MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 7 No.3 Tahun 2019*
ISSN 2301-9115

METODE TRIANGULASI PADA POLIGON UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH PENJAGAAN GALERI SENI

Mia Novi Astina
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : miaastina@mhs.unesa.ac.id

Dwi Juniati
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail **:** dwi_juniati@yahoo.com

Abstrak

Masalah galeri seni atau *Art Gallery Theorem* adalah teorema yang digunakan untuk menentukan minimum banyaknya penjaga di dalam sebuah galeri seni. Masalah galeri seni dirumuskan dalam geometri sebagai minimum banyaknya penjaga yang perlu ditempatkan dalam poligon sederhana n sisi sehingga semua titik interior terlihat. Salah satu teknik untuk memecahkan masalah galeri seni adalah dengan menerjemahkan situasi geometris menjadi situasi kombinatorial pada graf. Selama bertahun-tahun masalah galeri seni telah diusulkan dan dipelajari dengan berbagai variasi penjagaan. Pada artikel ini akan dikaji tentang variasi penjagaan dimana penjaga akan saling menjaga selain menjaga galeri seni. Tujuannya adalah untuk melindungi galeri seni dari masalah pencurian dan melindungi dari niat buruk penjaga. Metode yang digunakan untuk membuktikan teorema galeri seni adalah metode triangulasi, yaitu metode dekomposisi poligon menjadi segitiga, dan pewarnaan titik pada graf. Hasil penelitian yang diperoleh adalah banyak penjaga yang diperlukan pada poligon n sisi, dengan $n > 3$ adalah $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ dan banyak penjaga terjaga pada poligon n sisi, dengan $n \geq 5$ adalah $\left\lfloor \frac{3n-1}{7} \right\rfloor$.

Kata kunci: Masalah Galeri Seni, Poligon, Penjaga Terjaga, Metode Triangulasi

Abstract

The problem of art gallery or Art Gallery Theorem is the theorem used to determine the minimum number of guards in an art gallery. The art gallery problem is formulated in geometry as the minimum number of guards that need to be placed in a simple polygon n sides so that all interior points are visible. One technique for solving art gallery problems is to translate geometric situation into combinatorial situations in graphs. Over the years the problem of art galleries has been proposed and studied with a variety of safeguards. In this article will be studied about variations in guarding where guards must guard one another in addition to guarding the art gallery. The aim is to protect art galleries from theft problem and protect from guards' bad intentions. The method used to prove the art gallery theorem is a triangulation method, namely the method of decomposing polygons into triangles, and point coloring on graphs. The result obtained are many guards needed on n-side polygons, with $n > 3$ is $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ and many guarded guard on n-side polygons, with $n \geq 5$ is $\left\lfloor \frac{3n-1}{7} \right\rfloor$.

Keywords : Art Gallery Problems, Polygon, Guarded Guard, Triangulation Method

1. PENDAHULUAN

Geometri sebagai ilmu telah dipelajari sejak sebelum masehi, tidak pernah berhenti berkembang. Geometri mempelajari hubungan antara titik-titik, garis-garis, sudut-sudut, bidang-bidang, serta bangun datar dan bangun ruang. Selain itu, geometri juga memiliki aplikasi ke subjek-subjek lain dalam kehidupan sehari-hari. Salah satunya adalah metode triangulasi pada poligon untuk menyelesaikan masalah galeri seni atau *Art Gallery Theorem*. *Art Gallery Theorem* pertama kali diajukan kepada Václav Chvátal oleh Victor Klee pada tahun 1973 yang bertujuan untuk menentukan minimum banyaknya penjaga di dalam sebuah galeri seni sehingga dapat menghemat tenaga dan biaya (Chesnokov, 2018).

Umumnya, jika hendak memasang kamera pengawas (CCTV) di sebuah ruangan, kamera-kamera tersebut akan diletakkan di sudut-sudut ruangan. Demikian juga penjaga galeri seni, setiap penjaga ditempatkan di sudut-sudut ruangan. Namun jika setiap sudut ruangan diberikan satu penjaga, maka akan ada terlalu banyak penjaga hanya untuk mengawasi satu ruangan galeri seni.

