MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 7 No.3 Tahun 2019*
ISSN 2301-9115

HOMOMORFISME PADA BF-ALJABAR

Rizky Maslinda
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : rizkymaslinda@mhs.unesa.ac.id

Agung Lukito
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail **: agunglukito@unesa.ac.id**

Abstrak

Himpunan tak kosong X dengan operasi biner " $*$ " dan elemen khusus 0 disebut *BF*-aljabar jika memenuhi aksioma $x * x = 0, x * (x * y) = y$, dan $0 * (x * y) = y * x$, untuk setiap $x, y \in X$. Dalam skripsi ini akan dikaji beberapa struktur subaljabar dan subaljabar normal pada BF-Aljabar dan sifat-sifat homomorfisme pada BF-aljabar.

Kata kunci:BF-aljabar, homomorfisme, subaljabar, subaljabar normal

Abstract

A non-empty set $\boldsymbol{X}$ with a binary operation " $*$ " and a constant 0 is called BF-algebra if satisfies $x * x = 0$; $x * (x * y) = y$; $0 * (x * y) = y * x$, for all $x, y \in X$. In this paper we study some of subalgebras and normal subalgebras of a BF -algebra and some properties of homomorphism of BF-algebra.

Keywords :BF-algebra; homomorphism; subalgebra; normal subalgebra

1. PENDAHULUAN

Aljabar abstrak adalah bidang matematika yang mempelajari struktur aljabar. Struktur aljabar merupakan himpunan yang tak kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma yang terkait. Menurut Kromodihardjo (1988), yang dimaksud dengan suatu sruktur aljabar yaitu suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu operasi biner atau lebih. Beberapa kajian dalam struktur aljabar yaitu grup, ring, ideal. Adapun struktur aljabar lainnya yaitu *B*-aljabar.

Pada tahun tahun 2002, Neggers dan Kim memperkenalkan tentang B-aljabar yang memenuhi aksioma (i) $x * x = 0$, (ii) $x * 0 = x$, (iii) $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$ untuk setiap $x, y, z \in X$ dan dipelajari juga sifat-sifatnya.

Pada tahun 2007, Anderj Walendziak memperkenalkan tentang *BF*-aljabar. *BF*-aljabar adalah suatu himpunan tak kosong X dengan operasi biner $*$ dan elemen khusus 0 yang memenuhi aksioma: (i) $x * x = 0$, (ii) $\_ * 0 = x$, (iii) $0 * (x * y) = y * x$, untuk semua $x, y \in X$. Anderj Walendziak juga mengkaji tentang sifat-sifat *BF*-aljabar dan beberapa sifat subaljabar dan subaljabar normal pada BF-aljabar. Yang dapat menjadi struktur homomorfisme pada BF-aljabar.

Dalam skripsi ini akan dikaji beberapa sifat BF-aljabar yang terkait dengan homomorfisme pada BF-aljabar.

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, rumusan masalah yang diajukan adalah "Bagaimana sifat BF-aljabar yang terkait dengan homomorfisme pada BF-aljabar?"

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penulisan adalah mempelajari sifat dari BF-aljabar terhadap homomorfisme pada BF-aljabar dan sifat-sifat yang terkait.

2. KAJIAN TEORI

Operasi Biner

Definisi 2.1 Misalkan G himpunan tak kosong. Operasi biner" $*$ " di G adalah fungsi dari $G \times G \to G$.

(Joseph A. Gallian, 2010 : 40).

Aljabar

Definisi 2.2 Misalkan$X$ himpunan tak kosong dan " $*$ " operasi biner di F. Pasangan terurut $(X,*)$disebut aljabar.

(Joseph Landin, 2012 : 30).

Fungsi dan Jenis-Jenisnya

Definisi 2.3 Misalkan $f: X \to Y$ dan $g: Y \to Z$. Komposisi f dan g, ditulis $f \circ g$, adalah fungsi dari X ke Z yang didefinisikan dengan $(f \circ g)(x) = (f(g(\quad))$, untuk semua $x \in X$.

(Joseph A. Gallian, 2010 : 19).

Definisi 2.4 Fungsi $f: X \to Y$ dikatakan injektif jika untuk $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2)$ mengakibatkan $x_1 = x_2$.

(Joseph A. Gallian, 2010 : 19).

Definisi 2.5 Fungsi $f : X \to Y$ dikatakan surjektif jika untuk setiap $y \in Y$ ada paling sedikit satu $x \in X$ sedemikian hingga $f(x) = y$.

(Joseph A. Gallian, 2010 : 20).

Definisi 2.6 Fungsi $f : X \to Y$ dikatakan bijektif jika f fungsi injektif dan surjektif

(Joseph A. Gallian, 2010 : 21).

