MATHunesa

Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 6 No.3 Tahun 2018*

ISSN 2301-9115

SIFAT-SIFAT Q-ALJABAR

Moh. Badriqul Mudrik

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : mohmudrik@unesa.ac.id

Agung Lukito

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail **:** agunglukito@unesa.ac.id

Abstrak

Himpunan tak-kosong X yang memuat konstanta 0 dengan suatu operasi biner $*$ disebut Q-aljabar jika memenuhi aksioma (Q1) $x * x = 0$, (Q2) $x * 0 = x$, dan (Q3) $(x * y) * z = (x * z) * y$, untuk setiap $x, y, z \in X$. Artikel ini membahas Q-aljabar yang merupakan perluasan dari BCK/BCI/BCH-aljabar. Selain itu artikel ini juga membahas sifat-sifat dari Q-aljabar; yaitu, G-bagian dan ideal pada Q-aljabar, serta Q-aljabar medial. Pada suatu Q-aljabar $(X; *, 0)$ berorder 3, $G(X)$ adalah ideal jika dan hanya jika $G(X)$ berorder 1. $(X; *, 0)$ adalah Q-aljabar medial jika dan hanya jika $x * (y * z) = z * (y * x)$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

Kata kunci: Q-aljabar, G-bagian, ideal, Q-aljabar medial

Abstract

The non - empty set X which contains a constant 0 with a binary operation $*$ is called Q-algebra if it satisfies the axiom (Q1) $x * x = 0$, (Q2) $x * 0 = x$, and (Q3) $(x * y) * z = (x * z) * y$, for all $x, y, z \in X$. This article discusses Q-algebra which is an extension of *BCK* / *BCI* / *BCH*-algebra. In addition this article also discusses the properties of Q-algebra; namely, G-part and ideal in Q-algebra, as well as medial Q-algebra. In a Q-algebra $(X; *, 0)$ with order 3, $G(X)$ is ideal if and only if $G(X)$ is ordered 1. $(X; *, 0)$ is a medial Q-algebra if and only if $x * (y * z) = z * (y * x)$ for each $x, y, z \in X$.

Keywords: Q-algebra, G-part, ideal, medial Q-algebra

PENDAHULUAN

Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak-kosong dengan satu operasi biner atau lebih dan memenuhi aksioma-aksioma yang berlaku di dalamnya. Struktur aljabar memiliki banyak contoh, seperti grup dan ring. Namun, terdapat contoh struktur aljabar lainnya yaitu Q-aljabar.

BCK-aljabar dan BCI-aljabar merupakan dua kelas dari struktur aljabar yang diperkenalkan oleh Y. Imai dan K. Iseki pada tahun1966. BCK-aljabar merupakan himpunan tak-kosong X yang memuat konstanta 0 dengan suatu operasi biner $*$ yang memenuhi aksioma: (1) $x * x = 0$, (2) $0 * x = 0$, (3) $\left(x * (x * y)\right) * y = 0$, (4) $\left((x * y) * (x * z)\right) * (z * y) = 0$, dan (5) Jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$, maka $x = y$ untuk setiap $x, y, z \in X$. BCI-aljabar merupakan himpunan tak-kosong X yang memuat konstanta 0 dengan suatu operasi biner $*$ yang memenuhi empat aksioma yang sama dari *BCK*-aljabar yaitu (1), (3), (4), dan (5) serta aksioma lainnya yaitu (6) Jika $x * 0 = 0$, maka $x = 0$, untuk setiap $x, y, z \in X$.

Selanjutnya, Hu dan Li memperkenalkan gagasan tentang BCH-aljabar yang merupakan perluasan dari BCK-aljabar dan BCI-aljabar pada tahun 1983. BCH-aljabar merupakan himpunan tak-kosong X yang memuat konstanta 0 dengan suatu operasi biner $*$ yang memenuhi dua aksioma dari *BCK*-aljabar dan *BCI*-aljabar yaitu (1) dan (5) serta aksioma lain yaitu (7) $(x * y) * z = (x * z) * y$, untuk setiap $x, y, z \in X$.

Pada tahun 2001, Neggers, Ahn, dan Kim memperkenalkan gagasan baru tentang Q-aljabar yang mempunyai keterkaitan dengan *BCH*-aljabar. Q-aljabar adalah suatu himpunan tak-kosong X dengan konstanta 0 dan operasi biner $*$ yang memenuhi dua aksioma dari *BCH*-aljabar yaitu (1) $x * x = 0$ dan (5) $(x * y) * z = (x * z) * y$, serta aksioma lain yaitu (8) $x * 0 = x$, untuk setiap $x, y, z \in X$.