Contohnya adalah Guggenheim Museum di Bilbao, Spanyol dan American Revolution Museum di Amerika. Kedua museum tersebut memiliki banyak ruangan dengan desain lantai yang berbeda. Ada yang berbentuk persegi, lingkaran, oval, dan bentuk geometri yang lain. Untuk melindungi galeri seni dari masalah pencurian, maka galeri seni tersebut diberi penjaga. Namun jika setiap sudut ruangan diberikan satu penjaga, maka akan ada terlalu banyak penjaga hanya untuk mengawasi satu ruangan galeri seni. Masalah menentukan minimum banyaknya penjaga galeri seni dikenal dengan *Art Gallery Theorem*. Oleh karena itu digunakan *Art Gallery Theorem* atau masalah galeri seni. Salah satu teknik untuk memecahkan masalah galeri seni adalah dengan menerjemahkan situasi geometris menjadi situasi kombinatorial pada graf (Michael & Pinciu, 2003).

Masalah galeri seni dirumuskan dalam geometri sebagai minimum banyaknya penjaga yang perlu ditempatkan dalam poligon sederhana n sisi sehingga semua titik interior terlihat. (Chesnokov, 2018).

Selama bertahun-tahun masalah galeri seni telah diusulkan dan dipelajari dengan berbagai variasi penjagaan (Michael & Pinciu, 2003). Pada skripsi ini akan dikaji tentang variasi penjagaan dimana penjaga akan saling menjaga selain menjaga galeri seni. Tujuannya adalah untuk melindungi galeri seni dari masalah pencurian dan melindungi dari niat buruk penjaga. Teorema-teorema yang terkait dengan masalah tersebut akan dibuktikan dan dijelaskan lebih lanjut pada skripsi ini.

2. KAJIAN TEORI

Berikut ini diberikan beberapa definisi konsep yang digunakan untuk menunjang memahami pembahasan.

Poligon

Definisi 2.1:

n-poligon didefinisikan sebagai bidang yang dibentuk oleh gabungan n ruas garis yang setiap dua ruas garis berdekatan bertemu di salah satu titik ujungnya. Ruas garis tersebut disebut sisi poligon. n-poligon dikatakan poligon sederhana jika tidak ada lebih dari dua sisi yang berpotongan di satu titik. Poligon sederhana membagi bidang menjadi dua daerah, yaitu daerah eksterior yang tidak terbatas dan daerah interior yang terbatas .

(Urrutia, 1999)

Untuk selanjutnya P_n digunakan untuk melambangakan poligon sederhana bersama dengan interiornya.

Diagonal Interior

Definisi 2.2:

Diagonal interior dari suatu poligon P_n adalah ruas garis yang menghubungkan dua titik yang tidak berurutan (titik pada ruas garis yang sama) dan ruas garis tersebut berada di interior poligon.

Titik Sudut

Definisi 2.3:

Sudut adalah gabungan dua sinar garis dengan titik pangkal yang sama. Titik pangkal tersebut disebut titik sudut dan kedua sinar garis tersebut disebut sisi. Metode pengukuran sudut yang umum digunakan adalah berdasarkan pembagian lingkaran, yaitu pengukuran dengan derajat antara 0^0 sampai dengan 360^0. Ukuran sudut yang digunakan ditentukan dengan merotasi sisi ke sisi yang lain melewati daerah interior. Titik sudut pada P_n disebut titik konveks jika besar sudut kurang dari 180^0, titik sudut pada P_n disebut titik konkaf jika besar sudut lebih dari 180^0, dan titik sudut pada P_n disebut pelurus jika besar sudut sama dengan 180^0.

(Clements, Sarama, & Battista, 2014)

Graf

Definisi 2.4:

Graf G terdiri atas dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$. Himpunan $V(G)$ disebut himpunan titik G dan himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi G.

Sebuah graf G dapat direpresentasikan dalam bentuk diagram (gambar) dimana setiap titik G digambarkan dengan sebuah noktah dan setiap sisi yang menghubungkan dua titik di G digambarkan dengan sebuah kurva sederhana (ruas garis) dengan titik-titik akhir di kedua titik tersebut.