Homomorfisme

Definisi 2.7 Misalkan $(X,*)$ dan $(Y,\triangle)$ aljabar. Fungsi $f : X \to Y$ disebut homomorfisme, jika $f(x * y) = f(x) \triangle f(y)$ untuk semua $x, y \in X$.

(Joseph A. Gallian, 2010:200).

Homomorfisme yang bersifat surjektif disebut epimorfisme. Homomorfisme yang bersifat injektif disebut monomorfisme dan homomorfisme yang bersifat bijektif disebut isomorfisme.

Relasi Kongruensi

Definisi 2.8 Relasi kongruensi R pada himpunan S adalah relasi pada S yang memenuhi aksioma berikut :

(i) $(a, a) \in R$ untuk semua $a \in S$ (refleksif).

(ii) $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$ (simetris).

(iii) $((a, b) \in R$ dan$(b, c)) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ (transitif).

(Joseph A. Gallian, 2010 : 16)

BG-aljabar

Definisi 2.9 BG-Aljabar$(X,*,0)$merupakan himpunan tak kosong X, dengan operasi biner $*$ dan elemen khusus yang memenuhi aksioma berikut :

(BG1) $x * x = 0$.

(BG2) $x * 0 = x$.

(BG3) $(x * y) * (0 * y) = x$, untuk semua $x, y \in X$

(C.B. dan H.S. Kim, 2008: 450)

BH-aljabar

Definisi 2.10 BH-aljabar $(X,*,0)$ merupakan himpunan tak kosong X, dengan operasi biner " $*$ " dan elemen khusus 0 yang memenuhi aksioma berikut:

(BH1) $x * x = 0$

(BH2) $x * 0 = x$

(BH3) $(x * y) * (y * x) = 0$, mengakibatkan $x = y$ untuk semua $x, y \in X$

(C.B. dan H.S. Kim, 2008: 450)

BF-aljabar

Definisi 2.11 BF-aljabar$(X,*,0)$ merupakan himpunan tak kosong X, dengan operasi biner $*$ dan elemen khusus 0 yang memenuhi aksioma berikut:

(B1) $x * x = 0$

(B2) $x * 0 = x$

(B3) $0 * (x * y) = (y * x)$, untuk semua $x, y \in X$

(C.B. dan H.S. Kim, 2008: 450)

Definisi 2.12 BF-aljabar $(X,*,0)$ dinamakan BF1-aljabar jika memenuhi aksioma berikut:

(BG3) $x = (x * y) * (0 * y)$ untuk semua $x, y \in X$.

(Jung Mi Ko dan Sun Shin Ahn, 2015 : 128)

Definisi 2.13 BF-aljabar $(X,*,0)$ dinamakan BF2-aljabar jika memenuhi aksioma berikut:

(BH3) $x * y = y * x = 0$ mengakibatkan $x = y$, untuk semua $x, y \in X$.

(Jung Mi Ko dan Sun Shin Ahn, 2015 : 128)

Definisi 2.14 Subhimpunan tak kosong A dari BF-aljabar X disebut subaljabar di X jika $x * y \in A$ untuk semua $x, y \in A$.

(Jung Mi Ko dan Sun Shin Ahn, 2015 : 128)

Definisi 2.15 Subaljabar A dari BF-aljabar X dikatakan normal di X jika $(x * a) * (y * b) \in A$ untuk semua $x * y, a * b \in A$.

(Jung Mi Ko dan Sun Shin Ahn, 2015 : 128)

Definisi 2.16 Misalkan X, Y BF-aljabar X, dan $f: X \to Y$ homomorfisme. Kernel f ditulis $Ker(f)$, didefinisikan sebagai

$$Ker(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}.$$

(Jung Mi Ko dan Sun Shin Ahn, 2015 : 128)

3. PEMBAHASAN

Definisi 3.1

Misalkan N subaljabar normal dari BF-aljabar X. Definisikan relasi "$\sim_N$" pada X dengan $x \sim_N y$ untuk semua$x, y \in X$ jika $x * y \in N$.

(Jung Mi Ko dan Sun ShinAhn, 2015 : 128)

Proposisi 3.2

Relasi$\sim_N$ pada Definisi 3.1 merupakan relasi kongruensi pada X.

(Jung Mi Ko dan Sun ShinAhn, 2015 : 128)

Bukti :

Akan ditunjukkanbahwa$\sim_N$ adalah relasi kongruensi pada X.