Dengan demikian, pada skripsi ini akan dikaji lebih dalam mengenai Q-aljabar yang merupakan perluasan dari

BCH-aljabar. Masalah yang akan dibahas adalah sifat Q-aljabar, G-bagian dan ideal pada Q-aljabar. Selain itu akan dibahas juga sifat Q-aljabar medial yang telah diperkenalkan oleh S. S. Ahn dan K. S. So pada tahun 2010.

KAJIAN PUSTAKA

A. Operasi Biner

Definisi 2.1

Misalkan G suatu himpunan tak-kosong. Operasi biner pada himpunan G adalah fungsi yang memetakan $G \times G$ ke G.

(Gallian, 2010:40)

B. BCK-Aljabar

Definisi 2.2

BCK-aljabar merupakan himpunan tak-kosong X yang memuat konstanta 0 dengan suatu operasi biner $*$ yang memenuhi lima aksioma berikut: untuk setiap $x, y, z \in X$

(BCK1) $x * x = 0$,

(BCK2) $0 * x = 0$,

(BCK3) $(x * (x * y)) * y = 0$,

(BCK4) $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$,

(BCK5) Jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$, maka $x = y$.

(Chaudry, Fahad, dan Arshad, 2017:233)

C. BCI-Aljabar

Definisi 2.3

BCI-aljabar merupakan himpunan tak-kosong X yang memuat konstanta 0 dengan suatu operasi biner $*$ yang memenuhi lima aksioma berikut: untuk setiap $x, y, z \in X$

(BCI1) $x * x = 0$,

(BCI2) $(x * (x * y)) * y = 0$,

(BCI3) $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$,

(BCI4) Jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$, maka $x = y$,

(BCI5) Jika $x * 0 = 0$, maka $x = 0$.

(Chaudry, Fahad, dan Arshad, 2017:233)

D. BCH-Aljabar

Definisi 2.4

BCH-aljabar merupakan himpunan tak-kosong X yang memuat konstanta 0 dengan suatu operasi biner $*$ yang memenuhi tiga aksioma berikut: untuk setiap $x, y, z \in X$

(BCH1) $x * x = 0$,

(BCH2) Jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$, maka $x = y$,

(BCH3) $(x * y) * z = (x * z) * y$.

(Chaudry, Fahad, dan Arshad, 2017:233)

Pada teorema dibawah ini akan digunakan notasi $(X; *, 0)$ dengan penjelasan yaitu suatu himpunan X yang memuat elemen khusus 0 dengan operasi biner $*$.

Teorema 2.1

Misalkan $(X; *, 0)$ merupakan BCH-aljabar. Maka untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

(i) $(x * (x * y)) * y = 0$,

(ii) Jika $x * 0 = 0$ maka $x = 0$,

(iii) $x * 0 = x$.

(Chaudry, Fahad, dan Arshad, 2017:234)

Bukti:

Misalkan X merupakan BCH-aljabar dan untuk setiap $x, y, z \in X$.

(i) Akan dibuktikan $(x * (x * y)) * y = 0$.

$(x * (x * y)) * y = (x * y) * (x * y)$ (BCH3)

$= 0$ (BCH1)

Jadi, dapat dibuktikan bahwa $(x * (x * y)) * y = 0$.

(ii) Akan dibuktikan jika $x * 0 = 0$ maka $x = 0$.

Diketahui $x * 0 = 0$. Maka

$0 * x = (x * 0) * x$ (hipotesis)

$= (x * x) * 0$ (BCH3)

$= 0 * 0$ (BCH1)

$= 0$ (BCH1)

Berdasarkan (BCH2) diperoleh jika $x * 0 = 0$ dan $0 * x = 0$ maka $x = 0$. Jadi terbukti bahwa jika $x * 0 = 0$ maka $x = 0$. ■

(iii) Akan dibuktikan $x * 0 = x$.

Pertama akan dibuktikan $(x * 0) * x = 0$.

$(x * 0) * x = (x * x) * 0$ (BCH3)

$= 0 * 0$ (BCH1)

$= 0$ (BCH1)

Sehingga diperoleh $(x * 0) * x = 0$ ……… $(\circ)$

Selanjutnya akan dibuktikan $x * (x * 0) = 0$.

Berdasarkan Teorema 2.1 (i) diperoleh $(x * (x * 0)) * 0 = 0$. Akibatnya, berdasarkan Teorema 2.1 (ii) diperoleh $x * (x * 0) = 0$………………$(\circ\circ)$

Dari $(\circ)$ dan $(\circ\circ)$, berdasarkan ((BCH2)) diperoleh $x * 0 = x$. ■

PEMBAHASAN

Pada penelitian ini dibahas mengenai sifat dasar Q-aljabar, Q-aljabar medial, $\boldsymbol{G}$-bagian dan ideal pada Q-aljabar, dan beberapa sifat lainnya.