(Budayasa, 2007)

Derajat Titik pada Graf

Definisi 2.5:

Misalkan G graf dan v sebuah titik G. Derajat titik v, dilambangkan dengan $d_G(v)$ atau $d(v)$, adalah banyaknya sisi G yang terkait dengan titik v (dengan catatan setiap gelung dihitung dua kali).

(Budayasa, 2007).

Pewarnaan Titik pada Graf

Definisi 2.6:

Misalkan G graf. Pewarnaan- k dari G adalah pewarnaan semua titik G dengan menggunakan k warna sedemikian hingga dua titik G yang berhubungan langsung, yaitu dua titik yang dihubungkan oleh sebuah sisi mendapat warna berbeda. Jika G memiliki pewarnaan-k maka G dikatakan dapat diwarnai dengan k warna. Sebuah pewarnaan- k dari graf G biasanya ditunjukkan dengan memberi nama titik-titik G dengan warna $1,2,3,\ldots,k$.

(Budayasa, 2007)

Bilangan Kromatik pada Graf

Definisi 2.7:

Misalkan G graf. Bilangan kromatik (*chromatic number*) graf G , dilambangkan dengan $\chi(G)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\chi(G) = \min\{k \mid ada\ pewarnaan - k\ pada\ G\} \qquad (1)$$

Dengan kata lain, bilangan kromatik graf G adalah minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik G, sedemikian sehingga setiap dua titik yang berhubungan langsung mendapat warna yang berbeda. Jika $\chi(G) = k$ maka ada sebuah pewarnaan-k pada graf G, tetapi jika ada sebuah pewarnaan-k pada graf G, maka belum tentu $\chi(G) = k$.

(Budayasa, 2007)

3. PEMBAHASAN

Berikut ini akan dibahas lebih lanjut mengenai definisi dan sifat-sifat bi-multiplier simetrik pada aljabar incline.

Teorema Galeri Seni

Teorema galeri seni pertama kali diajukan kepada Václav Chvátal oleh Victor Klee pada tahun 1973 yang bertujuan untuk menentukan minimum banyaknya penjaga di dalam sebuah galeri seni sehingga dapat menghemat tenaga dan biaya. Masalah galeri seni dirumuskan dalam geometri sebagai minimum banyaknya penjaga yang perlu ditempatkan dalam poligon sederhana n sisi sehingga semua titik interior terlihat (Chesnokov, 2018). Pada skripsi ini akan dibuktikan bahwa $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ penjaga cukup untuk menjaga galeri seni n sisi. Salah satu teknik untuk memecahkan masalah galeri seni ini adalah dengan menerjemahkan situasi geometris menjadi situasi kombinatorial pada graf (Michael & Pinciu, 2003).

Untuk membuktikan teorema galeri seni, diperlukan teorema triangulasi, beberapa lemma, dan beberapa definisi sebagai berikut.

Lemma 3.1:

Setiap poligon P_n, $n \geq 3$, selalu memiliki titik konveks.

Bukti:

Andaikan ada poligon yang semua titiknya adalah titik konkaf.

Konstruksi sisi pertama, kemudian dilanjutkan dengan sisi ke-2, ke-3, ke$-\cdots$, ke$-n$. Karena semua titik sudutnya titik konkaf, maka sisi ke-2, ke-3, ke$-\cdots$, ke$-n$ akan menuju ke sisi pertama sedemikian sehingga diperoleh dua daerah, yaitu daerah eksterior yang terbatas dan daerah interior yang tidak terbatas.

Kontradiktif dengan Definisi 2.1, maka Lemma 3.2 terbukti. ∎

Teorema 3.1:

Poligon P_n dengan n sisi, $n \geq 3$, dapat ditriangulasi, yaitu dekomposisi poligon menjadi segitiga-segitiga, dengan menambah $n-3$ diagonal interior menjadi $n-2$ segitiga. Hasil dekomposisi tersebut disebut graf triangulasi, dinotasikan T_n dengan n titik, $n \geq 3$.

(O'Rourke, 1987)

Bukti:

Misalkan P_n adalah poligon dengan n sisi, $n \geq 3$.

Untuk $n = 3$ berlaku trivial.