Refleksif

$x \sim_N x$ sebab $x * x = 0$ $\quad$ $(0 \in N \wedge N$ subaljabar)

Simetris

$x \sim_N y$	(diberikan)
$x * y \in N$	(Definisi$\sim_N$)
$0 * (x * y) \in N$	($0 \in N \wedge N$ subaljabar)
$y * x \in N \to y \sim_N x$	($0 * (x * y) = y * x$ (B3))

Transitif

$x \sim_N y \wedge y \sim_N z$	(diberikan)
$x * y \in N \wedge y * z \in N$	(Definisi$\sim_N$)
$0 * (y * z) \in N$	($0 \in N \wedge N$ subaljabar)
$z * y \in N$	$0 * (y * z) = z * y$ (B3)
$(x * z) * (y * y) \in N$	(N normal)
$(x * z) * 0 \in N$	(B1)

$x * z \in N$ (B2)
$x * z \in N \rightarrow x \sim_N y$ (Definisi$\sim_N$)

Definisi 3.3

Misalkan $\sim_N$ relasi kongruensi pada Definisi 3.1 dan $[x]_n \coloneqq \{y \in X | x \sim_N y\}$

(Jung Mi Ko dan Sun ShinAhn, 2015 : 128)

Proposisi 3.4

Dengan notasi oleh Definisi 3.3, nyatakan $X/N = \{[x]_N | x \in X\}, [x]_N$. Operasi biner $*'$ yang didefinisikan $[x]_N *' [y]_N \coloneqq [x * y]_N$ terdefinisi dengan baik.

(Jung Mi Ko dan Sun ShinAhn, 2015 : 128)

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa jika $[x]_N = [u]_N$ dan $[y]_N = [v]_N$ maka $[x * y]_N = [u * v]_N$.
$u \sim_N x$ $([u]_N = [x]_N)$
$u * x \in N$ (Definisi$\sim_N$)
$v \sim_N y$ $([v]_N = [y]_N)$
$v * y \in N$ (Definisi $\sim_N$)
$(u * v) * (x * y) \in N$ (N normal)
$(u * v) \sim_N (x * y)$ (Definisi$\sim_N$)
$u * v \in [x * y]_N$ $([x * y]_N)$
$[u * v]_N \cap [x * y]_N \neq 0$ $(u * v \in [x * y]_N)$
$[u * v]_N = [x * y]_N$ (Proposisi 2.1)

Teorema 3.5

Misalkan N subaljabar normal dari BF-aljabar $X. (X/N ; *', [0]_N)$ adalah BF-aljabar.

(Jung Mi Ko dan Sun Shin Ahn, 2015 : 128)

Bukti :

(B1)
$[x]_N *' [x]_N = [x * x]_N$ (Definisi$*'$)
$= [0]_N$ (B1)
(B2)
$[x]_N *' [0]_N = [x * 0]_N$ (Definisi$*'$)
$= [x]_N$ (B2)
(B3)
$[0]_N *' ([x]_N *' [y]_N) = [0]_N *' [x * y]_N$ (Definisi$*'$)
$= [0 * (x * y)]_N$ (Definisi $*'$)
$= [y * x]_N$ (B3)
$= [y]_N *' [x]_N$ (Definisi$*'$)

Teorematerbukti.
X/N dalam BF-aljabar pada Teorema 3.5 dinamakan BF-aljabar hasil bagi BF oleh N.

Teorema 3.6

Misalkan X, Y BF-aljabar dan Z BF2-aljabar. Misalkan $h: X \rightarrow Y$ epimorfisme dan $g: X \rightarrow Z$ homomorfisme. Jika $Ker(h) \subseteq Ker(g)$, maka ada tepat satu homomorfisme $f: Y \rightarrow Z$ yang memenuhi $f \circ h = g$.

(Jung Mi Ko dan Sun Shin Ahn, 2015 : 128)

Bukti :