A. Sifat Q-Aljabar

Pada subbab ini dibahas mengenai sifat Q-aljabar.

Definisi 3.1

Q-aljabar merupakan himpunan tak-kosong X yang memuat konstanta 0 dengan suatu operasi biner $*$ dan memenuhi tiga aksioma berikut: untuk setiap $x, y, z \in X$

(Q1) $x * x = 0$

(Q2) $x * 0 = x$

(Q3) $(x * y) * z = (x * z) * y$.

(Neggers, Ahn, dan Kim, 2001:749)

Untuk selanjutnya akan digunakan notasi $(X; *, 0)$ dengan penjelasan yaitu suatu himpunan X yang memuat elemen khusus 0 dengan operasi biner $*$.

Contoh 3.1

Misalkan $X = \{0,1,2,3\}$ dengan operasi $*$ didefinisikan seperti pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Tabel Cayley operasi $*$

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	2	2	0	0
3	3	2	0	0

Jadi, X dengan operasi $*$ merupakan Q-aljabar karena memenuhi tiga aksioma Definisi 3.1.

Definisi 3.2

Pada Q-aljabar dapat didefinisikan relasi $\leq$ pada X sebagai berikut: misalkan $x, y \in X$

$$x \leq y \Leftrightarrow x * y = 0.$$

(Neggers, Ahn, dan Kim, 2001:749)

Teorema 3.1

Jika $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar, maka $\big(x * (x * y)\big) * y = 0$ untuk setiap $x, y \in X$.

(Neggers, Ahn, dan Kim, 2001:750)

Bukti:

Misalkan $(X; *, 0)$ Q-aljabar dan $x, y \in X$. Maka

$\big(x * (x * y)\big) * y = (x * y) * (x * y)$ (Q3)

$= 0.$ (Q1)

Jadi terbukti bahwa $\big(x * (x * y)\big) * y = 0$. ■

Teorema 3.2

Jika $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar, maka $0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y)$ untuk setiap $x, y \in X$.

(P. Yiarayong and P. Panpho, 2015:240)

Bukti:

Misalkan $(X; *, 0)$ Q-aljabar dan $x, y \in X$. Maka

$0 * (x * y) = \big((0 * y) * (0 * y)\big) * (x * y)$ (Q1)

$= \big((0 * y) * (x * y)\big) * (0 * y)$ (Q3)

$= \Big(\big((x * x) * y\big) * (x * y)\Big) * (0 * y)$ (Q1)

$= \Big(\big((x * y) * x\big) * (x * y)\Big) * (0 * y)$ (Q3)

$= \Big(\big((x * y) * (x * y)\big) * x\Big) * (0 * y)$ (Q3)

$= (0 * x) * (0 * y)$ (Q1)

Jadi terbukti bahwa $0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y)$. ■

Teorema 3.3

(i) Setiap BCH-aljabar $(X; *, 0)$ merupakan Q-aljabar.

(ii) Setiap Q-aljabar $(X; *, 0)$ merupakan BCH-aljabar jika memenuhi syarat berikut: jika $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x = y$.

(Neggers, Ahn, dan Kim, 2001:750)

Bukti:

(i) Berikut ini akan ditunjukkan bahwa setiap BCH-aljabar memenuhi sifat-sifat definisi Q-aljabar.
Misalkan $x, y, z \in X$.
1) $x * x = 0$ sudah terpenuhi dari (BCH1),
2) $x * 0 = x$ sudah terpenuhi dari Teorema 2.1 (iii),
3) $(x * y) * z = (x * z) * y$ sudah terpenuhi dari (BCH3).
Jadi, terbukti bahwa setiap BCH-aljabar $(X; *, 0)$ merupakan Q-aljabar.

(ii) Misalkan X Q-aljabar yang memenuhi syarat (i) jika $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x = y$.
Berikut ini akan ditunjukkan bahwa setiap Q-aljabar memenuhi sifat-sifat definisi BCH-aljabar.
Misalkan $x, y, z \in X$.
1) $x * x = 0$ sudah terpenuhi dari (Q1),
2) Jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$, maka $x = y$.
Sudah terpenuhi dari hipotesis (i).
3) $(x * y) * z = (x * z) * y$, sudah terbukti karena (Q3).
Jadi, terbukti bahwa Setiap Q-aljabar $(X; *, 0)$ merupakan BCH-aljabar jika memenuhi syarat: jika $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x = y$.

■

Teorema 3.4

Setiap Q-aljabar $(X; *, 0)$ merupakan BCI-aljabar jika memenuhi syarat berikut:

(i) $(x * y) * (x * z) = z * y$.

(ii) Jika $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x = y$.

