}V_{12}\right)^{-1}V_{21}V_{11}^{-1}$$
$$\sum_{12} = -V_{11}^{-1}V_{12}\left(V_{22} - V_{21}V_{11}^{-1}V_{12}\right)^{-1}$$
$$\sum_{12} = -V_{11}^{-1}V_{12}\left(V_{22} - V_{21}V_{11}^{-1}V_{12}\right)^{-1} \qquad (3.1.5)$$
$$\sum_{21} = \sum_{12}'$$

Bukti (3.1.5) telah dibuktikan dalam *Applied Multivariate Statistical Analysis* [4, hal. 170] oleh Johnson dan Wichern .
Didefenisikan vektor yang entri – entrinya adalah fungsi dalam β sebagai berikut :

$$H(\beta)=\left(X_1{}'V_{11}^{-1}X_1\right)^{-1}X_1V_{11}^{-1}\begin{bmatrix} y^{(n)} \\ Ay^{(n)}+B\beta \end{bmatrix}$$

Jelas bahwa limit dari barisan $\beta^{(p)}$ untuk $p\to\infty$ adalah titik tetap dari fungsi $H(\beta)$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa penduga β dari titik tetap fungsi $H(\beta)$ adalah tunggal yaitu $\hat{\beta}$.

Teorema 3.4

$H(\beta)=\hat{\beta}=\left(X_1{}'V_{11}^{-1}X_1\right)^{-1}X_1V_{11}^{-1}y^{(n)}$ adalah tunggal.

Bukti:

Misalkan $Q=X'V^{-1}X$

Maka,

$$Q=X_1{}'\sum{}_{11}X_1+X_1{}'\sum{}_{12}+X_2{}'\sum{}_{21}X_1+X_2{}'X_2$$

Sebuah titik (nilai) β merupakan sebuah titik tetap jika dan hanya jika :

$$Q\beta=\left[X_1{}'\left(\sum{}_{11}+\sum{}_{12}A\right)+X_2{}'\left(\sum{}_{21}+\sum{}_{22}A\right)\right]y^{(n)}+\left(X_1{}'\sum{}_{12}+X_2{}'\sum{}_{22}\right)B\beta$$

Ini ekivalen dengan :

$$\left\{Q-\left(X_1{}'\sum{}_{12}+X_2{}'\sum{}_{22}\right)B\right\}\beta=\left[X_1{}'\left(\sum{}_{11}+\sum{}_{12}A\right)+X_2{}'\left(\sum{}_{21}+\sum{}_{22}A\right)\right]y^{(n)}$$

Selanjutnya dari (3.1.5) diperoleh:

$$\left(X_1{}'V_{11}^{-1}X_1\right)^{-1}\left(X_1{}'V_{11}^{-1}X_1\right)\beta=\left(X_1{}'V_{11}^{-1}X_1\right)^{-1}X_1V_{11}^{-1}y^{(n)}$$

Sehingga, $\hat{\beta}$ adalah titik tetap yang tunggal dan konvergen ke β . Dengan demikian teorema terbukti. $\square$

4. PENUTUP

4.1 Simpulan

Berdasarkan rumusan masalah dan hasil pembahasan sebelumnya, diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Mengestimasi fungsi *likelihood* untuk seluruh data Y teramati sehingga penduga parameternya maksimum dapat diperoleh dengan metode maksimum *likelihood*.
2. Penduga parameter untuk seluruh data teramati dan yang sebagian teramati ternyata berbeda.
3. Untuk mengestimasi nilai harapan bersyarat dibutuhkan data teramati $y^{(n)}$ dan parameter.
4. Limit dari barisan $\beta^{(p)}$ untuk $p\to\infty$ adalah titik tetap dari fungsi $H(\beta)$ dan penduga β dari titik tetap fungsi $H(\beta)$ adalah tunggal.

4.2 Saran

Dalam penelitian ini penulis hanya membahas tentang mengestiamsi parameter yang membuat fungsi *likelihood* maksimum dengan menggunakan *maximum likelihood* dan pendekatan algoritma EM. Bagi para pembaca yang tertarik mengembangkan dapat menggunakan metode lain.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anderson , T.W. *An Introduction To Multivariate Statistical Analysis*. Second Edition.

[2] Dempster , A. P., Laird, N.M dan Rubin, D.B. (1977) *Maximum Likelihood From Incomplete Data Via The EM Algorithm* (with discssion). Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 1-38 .249-261.

[3] Howell , David . C. .*Pengobatan Data Hilang*. (Online),(file:///E:/science%20direc%20missin%20value/hub/pengobatan%20dt%20hilang.htm) (diakses 31 Maret 2012).

[4] Johnson , Richard. A. dan Wichern , Dean W. *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Sixth Edition. Madison : University of Wisconsin and Texas A & M University.

[5] Litte , R.J.A and Rubin , D.B (2002) . *Statistical Analysis Missing Data. Wiley Series in Probability and Statistic*. Wiley-Interscience [Jhon Wiley & Sons], Hoboken , NJ, Second Edition.

[6] Mayann, Hill, Tanpa tahun. *SPSS Missing Value Analysis 7.5*. (Online),(http://www.spss.com) (diakses senin, 8 oktober 2012).

[7] Schafer, J.L. (1997) *Analysis of Incomplete Multivariate Data*. Chapman & Hall, London.Department Of Statistics The Pennsylvania State University USA.

[8] Zacs, S. Dan Rodriguez, Josemar. (1986) *A Note On The Missing Value Principle And The EM-Algorithm For Estimation And Prediction In Sampling From Finite Populations With A Multinormal Superpopulation Model*. Journal Of The Royal Statistics & Probability Letters 4 (1986) 35-37 North – Holland.