Untuk setiap $y \in Y$ ada $x \in X$ sedemikian sehingga $y = h(x)$ karena h epimorfisme.
Tetapkan $z \coloneqq g(x)$, akan ditunjukkan bahwa $f: Y \rightarrow Z$ dengan $f(y) = z$. Jelaslah f terdefinisi dengan baik.
Misalkan,
$y = h(x_1) = h(x_2), x_1, x_2 \in X,$
Maka
$0 = h(x_1) * h(x_2)$ (B1)
$= h(x_1 * x_2)$ (h homomorfisme)
Jadi, $x_2 * x_2 \in Ker(h)$.
Dengancara yang sama,
$0 = h(x_2) * h(x_1)$ (B1)
$= h(x_2 * x_1)$ (h homomorfisme)
Jadi, $x_2 * x_1 \in Ker(h)$.
Karena $Ker(h) \subseteq Ker(g)$, sedemikian sehingga
$0 = g(x_1 * x_2)$ $(x_1 * x_2 \in Ker(g))$
$= g(x_1) * g(x_2)$ (g homomorfisme)
Dengan cara yang sama,
$0 = g(x_2 * x_1)$ $(x_2 * x_1 \in Ker(g))$
$= g(x_2) * g(x_1)$ (g homomorfisme)
Karena Z adalah BF2-aljabar, maka $g(x_1) = g(x_2)$. Maka, $g(x) = f(h(x))$ untuk $x \in X$.
Misalkan $y_1, y_2 \in Y$. Ada $x_1, x_2 \in X$ sedemikian sehingga $h(x_1) = y_1, h(x_2) = h_2$, karena h epimorfisme. Perhatikan,
$f(y_1 * y_2) = f(h(x_1) * h(x_2))$ (diberikan)
$= f(h(x_1 * x_2))$ (h homomorfisme)
$= g(x_1 * x_2)$ (Definisi$f$)
$= g(x_1) * g(x_2)$ (g homomorfisme)
$= f(h(x_1)) * f(h(x_2))$ (Definisi f)
$= f(y_1) * f(y_2)$ (diberikan)
Oleh karena itu f adalah homomorfisme.
Misalkan $r : Y \rightarrow Z$ homomorfisme yang memenuhi $r \circ h = g = f \circ h$.
Ambil $y \in Y$ sembarang. Maka ada $x \in X$ sedemikian sehingga $y = h(x)$ karena h epimorfisme. Perhatikan,
$r(y) = r(h(x))$ (diberikan)
$= (r \circ h)(x)$ (Definisi$\circ$)
$= (f \circ h)(x)$ (diberikan)
$= f(h(x))$ (Definisi$\circ$)
$= f(y)$ (diberikan)
jadi$r(y) = f(y)$ sedemikian sehingga mengakibatkan ada tepat satu homomorfisme $f: Y \rightarrow Z$ yang memenuhi $f \circ h = g$.

Teorema 3.7

Misalkan X, Y dan Z BF-aljabar, dan $g: X \to Z$ homomorfisme dan $h: Y \to Z$ monomorfisme dengan $Im(g) \subseteq Im(h)$. Maka ada tepat satu homomorfisme $f: X \to Y$ yang memenuhi $h \circ f = g$.

(Jung Mi Ko dan Sun Shin Ahn, 2015 : 128)

Bukti :

Untuk setiap $x \in X, g(x) \in Im(g) \subseteq Im(h)$. Karena h monomorfisme, maka ada tepat satu $y \in Y$, $h(y) = g(x)$. Definisikan pemetaan $f: X \to Y$ dengan $f(x) = y$. Perhatikan,

$(h \circ f)(x) = h(f(x))$ (Definisi $\circ$)
$= h(y)$ (Definisi f)
$= g(x)$ (diberikan)

Jadi $h \circ f = g$

Misalkan $x_1, x_2 \in X$

Maka,

$h(f(x_1 * x_2)) = (h \circ f)(x_1 * x_2)$ (Definisi $\circ$)
$= g(x_1 * x_2)$ ($h \circ f = g$)
$= g(x_1) * g(x_2)$ (g homomorfisme)
$= (h \circ f)(x_1) * (h \circ f)(x_2)$ ($h \circ f = g$)
$= h(f(x_1)) * h(f(x_2))$ (Definisi $\circ$)

Jadi $h(f(x_1 * x_2)) = h(f(x_1) * f(x_2))$. Karena h monomorfisme, didapatkan

$$f(x_1 * x_2) = f(x_1) * f(x_2)$$

Oleh karenaitu, f homomorfisme.

Misalkan $m: X \to Z$ homomorfisme yang memenuhi $h \circ m = g$. Ambil $x \in X$ sembarang,

$h(m(x)) = (h \circ m)(x)$ (Definisi $\circ$)
$= g(x)$ (diketahui)
$= (h \circ f)(x)$ (diketahui)
$= h(f(x))$ (Definisi $\circ$)

Jadi $h(m(x)) = h(f(x))$, karena h mono, mengakibatkan $m(x) = f(x)$, sehingga ada tepat satu homomorfisme $f: X \to Y$ yang memenuhi $h \circ f = g$.

Definisi 3.8

Misalkan A subaljabar normal dari BF-aljabar X, pemetaan $p : X \to X/A$ yang didefinisikan $p(x) = [x]_A$ dinamakan *pemetaan kanonik*.

(Jung Mi Ko dan Sun Shin Ahn, 2015 : 128)

Perhatikan bahwa p surjektif berdasarkan definisi X/A

Proposisi 3.9

Misalkan A subaljabar normal dari BF-aljabar X. Pemetaan kanonik $p : X \to X/A$ adalah homomorfisme dengan $Ker(p) = A$.

(Jung Mi Ko dan Sun Shin Ahn, 2015 : 128).

Bukti :

$p(x * y) = [x * y]_A$ (Definisi 3.8)
$= [x]_A *' [y]_A$ (Proposisi 3.4)
$= p(x) *' p(y)$ (Definisi 3.8)

Jadi terbukti bahwa pemetaan $p : X \to X/A$ adalah homomorfisme.