(Neggers, Ahn, dan Kim, 2001:750)

Bukti:

Misalkan $(X; *, 0)$ Q-aljabar yang memenuhi (i) $(x * y) * (x * z) = (z * y)$ dan (ii) jika $x \leq y$

dan $y \leq x$, maka $x = y$. Berikut ini akan ditunjukkan setiap aksioma BCI-aljabar dipenuhi.
Misalkan $x, y, z \in X$.

1) $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = (z * y) * (z * y)$ (hipotesis (i))
$= 0$ (Q1)
2) $\big(x * (x * y)\big) * y = 0$, sudah terpenuhi dari Teorema 3.1.
3) $x * x = 0$, sudah terpenuhi dari (Q1).
4) Jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$, maka $x = y$. Sudah terpenuhi dari hipotesis (ii).
5) Jika $x * 0 = 0$, maka $x = 0$.
Berdasarkan (Q2) $x * 0 = x$. Sehingga terbukti $x = 0$.

Jadi, terbukti bahwa Setiap Q-aljabar $(X; *, 0)$ merupakan BCI-aljabar jika memenuhi syarat:
(i) $(x * y) * (x * z) = (z * y)$ dan (ii) jika $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x = y$. ∎

Teorema 3.5
Setiap Q-aljabar $(X; *, 0)$ merupakan BCK-aljabar jika memenuhi syarat berikut:
(i) $(x * y) * z = x * \big(z * (0 * y)\big)$.
(ii) Jika $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x = y$.
(iii) $(x * y) * x = 0$.
(Neggers, Ahn, dan Kim, 2001:751)

Bukti:
Misalkan $(X; *, 0)$ Q-aljabar yang memenuhi (i) $(x * y) * z = x * \big(z * (0 * y)\big)$, (ii) jika $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x = y$, dan (iii) $(x * y) * x = 0$. Berikut ini akan ditunjukkan setiap Q-aljabar memenuhi sifat-sifat definisi BCK-aljabar.
Misalkan $x, y, z \in X$.

1) $\big(x * (x * y)\big) * y = 0$, sudah terpenuhi dari Teorema 3.1.
2) $x * x = 0$, sudah terpenuhi dari (Q1).
3) $0 * x = (x * x) * x$ (Q1)
$= 0$ (hipotesis (iii))
4) Jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$, maka $x = y$. Sudah terpenuhi dari hipotesis (ii).
5) Berdasarkan 3), hipotesis (ii) dapat diubah menjadi $(x * y) * z = x * z$……………(iv)
Akibatnya, diperoleh
$\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = (x * y) * (z * y)$(iv)
$= \big((x * y) * (x * y)\big) * (z * y)$(iv)
$= \big((x * y) * (z * y)\big) * (x * y)$(Q3)
$= 0$ (hipotesis (iii))
Jadi, $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$ terpenuhi.

Jadi, terbukti bahwa setiap Q-aljabar $(X; *, 0)$ merupakan BCK-aljabar jika memenuhi syarat: (i) $(x * y) * z = x * \big(z * (0 * y)\big)$, (ii) jika $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x = y$, dan (iii) $(x * y) * x = 0$. ∎

B. G-bagian dan Ideal pada Q-Aljabar

Pada subbab ini dibahas mengenai G-bagian dan ideal pada Q-aljabar dan beberapa sifat lainnya.

Lemma 3.1
Jika $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar dan $x * y = x * z$, untuk suatu $x, y, z \in X$, maka $0 * y = 0 * z$.
(Neggers, Ahn, and Kim, 2001:751)

Bukti:
Misalkan $x, y, z \in X$ dan $x * y = x * z$. Maka
$(x * y) * x = (x * z) * x$ …………(i)
Ruas kiri persamaan (i) dapat diturunkan sebagai berikut :
$(x * y) * x = (x * x) * y$ (Q3)
$= 0 * y$ (Q1)
Ruas kanan persamaan (i) dapat diturunkan sebagai berikut :
$(x * z) * x = (x * x) * z$ (Q3)
$= 0 * z$ (Q1)
Jadi, berdasarkan persamaan (i) diperoleh hasil bahwa $0 * y = 0 * z$. ∎

Definisi 3.3
Misalkani $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar . Untuk setiap subhimpunan tak-kosong S dari X, didefinisikan
$$G(S) = \{x \in S | 0 * x = x\}.$$
Jika $S = X$, maka dapat dikatakan bahwa $G(X)$ merupakan G-bagian dari X.
(Neggers, Ahn, and Kim, 2001:751)

Akibat 3.1
Untuk $x, y, z \in G(X)$, berlaku:
Jika $x * y = x * z$, maka $y = z$
(Neggers, Ahn, and Kim, 2001:751)

Bukti:
Misalkan $x, y, z \in G(X)$ dan $x * y = x * z$. Berdasarkan Lemma 3.4, maka $0 * y = 0 * z$. Karena $y, z \in G(X)$, diperoleh $y = z$. ∎

Berdasarkan Akibat 3.1 di atas, dapat disimpulkan bahwa hukum kanselasi kiri berlaku di $G(X)$.