Untuk $n \geq 4$:

Dikontruksi diagonal interior d . d membagi P_n menjadi dua poligon yang lebih kecil yaitu P' dan P''. Jika P' memiliki n_1 titik dan P'' memiliki n_2 titik, maka $n_1 + n_2 = n + 2$ karena d merupakan sisi persekutuan P' dan P''. Jika $n_i \geq 3, i = 1, 2$, maka dengan dilakukan induksi matematik diperoleh:

(1) Untuk $n_i = 3$ diperoleh 1 segitiga dengan 0 diagonal interior.

(2) Misalkan berlaku untuk $n_i = k$, yaitu diperoleh $k-2$ segitiga dengan menambah $k-3$ diagonal interior.

(3) Akan ditujukkan berlaku untuk $n_i = k+1$.

Poligon dengan $k+1$ sisi (P_{k+1}) dapat diubah menjadi poligon dengan k sisi (P_k), dengan mengubah dua sisi berurutan menjadi satu sisi. Karena pada P_k terdapat $k-2$ segitiga, maka pada P_{k+1} terdapat $k-2+1 = (k+1)-2$ segitiga. Demikian juga karena pada P_k terdapat $k-3$ diagonal interior, maka pada P_{k+1} terdapat $k-3+1 = (k+1)-3$ diagonal interior.

Jadi, poligon P_n, $n \geq 3$ dapat ditriangulasi menjadi $n-2$ segitiga dengan menambah $n-3$ diagonal interior. ∎

Lemma 3.2:

Jumlah besar sudut interior suatu poligon P_n dengan n sisi, $n \geq 3$ adalah $(n-2) \times 180^0$.

Bukti:

Berdasarkan Teorema 3.1, P_n dapat ditriangulasi menjadi $n-2$ segitiga dengan jumlah besar sudut interior suatu segitiga adalah 180^0. Graf triangulasi menghasilkan partisi berupa segitiga-segitiga yang saling lepas dengan diagonal T_n sebagai sisi persekutuan dua segitiga. Sehingga mengakibatkan besar sudut interior poligon pada suatu titik sama dengan jumlah besar sudut segitiga-segitiga di titik tersebut pada graf triangulasi. Maka jumlah besar sudut interior suatu poligon P_n dengan n sisi, $n \geq 3$ adalah $(n-2) \times 180^0$. ■

Lemma 3.3:

Setiap graf triangulasi T_n dengan n titik, $n \geq 3$, dapat diwarnai oleh tiga warna.

(Chesnokov, 2018)

Bukti:

Misalkan T_n adalah graf triangulasi dengan n titik, $n \geq 3$.

Pilih sebarang segitiga dan dilakukan pewarnaan titik dengan memberi tiga warna berbeda untuk setiap titik, misal $\{1, 2, 3\}$. Lakukan pada segitiga berikutnya, yaitu segitiga yang mempunyai sisi persekutuan dengan segitiga yang sudah diwarnai. Karena sisi persekutuan sudah mempunyai dua warna, maka titik pada segitiga yang belum diwarnai dapat diberi warna yang belum dipakai. Lakukan sampai segitiga terakhir sedemikian sehingga setiap dua titik yang berhubungan mendapat warna yang berbeda. ■

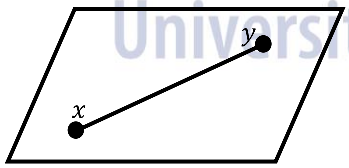
Titik yang Saling Melihat

Definisi 3.1:

Misalkan P_n poligon n sisi dengan $n \geq 3$ dan $x, y \in P_n$. Titik x dikatakan melihat y dan titik x terlihat dari y jika ada sebuah ruas garis yang menghubungkan x dan y yang berada di P_n. Titik x dan y dikatakan saling melihat.

(Michael & Pinciu, 2003)

Contoh:



Gambar 1. x dan y saling melihat

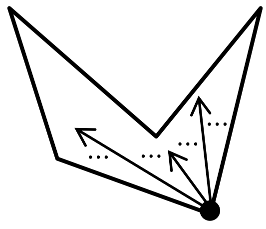
Himpunan Penjaga

Definisi 3.2:

Misalkan P_n n-poligon dengan $n \geq 3$ dan $\mathcal{G} \in P_n$. $\mathcal{G}$ disebut himpunan penjaga P_n jika untuk setiap titik x di P_n ada titik y di $\mathcal{G}$ sedemikian sehingga x terlihat dari y. Titik-titik pada $\mathcal{G}$ disebut penjaga P_n.