Ambil $x \in Ker(p)$

Maka $p(x) = [x]_A = [0]_A$ (Definisi 3.8)
$x \in [x]_A = [0]_A$ (Definisi 3.3)
$x \in [0]_A$ ($[x]_A = [0]_A$)
$0 * x \in A$ (Definisi $[0]_A$)
$0 * (0 * x) \in A$ ($0 \in A$)
$x \in A$ (Lemma 2.38)
$Ker(p) \subseteq A$.

Ambil $y \in A$

$y = y * 0 \in A$ (B2)
$0 \sim_A y \to y \in [0]_A$ (Definisi 3.3)
$[y]_A = [0]_A$ ($y \in [y]_A$)
$p(y) = [y]_A = [0]_A$ (Definisi 3.8)
$y \in Ker(p)$ (Definisi Kernel)

Maka $A \subseteq Ker(p)$.

Jadi terbukti bahwa pemetaan $p : X \to X/A$ adalah homomorfisme dengan $Ker(p) = A$.

Proposisi 3.10

Jika $f: X \to Y$ homomorfisme dengan X BF-aljabar dan Y BF2-aljabar, maka $Ker(f)$ merupakan subaljabar normal di X.

(Jung Mi Ko dan Sun Shin Ahn, 2015 : 128)

Bukti :

Misalkan $x, y, a, b \in X$.

$f(0) = f(x * x)$, (B1)
$= f(x) *' f(x)$, (homomorfisme)
$= 0$. (B1)

Jadi, $0 \in Ker(f)$. (Definisi Kernel)

Misalkan $x * y, a * b \in Ker(f)$.

$f(x * y) = 0 \wedge f(a * b) = 0$. (Definisi Kernel)
$0 = f(x * y) = f(x) *' f(y)$. (homomorfisme)
$f(y) *' f(x) = 0$. (Bagian (iii) Lemma 2.38)
$f(x) = f(y)$. (BH3)

Dengan cara sama,

$f(a) = f(b)$. (BF2-aljabar)

Maka,

$f((x * a) * (y * b)) = f(x * a) *' f(y * b)$
$= (f(x) *' f(a)) *' (f(y) *' f(b))$
$= (f(x) *' f(a)) *' (f(x) *' f(a)) = 0$. (B1)

Jadi $(x * a) * (y * b) \in Ker(f)$. Terbukti bahwa $Ker(f)$ merupakan subaljabar normal di X.

Leboh lanjut, karena $Ker(f)$ subaljabar normal, menurut Teorema 3.5 $X/Ker(f)$ merupakan BF-aljabar.

(Jung Mi Ko dan Sun ShinAhn, 2015 : 128)

Teorema 3.12

Misalkan X BF-aljabar dan Y BF2-aljabar dan $f: X \to Y$ homomorfisme. Misalkan $N = Ker\ (f)$. Maka $X/N \cong Imf$. Secara khusus, jika f surjektif, maka $X/N \cong Y$.

(Jung Mi Ko dan Sun Shin Ahn, 2015 : 128)

Bukti :

Definisikan $\bar{f}: X/N \to Y$ dengan $\bar{f}\ ([x]_N) = f(x)$, untuk semua $[x]_N \in X/N$. Tetapkan lambang operasi berikut: $*^{'}$ di X/N dan $*''$ di Y.

Misalkan, $[u]_N = [v]_N$.

$u \sim_N v = v \sim_N u$ (Definisi 3.3)
$u * v \in N \wedge v * u \in N$ (Definisi 3.1)
$f(u * v) = 0$ (Bagian (iii) Lemma 2.38)
$f(v * u) = 0$ (Bagian (iii) Lemma 2.38)
$f(u) *'' f(v) = 0$ (homomorfisme)
$f(v) *'' f(u) = 0$ (homomorfisme)
$f(u) = f(v)$ (BH3)

Disimpulkan bahwa fungsi $\bar{f}$ terdefinisi dengan baik.

Misalkan $[x]_N, [y]_N \in X/N$.

$\bar{f}([x]_N *'' [y]_N) = \bar{f}([x * y]_N)$ (Definisi 3.3)
$= f(x * y)$ (Definisi $\bar{f}$)
$= f(x) *'' f(y)$ (f homomorfisme)
$= \bar{f}([x]_N) *'' \bar{f}([y]_N)$ (Definisi $\bar{f}$)

Jadi, $\bar{f}$ homomorfisme.

Misalkan $[x]_N, [y]_N \in X/N$ sedemikian hingga $\bar{f}([x]_N) = \bar{f}([y]_N)$.