Proposisi 3.1
Misalkan $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar . Maka $x \in G(X)$ jika dan hanya jika $0 * x \in G(X)$.
(Neggers, Ahn, and Kim, 2001:752)

Bukti:
Misalkan $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar dan $x \in X$.

($\Longrightarrow$) Akan dibuktikan jika $x \in G(X)$ maka $0 * x \in G(X)$.
Diketahui $x \in G(X)$. Maka $0 * x = x \in G(X)$. Oleh karena itu sudah jelas bahwa $0 * x \in G(X)$.
($\Longleftarrow$) Akan dibuktikaan jika $0 * x \in G(X)$ maka $x \in G(X)$.
Diketahui $0 * x \in G(X)$. Maka $0 * (0 * x) = 0 * x$. Berdasarkan Akibat 3.1 diperoleh $0 * x = x$. Jadi terbukti bahwa $x \in G(X)$.

Jadi, terbukti bahwa misalkan $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar. Maka $x \in G(X)$ jika dan hanya jika $0 * x \in G(X)$. ■

Definisi 3.4
Untuk setiap Q-aljabar $(X; *, 0)$, himpunan

$$B(X) = \{x \in X | 0 * x = 0\}$$

disebut *p-radical* dari X. Jika $B(X) = \{0\}$, maka dapat dikatakan bahwa X merupakan Q-aljabar p-semisederhana.

(Neggers, Ahn, and Kim, 2001:752)

Proposisi 3.2
Berdasarkan definisi G-bagian dan p-*radical* diperoleh suatu sifat

$$G(X) \cap B(X) = \{0\}.$$

(Neggers, Ahn, and Kim, 2001:752)

Bukti:
Misalkan $x \in G(X) \cap B(X)$. Maka $x \in G(X)$ dan $x \in B(X)$. Karena $x \in G(X)$ maka $0 * x = x$, dan karena $x \in B(X)$ maka $0 * x = 0$. Sehingga $0 = x \in G(X) \cap B(X)$. Jadi, terbukti bahwa $G(X) \cap B(X) = \{0\}$. ■

Proposisi 3.3
Misalkan $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar dan $x, y \in X$. Maka $y \in B(X)$ jika dan hanya jika $(x * y) * x = 0$.

(Neggers, Ahn, and Kim, 2001:752)

Bukti:
Misalkan $(X; *, 0)$ merupakan Q-aljabar dan $x, y \in X$.
($\Longrightarrow$) Akan dibuktikan jika $y \in B(X)$ maka $(x * y) * x = 0$.
Diketahui $y \in B(X)$. Maka

$$\begin{aligned} 0 &= 0 * y && \text{(Definisi } B(X)) \\ &= (x * x) * y && \text{(Q1)} \\ &= (x * y) * x && \text{(Q3)} \end{aligned}$$

Jadi, terbukti jika $y \in B(X)$ maka $(x * y) * x = 0$.
($\Longleftarrow$) Akan dibuktikan jika $(x * y) * x = 0$ maka $y \in B(X)$.
Diketahui $x, y \in X$. Maka

$$\begin{aligned} (x * y) * x &= (x * x) * y && \text{(Q3)} \\ &= 0 * y && \text{(Q1)} \\ &= 0 && (y \in B(X)) \end{aligned}$$

Jadi, terbukti jika $(x * y) * x = 0$ maka $y \in B(X)$.
Jadi terbukti bahwa misalkan $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar dan $x, y \in X$. Maka $y \in B(X)$ jika dan hanya jika $(x * y) * x = 0$. ■

Definisi 3.5
Misalkan $(X; *, 0)$ Q-Aljabar dan A subhimpunan tak-kosong dari X. A disebut ideal dari X jika untuk setiap $x, y \in X$ berlaku dua sifat berikut:
1. $0 \in A$,
2. Jika $x * y \in A$ dan $y \in A$, maka $x \in A$.

Jelaslah bahwa $\{0\}$ dan X adalah ideal dari X. Kita menyebut $\{0\}$ dan X berturut-turut ideal nol dan ideal trivial dari X.

(Neggers, Ahn, dan Kim, 2001:752)

Proposisi 3.4
Misalkan $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar. Maka $B(X)$ merupakan ideal dari X.