(Michael & Pinciu, 2003)

Contoh:



Gambar 2. P_5 dengan 1 penjaga

Gambar 2 adalah P_5 dengan 1 penjaga, yaitu x, karena x dapat melihat semua titik P_5. Jadi Gambar 2 memiliki 1 penjaga dengan $\mathcal{G} = \{x\}$.

Minimum Kardinalitas Himpunan Penjaga

Definisi 3.3:

Misalkan A n-poligon dengan $n \geq 3$. $g(A)$ didefinisikan sebagai minimum kardinalitas himpunan penjaga di A.

(Michael & Pinciu, 2003)

Maksimum $g(A)$

Definisi 3.4:

Misalkan minimum kardinalitas himpunan penjaga P_n adalah $g(P_n)$. Notasi $g(n)$ menyatakan maksimum $g(P_n)$ untuk P_n n-poligon, atau

$$g(n) = \max\{g(A) | A \ adalah \ n - poligon\} \quad (2)$$

(Michael & Pinciu, 2003)

Lemma 3.4:

$g(3) = 1$

Bukti:

P_3 adalah poligon dengan 3 sisi, atau segitiga. Karena P_3 adalah segitiga, maka setiap titik pada P_3 adalah titik konveks. Jadi, untuk setiap poligon P_3 dapat dijaga oleh 1 penjaga, atau $g(P_3) = 1$. Sehingga, $g(3) = 1$. ■

Teorema 3.2:

Untuk $n > 3$, berlaku $g(n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$.

(Chesnokov, 2018)

Bukti:

Misal P_n adalah poligon dengan n sisi, $n > 3$.

Berdasarkan Teorema 3.1, P_n dapat ditriangulasi menjadi T_n dengan menambah $n-3$ diagonal interior.

Berdasarkan Lemma 3.3, T_n dapat diwarnai oleh tiga warna, misal $\{1, 2, 3\}$.

Misal: K_1 adalah himpunan titik-titik T_n yang berwarna 1
K_2 adalah himpunan titik-titik T_n yang berwarna 2
K_3 adalah himpunan titik-titik T_n yang berwarna 3

Jika $|K_1| = |K_2| = |K_3|$, maka pilih sembarang titik sebanyak $|K_i|$, $i = 1, 2, 3$ untuk menjadi tempat penjaga sedemikian sehingga setiap titik di P_n dapat terlihat.

Jika $|K_1| \neq |K_2| \neq |K_3|$ atau $|K_1| = |K_2| \neq |K_3|$ atau $|K_1| \neq |K_2| = |K_3|$, maka pilih K_i, $i = 1, 2, 3$ yang memiliki kardinalitas terkecil untuk menjadi tempat penjaga.

Misal $|K_1| \leq |K_2| \leq |K_3|$, maka $|K_1| + |K_2| + |K_3| = n$. Sehingga diperoleh $|K_1| \leq \frac{n}{3}$ atau $|K_2| \leq \frac{n}{3}$ atau $|K_3| \leq \frac{n}{3}$. Karena banyaknya titik yang dipilih untuk menjadi tempat penjaga adalah suatu bilangan bulat, maka sebanyak $\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ penjaga yang diperlukan untuk menjadi tempat penjaga, atau $g(n) = \left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$. ■

Teorema Galeri Seni untuk Penjaga Terjaga

Selama bertahun-tahun masalah galeri seni telah diusulkan dan dipelajari dengan berbagai variasi penjagaan (Michael & Pinciu, 2003). Pada skripsi ini akan dikaji mengenai variasi dimana penjaga harus menjaga satu sama lain selain menjaga galeri seni. Tujuannya adalah untuk melindungi galeri seni dari masalah pencurian dan melindungi dari niat buruk penjaga.

Untuk membuktikan teorema galeri seni untuk penjaga terjaga, diperlukan beberapa definisi, lemma, dan teorema sebagai berikut.