Maka,

$f(x) = f(y)$ (Definisi $\bar{f}$)
$f(x) *'' f(y) = f(y) *'' f(y)$ ($f(x) = f(y)$ dan Definisi Operasi)
$f(x) *'' f(y) = 0$ (B1)
$f(x * y) = 0$ (f homomorfisme)
$x * y \in N$ ($N = Ker(f)$)
$y \sim_N x$ (Definisi $\sim_N$)
$y \in [x]_N$ (Definisi $[x]_N$)
$y \in [y]_N$
$[y]_N = [x]_N$ ($[x]_N \cap [y]_N \neq \emptyset$)

Jadi $\bar{f}$ injektif.

Karena $\bar{f}([x]_N) = f(x), Im\ \bar{f} = Im\ f$, maka $\bar{\bar{f}}: X/N \to Im\ \bar{f}$ dengan $\bar{\bar{f}}([x]_N) = \bar{f}(x)$, berdasarkan definisi $im\ \bar{f}$ maka $\bar{\bar{f}}$ bijektif maka $X/N \cong Im\ f$. Jika f surjektif, $Im\ f = y$ maka $X/N \cong Y$.

Lemma 3.13

Misalkan X BF-aljabar dan Y BF2-aljabar. Misalkan $f: X \to Y$ homomorfisme. Jika A adalah subaljabar normal di X sedemikian hingga $A \subseteq Ker(f)$, maka pemetaan $\bar{f}: X/A \to Y$ yang didefinisikan oleh $\bar{f}([x]_A) = f(x)$ untuk setiap $x \in X$ merupakan homomorfisme.

(Jung Mi Ko dan Sun ShinAhn, 2015 : 128)

Bukti :

Misalkan $x, y \in X$ dengan $[x]_A = [y]_A$. Maka,

$[x * y]_A = [x]_A *^{'} [y]_A$ (Proposisi 3.4)
$= [0]_A$ (B1)
$x * y \sim_A 0$ (Definisi 3.3)
$(x * y) * 0 \in A$ (Definisi $\sim_A$)
$x * y \in A$, $y * x \in A$ (B2)

Jadi $x * y \in A \subseteq Ker\ (f) \wedge y * x \in A \subseteq Ker\ (f)$

$0 = f\ (x * y)$ (Definisi Kernel)
$= f(x) *'' f(y) = f(y) *'' f(x)$ (f homomorfisme)
$f(x) = f(y)$ (BH 3)
$\bar{f}([x]_A *^{'} [y]_A) = \bar{f}([x * y]_A)$ (Proposisi 3.4)
$= f(x * y)$ ($\bar{f}([x]_A) = f(x)$)
$= f(x) *^{'} f(y)$ (f homomorfisme)
$= \bar{f}([x]_A) *'' \bar{f}([y]_A)$ ($\bar{f}([x]_A) = f(x)$)

Terbukti bahwa pemetaan $\bar{f}: x/A \to Y$ yang didefinisikan oleh $\bar{f}([x]_A) = f(x)$ untuk setiap $x \in X$ merupakan homomorfisme.

Teorema 3.14

Misalkan X BF-aljabar dan Y BF2-aljabar. Misalkan A subaljabar normal di X dan $f: X \to Y$ adalah homomorfisme. Maka dua pernyataan berikut ekuivalen:

(i) Ada tepat satu homomorfisme $\bar{f}: X/A \to Y$ yang memenuhi $\bar{f} \circ p = f$, dengan $p: X \to X/A$ merupakan pemetaan kanonik.
(ii) $A \subseteq Ker(f)$

Lebih lanjut, $\bar{f}$ adalah monomorfisme jika dan hanya jika $A = Ker(f)$.

(Jung Mi Ko dan Sun ShinAhn, 2015 : 128)

Bukti :

(i) ⇒ (ii)

Misalkan $a \in A$. Maka

$f\ (a) = \bar{f}(p\ (a))$ ($f = \bar{f} \circ p$)
$= \bar{f}([a]A)$ (Definisi p)
$= \bar{f}([0]A)$ ($a \sim_A 0$)
$= f\ (0)$ ($\bar{f}([x]_A) = f(x)$)
$= 0$ (f homomorfisme)

Berdasarkan definisi kernel f maka $a \in Ker\ (f)$, sehingga $A \subseteq Ker\ (f)$.

(ii) ⇒ (i) Dengan Lemma 3.13, didapatkan homomorfisme $\bar{f}: X\ /\ A \to Y$ yang didefinisikan oleh $\bar{f}([x]_A) = f\ (x)$ untuk semua $x \in X$.

$f(x) = f([x]_A)$ (Definisi $\bar{f}$)
$= \bar{f}(p(x))$ (Definisi p)
$= (\bar{f} \circ p)(x)$ (Definisi ∘)

Jadi $f = \bar{f} \circ p$

Misalkan $h: X / A \rightarrow Y$ homomorfisme maka $f = h \circ p$. Sehingga $\bar{f} \circ p = h \circ p$.

Karena p surjektif, berdasarkan Proposisi 2.1 Bagian (ii) maka $h = \bar{f}$.