(Neggers, Ahn, and Kim, 2001:752)

Bukti:
Karena $(0 * 0) * 0 = 0$, berdasarkan Proposisi 3.3, $0 \in B(X)$. Misalkan $x * y \in B(X)$ dan $y \in B(X)$. Maka berdasarkan proposisi 3.3, $\big((x * y) * x\big) * (x * y) = 0$. Berdasarkan (Q1) dan (Q3), $\big((x * y) * (x * y)\big) * x = 0 * x = 0$. Sehingga $x \in B(X)$. Oleh karena itu $B(X)$ adalah suatu ideal dari X. ■

Teorema 3.6
Misalkan $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar. Jika $G(X) = X$, maka X adalah p-semisederhana.

(Neggers, Ahn, and Kim, 2001:752)

Bukti:
Asumsikan $G(X) = X$. Berdasarkan Proposisi 3.2 diperoleh $\{0\} = G(X) \cap B(X) = X \cap B(X) = B(X)$. Sehingga X merupakan p-semisederhana. ■

Teorema 3.7
Jika $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar berorder 3, maka $|G(X)| \neq 3$, sehingga $G(X) \neq X$.

(Neggers, Ahn, and Kim, 2001:752)

Bukti:
Misalkan $X = \{0, a, b\}$ suatu Q-aljabar. Asumsikan $|G(X)| = 3$, artinya $G(X) = X$. Maka X dapat didefinisikan seperti pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Tabel Cayley operasi $*$

$*$	0	a	b
0	0	a	b
a	a	0	…
b	b	…	0

Selanjutnya misalkan $a * b = 0$. Jika $b * a = 0$, maka berdasarkan (Q3) diperoleh $(a * a) * b = (b * a) * a$. Jadi $0 * b = 0 * a$. Menurut Akibat 3.1 diperoleh $b = a$, kontradiksi. Jika $b * a = a$, maka $a = b * a = (0 * b) * a = (0 * a) * b = a * b = 0$, kontradiksi. Jika $b * a = b$, maka $b = b * a = (0 * b) * a = (0 * a) * b = a * b = 0$, kontradiksi. Selanjutnya misalkan $a * b = a$. Jika $b * a = 0$, maka $a = a * b = (0 * a) * b = (0 * b) * a = b * a = 0$, kontradiksi. Jika $b * a = a$, maka $b = 0 * b = (a * a) * b = (a * b) * a = a * a = 0$, kontradiksi. Jika $b * a = b$, maka $b = b * a = (0 * b) * a = (0 * a) * b = a * b = a$, kontradiksi. Selanjutnya misalkan $a * b = b$. Jika $b * a = 0$, maka $b = a * b = (0 * a) * b = (0 * b) * a = b * a = 0$, kontradiksi. Jika $b * a = a$, maka $b = a * b = (0 * a) * b = (0 * b) * a = b * a = a$, kontradiksi. Jika $b * a = b$, maka $a = 0 * a = (b * b) * a = (b * a) * b = b * b = 0$, kontradiksi. Jadi terbukti bahwa jika X Q-aljabar dengan order 3, maka $|G(X)| \neq 3$. ■

Proposisi 3.5

Jika $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar berorder 2, maka G-bagian $G(X)$ dari X merupakan ideal dari X.

(Neggers, Ahn, and Kim, 2001:753)

Bukti:

Misalkan $|X| = 2$. Maka G-bagian dari X adalah $G(X) = \{0\}$ atau $G(X) = X$. Berdasarkan Definisi 3.5, $\{0\}$ dan X berturut-turut merupakan ideal nol dan ideal trivial pada X, maka G-bagian $G(X)$ dari X merupakan ideal dai X. ■

Teorema 3.8

Misalkan $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar berorder 3. Maka $G(X)$ suatu ideal dari X jika dan hanya jika $|G(X)| = 1$.

(Neggers, Ahn, and Kim, 2001:753)

Bukti:

($\Leftarrow$) Misalkan $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar berorder 3. Jika $|G(X)| = 1$, maka $G(X) = \{0\}$. Jelaslah bahwa $G(X)$ merupakan ideal dari X

($\Rightarrow$) Asumsikan $G(X)$ suatu ideal dari X. Berdasarkan Teorema 3.7, maka banyak order $G(X)$ tidak lain adalah $|G(X)| = 1$ atau $|G(X)| = 2$. Misalkan $|G(X)| = 2$. Maka elemen dari $G(X)$ tidak lain adalah $G(X) = \{0, a\}$ atau $G(X) = \{0, b\}$. Jika $G(X) = \{0, a\}$, maka $b * a \notin G(X)$ karena $G(X)$ adalah ideal dari X. Sehingga $b * a = b$. Maka $a = 0 * a = (b * b) * a = (b * a) * b = b * b = 0$, kontradiksi. Selanjutnya untuk $G(X) = \{0, b\}$ dengan menggunakan cara yang sama mengakibatkan kontradiksi. Oleh karena itu $|G(X)| \neq 2$ dan $|G(X)| = 1$. Jadi terbukti bahwa $G(X)$ suatu ideal jika $|G(X)| = 1$. ■

Definisi 3.6

Suatu ideal A dari Q-aljabar $(X; *, 0)$ dikatakan implikatif jika $(x * y) * z \in A$ dan $y * z \in A$, mengakibatkan $x * z \in A$, untuk setiap $x, y, z \in X$.