Himpunan Penjaga Terjaga

Definisi 3.5:

Misalkan P_n poligon n sisi dengan $n \geq 3$. $\mathcal{G}$ disebut himpunan penjaga terjaga pada P_n jika:

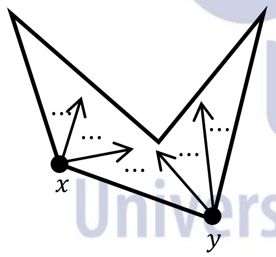
(a) Untuk setiap titik x di P_n ada titik w di $\mathcal{G}$ sedemikian sehingga x dapat terlihat dari w.

(b) Untuk setiap titik w di $\mathcal{G}$, ada titik v di $\mathcal{G}$ dengan $v \neq w$ sedemikian sehingga w terlihat dari v.

Titik-titik pada $\mathcal{G}$ adalah penjaga terjaga P_n.

(Michael & Pinciu, 2003)

Contoh:



Gambar 3. P_5 dengan 2 penjaga terjaga

Gambar 3 adalah P_5 yang memiliki 2 penjaga terjaga karena berdasarkan Definisi 3.5 (b) untuk setiap satu penjaga harus terlihat dari penjaga yang lain sehingga kedua penjaga tersebut disebut penjaga terjaga. Karena x dan y dihubungkan oleh ruas garis, maka x dan y saling melihat. Jadi Gambar 3 memiliki 2 penjaga terjaga dengan $\mathcal{G} = \{x, y\}$.

Minimum Kardinalitas Himpunan Penjaga Terjaga

Definisi 3.6:

Misalkan P_n poligon n sisi dengan $n \geq 3$. Untuk sebarang poligon P_n , $gg(P_n)$ didefinisikan sebagai minimum kardinalitas dari himpunan penjaga terjaga di P_n.

(Michael & Pinciu, 2003)

Maksimum $gg(P_n)$

Definisi 3.7:

Misalkan minimum kardinalitas dari himpunan penjaga terjaga di P_n adalah $gg(P_n)$. Maksimum dari $gg(P_n)$ dinotasikan dengan $gg(n)$ untuk semua poligon n sisi.

(Michael & Pinciu, 2003)

Lemma 3.5:

Misalkan T_n graf triangulasi P_n dengan n titik, $n \geq 10$. Maka ada diagonal di T_n yang memisahkan P_n menjadi dua graf triangulasi T_m dan T_{n-m+2} , salah satunya memiliki m titik, dengan $m \in \{6, 7, 8, 9\}$.

(Michael & Pinciu, 2003)

Bukti:

Berdasarkan Teorema 3.1, T_n adalah graf triangulasi, yaitu hasil dekomposisi P_n menjadi $n - 2$ segitiga dengan menambah $n - 3$ diagonal interior.

Pilih d diagonal T_n yang memisahkan P_n menjadi dua poligon, salah satunya memiliki banyak titik paling sedikit 6.

Misalkan $m \geq 6$ adalah banyak titik minimal. (3)

Tandai titik-titik pada T_n dengan $v_t, 1 \leq t \leq n$ sedemikian hingga d adalah ruas garis yang menghubungkan titik v_1 dengan v_6.

Karena v_t adalah titik segitiga, maka $1 < t < m$. Karena m adalah banyak sisi terkecil, maka $t \leq 5$ dan $m - t \leq 4$. Sehingga diperoleh $m \leq 9$. (4)

Berdasarkan (3) dan (4), maka $m \in \{6, 7, 8, 9\}$.

Karena d merupakan sisi persekutuan yang memisahkan P_n menjadi dua graf triangulasi, maka dua graf triangulasi tersebut masing-masing memiliki m titik dan $n - m + 2$ titik, dengan $m \in \{6, 7, 8, 9\}$. ■

Lemma 3.6:

Misalkan $[x, y]$ adalah sisi batas, yaitu pasangan titik berurutan di P_n pada graf triangulasi T_m dengan m titik.

(a) Jika $m = 6$, maka $\{w, x\}$ atau $\{w, y\}$ adalah himpunan penjaga terjaga pada T_m untuk suatu w.