Misalkan $\bar{f}$ monomorfisme, dan $x \in Ker\ (f)$.

Maka,

$\bar{f}([x]_A) = f(x)$

$= 0$ ($x \in Ker\ f$)

$= f(0)$ (f homomorfisme)

$\bar{f}([0]_A)$ (definisi$\bar{f}$)

$[x]_A = [0]_A$ ($\bar{f}$ monomorfisme)

$x \sim_A 0$ ($[x]_A = [0]_A$)

$x * 0 \in A$ (definisi$\sim_A$)

$x \in A$ (BF2)

$\therefore Ker\ (f) \subseteq A$.

$\therefore Ker\ (f) = A$.

Sebaliknya, misalkan $A = Ker\ (f)$, dan $\bar{f}([x]_A) = \bar{f}([y]_A)$.

Maka,

$f(x) = f(y)$ (definisi $\bar{f}$)

$f(x) *'' f(y) = 0$ (BF3)

$f(x * y) = 0$ (f homomorfisme)

$x * y \in Ker\ f$ (definisi$Ker\ f$)

$x * y \in A$ ($Ker\ (f) = A$)

$x \sim_A y$ (definisi$\sim_A$)

$\therefore [x]_A = [y]_A$

Maka terbukti bahwa dua pernyataan tersebut ekuivalen

Teorema 3.15

Misalkan X BF-aljabar dan Y BF2-aljabar. Misalkan $f: X \rightarrow Y$ homomorfisme dan A, B berturut-turut subaljabar normal dari X dan Y yang memenuhi $f(A) \subseteq B$. Maka ada tepat satu homomorfisme $h: X/A \rightarrow Y/B$ sedemikian hingga diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ X/A \arrow[r, "h"] & Y/B \end{tikzcd}$$

komutatif dengan p dan q adalah epimorfisme kanonik.

(Jung Mi Ko dan Sun ShinAhn, 2015 : 128)

Bukti :

Definisikan $h: X/A \rightarrow Y/B$ dengan $h([x]_A) = [f(x)]_B$. Jika $[x]_A = [y]_A$, dengan $x, y \in X$, maka

$x \sim_A y \wedge y \sim_A x$ ($[x]_A = [y]_A$)

$x * y \in A$ (definisi$\sim_A$)

$y * x \in A$ (definisi$\sim_A$)

$f(x * y) \in f(A)$

$f(y * x) \in f(A)$

$f(x * y) \in B$ ($f(A) \subseteq B$)

$f(y * x) \in B$ ($f(A) \subseteq B$)

$f(x) *'' f(y) \in B$ (f homomorfisme)

$f(y) *'' f(x) \in B$ (f homomorfisme)

$f(x) \sim_B f(y)$ (definisi $\sim_B$)

$f(y) \sim_B f(x)$ (definisi $\sim_B$)

$\therefore [f(x)]_B = [f(y)]_B$.

Jadi h terdefinisi dengan baik.

Misalkan $[x]_A, [y]_A \in X/A$. Maka,

$h([x]_A *' [y]_A) = h([x * y]_A)$ (Definisi $*'$ di X/A)

$= [f(x * y)]_B$ (Definisi$h$)

$= [f(x) *'' f(y)]_B$ (f homorfisme)

$= [f(x)]_B *' [f(y)]_B$ (Definisi $*'$ di X/B)

$= h([x]_A) *' h([y]_A)$ (Definisi h)

Jadi h homomorfisme.

Akan dibuktikan diagram komutatif. Dengan kata lain, $h \circ p = q \circ f$.

Misalkan$x \in X$ sebarang. Maka,

$(h \circ p)(x) = h(p(x))$ (Definisi$\circ$)

$= h([x]_A)$ (Definisi$p$)

$= [f(x)]_B$ (Definisi$h$)

$= q(f(x))$ (Definisi$q$)

$= (q \circ f)(x)$ (Definisi$\circ$)

$\therefore h \circ p = q \circ f$.

Sekarang akan dibuktikan h dengan sifat tersebut tunggal. Misalkan $k: X/A \rightarrow Y/B$ homomorfisme dengan $k \circ p = q \circ f$. Untuk $[x]_A \in X/A$ sebarang, berlaku

$k([x]_A) = k(p(x))$ (Definisi$p$)

$= (k \circ p)(x)$ (Definisi$\circ$)

$= (q \circ f)(x)$ ($k \circ p = q \circ f$)

$= (h \circ p)(x)$ ($h \circ p =$ 粢 $\circ f$)

$= h(p(x))$ (Definisi$\circ$)

$= h([x]_A)$ (Definisi p)

$\therefore k = h$

Maka terbukti bahwa ada tepat satu homomorfisme $h: X/A \rightarrow Y/B$ diagram tersebut komutatif dengan p dan q adalah epimorfisme kanonik.