(Neggers, Ahn, dan Kim, 2001:753)

Teorema 3.9

Misalkan $(X; *, 0)$ merupakan Q-aljabar dan misalkan A merupakan ideal implikatif dari X. Maka A memuat G-bagian $G(X)$ dari X.

(Neggers, Ahn, dan Kim, 2001:753)

Bukti:

Diketahui A ideal implikatif dari X. Misalkan $x \in G(X)$. Maka $0 * x = x$. Perhatikan bahwa $(0 * x) * x = x * x = 0$. Karena $0 \in A$, maka $(0 * x) * x \in A$. Jelaslah bahwa $x * x \in A$. Karena A ideal implikatif, maka diperoleh $0 * x \in A$. Tetapi $0 * x = x \in G(X)$. Jadi $x \in A$. Sehingga oleh sebab itu $G(X) \subset A$. ■

C. Q-Aljabar Medial

Pada subbab ini akan dibahas mengenai sifat Q-aljabar medial.

Definisi 3.7

Suatu Q-aljabar $(X; *, 0)$ dikatakan medial jika memenuhi sifat:

$$(x * y) * (z * u) = (x * z) * (y * u),$$

untuk setiap $x, y, z, u \in X$.

(Ahn dan So, 2010:369)

Lemma 3.2

Jika $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar medial, maka $y * x = 0 * (x * y)$ untuk setiap $x, y \in X$.

(P. Yiarayong and P. Panpho, 2015:240)

Bukti:

Misalkan $(X; *, 0)$ Q-aljabar dan $x, y \in X$. Maka

$$\begin{aligned} y * x &= (y * x) * 0 && \text{(Q2)} \\ &= (y * x) * (y * y) && \text{(Q1)} \\ &= (y * y) * (x * y) && \text{(Q-aljabar medial)} \\ &= 0 * (x * y). && \text{(Q1)} \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $y * x = 0 * (x * y)$. ■

Teorema 3.10

$(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar medial jika dan hanya jika $x * (y * z) = z * (y * x)$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

(P. Yiarayong and P. Panpho, 2015:240)

Bukti:

($\Longrightarrow$) Akan dibuktikan jika $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar medial, maka $x * (y * z) = z * (y * x)$.

Misalkan $x, y, z \in X$. Maka

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= 0 * \big((y * z) * x\big) && \text{(Lemma 3.2)} \\ &= 0 * \big((y * x) * z\big) && \text{(Q3)} \\ &= z * (y * x). && \text{(Lemma 3.2)} \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $x * (y * z) = z * (y * x)$.

($\Longleftarrow$) Akan dibuktikan jika $x * (y * z) = z * (y * x)$, maka $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar medial.

Misalkan $x, y, z, u \in X$. Maka

$$\begin{aligned} (x * y) * (z * u) &= u * \big(z * (x * y)\big) && \text{(hipotesis)} \\ &= u * \big(y * (x * z)\big) && \text{(hipotesis)} \\ &= (x * z) * (y * u) && \text{(hipotesis)} \end{aligned}$$

Karena $(x * y) * (z * u) = (x * z) * (y * u)$ terpenuhi maka terbukti bahwa $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar medial.

Jadi terbukti bahwa $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar medial jika dan hanya jika $x * (y * z) = z * (y * x)$ untuk setiap $x, y, z \in X$. ■

Teorema 3.11

Jika $(X; *, 0)$ suatu Q-aljabar medial, maka $x * (x * y) = y$ untuk setiap $x, y \in X$.

(P. Yiarayong and P. Panpho, 2015:240)

Bukti:

Misalkan $(X; *, 0)$ Q-aljabar dan $x, y \in X$. Maka

$$\begin{aligned} x * (x * y) &= 0 * \big((x * y) * x\big) && \text{(Lemma 3.2)} \\ &= 0 * \big((x * x) * y\big) && \text{(Q3)} \\ &= y * (x * x) && \text{(Lemma 3.2)} \\ &= y * 0 && \text{(Q1)} \\ &= y. && \text{(Q2)} \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $x * (x * y) = y$. ■

SIMPULAN

Dalam penelitian ini telah dibahas mengenai sifat-sifat Q-aljabar yang telah diuraikan di atas. Berdasarkan pembahasan di atas dapat diperoleh simpulan sebagai berikut:

1. Sifat-sifat Q-aljabar adalah sebagai berikut:
   a. Jika X suatu Q-aljabar, maka $\big(x * (x * y)\big) * y = 0$ untuk setiap $x, y \in X$.
   b. Jika X suatu Q-aljabar, maka $0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y)$ untuk setiap $x, y \in X$.
   c. Setiap BCH-aljabar X merupakan Q-aljabar. Namun untuk sebaliknya belum tentu berlaku, sehingga diperlukan syarat tambahan yaitu "jika $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x = y$". Jadi, setiap Q-aljabar X yang memenuhi syarat "jika $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x = y$" merupakan BCH-aljabar .
   d. Setiap Q-aljabar X merupakan BCI-aljabar jika memenuhi syarat berikut: (i) $(x * y) * (x * z) = (z * y)$ dan (ii) jika $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x = y$.
   e. Setiap Q-aljabar X merupakan BCK-aljabar jika memenuhi syarat berikut: (i) $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$, (ii) jika $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x = y$, dan (iii) $(x * y) * x = 0$.
2. Sifat-sifat G-bagian dan ideal pada Q-aljabar adalah sebagai berikut:
   a. Jika X suatu Q-aljabar dan $x * y = x * z$, untuk suatu $x, y, z \in X$, maka $0 * b = 0 * c$.
   b. Untuk $x, y, z \in G(X)$, berlaku: jika $x * y = x * z$, maka $y = z$.
   c. Misalkan X suatu Q-aljabar. Maka $x \in G(X)$ jika dan hanya jika $0 * x \in G(X)$.
   d. Berdasarkan definisi G-bagian dan p-*radical* diperoleh suatu sifat $G(X) \cap B(X) = \{0\}$.
   e. Misalkan X suatu Q-aljabar dan $x, y \in X$. Maka $y \in B(X)$ jika dan hanya jika $(x * y) * x = 0$.
   f. Misalkan X suatu Q-aljabar. Maka $B(X)$ merupakan ideal dari X.
   g. Misalkan X suatu Q-aljabar. Jika $G(X) = X$, maka X adalah p-semisederhana.
   h. Jika X suatu Q-aljabar berorder 3, maka $|G(X)| \neq 3$, sehingga $G(X) \neq X$.
   i. Jika X suatu Q-aljabar berorder 2, maka G-bagian $G(X)$ dari X merupakan ideal dari X.
   j. Misalkan X suatu Q-aljabar berorder 3. Maka $G(X)$ suatu ideal dari X jika dan hanya jika $|G(X)| = 1$.
   k. Misalkan X merupakan Q-aljabar dan misalkan A merupakan ideal implikatif dari X. Maka A memuat G-bagian $G(X)$ dari X.
3. Sifat-sifat Q-aljabar medial adalah sebagai berikut:
   a. Jika X suatu Q-aljabar medial, maka $y * x = 0 * (x * y)$ untuk setiap $x, y \in X$.
   b. X suatu Q-aljabar medial jika dan hanya jika $x * (y * z) = z * (y * x)$ untuk setiap $x, y, z \in X$.
   c. Jika X suatu Q-aljabar medial, maka $x * (x * y) = y$ untuk setiap $x, y \in X$.

SARAN

Pada penelitian ini penulis membahas tentang sifat-sifat Q-aljabar, sifat-sifat Q-aljabar medial, sifat-sifat G-bagian dan ideal pada Q-aljabar. Penulis menyarankan kepada pembaca untuk dapat lebih mendalami dan mengembangkan sifat-sifat Q-aljabar yang belum dibahas pada penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Ahn, S. S., & So, K. S. 2010. *On Medial Q-Algebras*. Communications of the Korean Mathematical Sociaty, Vol. 25 (3): hal. 365-372.

Chaudry, M. A., Fahad, A. & Arshad, M. 2017. *Some Results About Generalized BCH-Algebras*. International Journal of Algebra, Vol. 11 (5): hal. 231-246.

Gallian, Joseph A. 2010. *Contemporary Abstract Algebra Seventh Editions.* Duluth: University of Minnesota Duluth.

Neggers, J., Ahn, S. S., & Kim, H. S. 2001. "*On Q-Algebras*". *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol. 27 (12): hal. 749-757.

Yiarayong, P., & Panpho, P. 2015. "*Some Basic Properties of* Γ *-Q-Algebra*". *Asian Journal of Applied Sciences*, Vol. 3 (2): hal. 238-243.