4. PENUTUP

Simpulan

1. Jika N subaljabar normal dari BF-aljabar X dan relasi "$\sim_N$" pada X yang didefinisikan dengan $x \sim_N y$ untuk semua$x, y \in X$ jika dan hanya jika $x * y \in N$ maka relasi "$\sim_N$" merupakan relasi kongruensi pada X.
2. Jika N subaljabar normal dari BF-aljabar X dan X/N merupakan kumpulan semua kelas kongruensi yang dibangkitkan oleh relasi"$\sim_N$" pada bagian pertama maka dengan operasi biner $*'$ yang didefinisikan $[x]_N *' [y]_N \coloneqq [x * y]_N$dan elemenkhusus 0 maka $(X/N\, ; *', [0]_N)$ adalah BF-aljabar.

3. Misalkan X, Y BF-aljabar dan Z BF2-aljabar. Misalkan $h: X \to Y$ epimorfisme dan $g: X \to Z$ homomorfisme. Jika $Ker(h) \subseteq Ker(g)$, maka ada tepat satu homomorfisme $f: Y \to Z$ yang memenuhi $f \circ h = g$.
4. Misalkan X, Y dan Z BF-aljabar, dan $g: X \to Z$ homomorfisme dan $h: Y \to Z$ monomorfisme dengan $Im(g) \subseteq Im(h)$. Maka ada tepat satu homomorfisme $f: X \to Y$ yang memenuhi $h \circ f = g$.
5. Misalkan A subaljabar normal dari BF-aljabar X. Pemetaan kanonik $p : X \to X/A$ adalah homomorfisme dengan $Ker(p) = A$.
6. Jika $f: X \to Y$ homomorfisme dengan X BF-aljabar dan Y BF2-aljabar, maka $Ker\,(f)$ merupakan subaljabar normal di X.
7. Misalkan$X$ BF-aljabar dan Y BF2-aljabar dan $f: X \to Y$ homomorfisme. Misalkan $N = Ker\,(f)$. Maka $X/N \cong Im(f)$. Secara khusus, jika f surjektif, maka $X/N \cong Y$.
8. Misalkan$X$ BF-aljabar dan Y BF2-aljabar. Misalkan $f: X \to Y$ homomorfisme. Jika A adalah subaljabar normal di X sedemikian hingga $A \subseteq Ker(f)$, maka pemetaan $\bar{f}: X/A \to Y$ yang didefinisikan oleh $\bar{f}([x]_A) = f(x)$ untuk setiap $x \in X$ merupakan homomorfisme.
9. Misalkan$X$ BF-aljabar dan Y BF2-aljabar. Misalkan A subaljabar normal di X dan $f: X \to Y$ adalah homomorfisme. Ada tepat satu homomorfisme $\bar{f}: X/A \to Y$ yang memenuhi $\bar{f} \circ p = f$, dengan $p: X \to X/A$ merupakan pemetaan kanonik ekuivalen jika dan hanya jika $A \subseteq Ker(f)$
10. Misalkan$X$ BF-aljabar dan Y BF2-aljabar. Misalkan $f: X \to Y$ homomorfisme dan A, B berturut-turut subaljabar normal dari X dan Y yang memenuhi $f(A) \subseteq B$. Maka ada tepat satu homomorfisme $h: X/A \to Y/B$ sedemikian hingga diagram ini

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ X/A \arrow[r, "h"] & Y/B \end{tikzcd}$$

komutatif dengan p dan q merupakan epimorfisme kanonik.

Saran

Pada skripsi ini penulis membahas tentang beberapa sifat dan struktur BF-aljabar ke BF2-aljabar yang terkait dengan homomorfisme pada BF-aljabar. Penulis menyarankan pembaca untuk penelitian selanjutnya membahas apakah sifat-sifat yang sama berlaku untuk homomorfisme pada BF-aljabar ke BF1-aljabar dan sifat lainnya yang belum dibahas pada skripsi ini.

DAFTAR PUSTAKA

C. B. dan H. S. Kim. 2008. *On BG-algebras.* Demonstratio Mathematica, 497-505

Gallian, JosephA. 2010. *Cotemporary Abstract Algebra*. Seventh Edition. Duluth: University of Minnesota Duluth.

Herstein, I. N. *Abstract Algebra*. Third Edition. USA: Prentice-Hall, Inc.

Kromodihardjo, K. (1988). *Buku Materi Pokok Struktur Aljabar 1-12.* Jakarta: Karunika.

Neggers J. dan H. S. Kim. 2002. *On B-algebras.* Math.Vesnik, 54: 21-29

Walendziak, A. 2007. *On BF-algebras*. Mathematica Slovaca. Vol.57: 119-128

Y.B. Jun dan H. S. Kim. 1998. *On BH-algebras.* Sci. Mathematics, 347-354