(b) Jika $m = 7$, maka $gg(T_m) = 2$.

(c) Jika $m = 8$, maka $\{v, w, x\}$ atau $\{v, w, y\}$ adalah himpunan penjaga terjaga pada T_m untuk suatu v dan w.

(d) Jika $m = 9$, maka $gg(T_m) \leq 3$.

(Michael & Pinciu, 2003)

Bukti:

Misalkan $[x, y]$ adalah sisi batas di P_n.

(a) Jika $m = 6$.

Pilih titik w di T_6 yang berhubungan langsung dengan titik x atau titik y sedemikian sehingga $\{w,x\}$ atau $\{w,y\}$ dapat melihat semua titik di T_6.

Maka $\{w,x\}$ atau $\{w,y\}$ adalah himpunan penjaga terjaga pada T_6 atau $gg(T_6) = 2$.

(b) Jika $m = 7$.

Misal ada titik z di T_7, z memiliki derajat titik 2 dengan x dan y menjadi tetangganya.

Abaikan z di T_7 sehingga menjadi T_6.

Berdasarkan pernyataan (a), T_6 memiliki penjaga terjaga atau $gg(T_6) = 2$, dengan himpunan penjaga terjaga $\mathcal{G} = \{w,x\}$ atau $\mathcal{G} = \{w,y\}$.

Karena z berhubungan langsung dengan titik x dan titik y, maka z dapat terlihat dari x dan y. Sehingga $\{w,x\}$ atau $\{w,y\}$ dapat melihat semua titik di T_7. Jadi $gg(T_7) = 2$.

(c) Jika $m = 8$.

Kontraksikan sisi $[x,y]$ di T_8 sedemikian hingga menjadi T_7. Berdasarkan pernyataan (b), T_7 memiliki penjaga terjaga atau $gg(T_7) = 2$ dengan himpunan penjaga terjaga $\mathcal{G}$, misal $\mathcal{G} = \{v,w\}$. Pilih sembarang titik T_7 untuk menjadi titik v dan titik w sedemikian sehingga $\{v,w\}$ dapat melihat semua titik di T_7.

Karena titik x dan titik y berhubungan langsung, maka titik x dan titik y saling melihat. Sehingga $\{v,w,x\}$ atau $\{v,w,y\}$ dapat melihat semua titik di T_8. Jadi $\{v,w,x\}$ atau $\{v,w,y\}$ adalah himpunan penjaga terjaga di T_8, atau $gg(T_8) = 3$.

(d) Jika $m = 9$.

Misal ada titik z di T_9, z memiliki derajat titik 2 dengan x dan y menjadi tetangganya.

Abaikan z di T_9 sehingga menjadi T_8.

Berdasarkan pernyataan (c), T_8 memiliki penjaga terjaga atau $gg(T_8) = 3$, dengan himpunan penjaga terjaga $\mathcal{G} = \{v,w,x\}$ atau $\mathcal{G} = \{v,w,y\}$.

Karena z berhubungan langsung dengan titik x dan titik y, maka z dapat terlihat dari x dan y. Sehingga $\{v,w,x\}$ atau $\{v,w,y\}$ dapat melihat semua titik di T_9 atau $gg(T_9) = 3$. Atau bisa juga terjadi T_9 cukup dijaga oleh 2 penjaga terjaga. Jadi $gg(T_9) \le 3$. ■

Teorema 3.3:

Jika T_n adalah graf triangulasi dengan n titik, $n \ge 5$, maka $gg(T_n) \le \left\lfloor \frac{3n-1}{7} \right\rfloor$.

(Michael & Pinciu, 2003)

Bukti:

$$gg(T_n) \le \left\lfloor \frac{3n-1}{7} \right\rfloor \qquad (5)$$

Dengan melakukan substitusi $n = 5, 6, 7, 8, 9$, maka pertidaksamaan (5) benar untuk $n = 5$, dan berdasarkan Lemma 3.6, pertidaksamaan (5) benar untuk $6 \le n \le 9$.

Untuk $n \ge 10$. Berdasarkan Lemma 3.5, ada sebuah diagonal, misal $[x,y]$ yang memisahkan graf triangulasi T_n menjadi dua graf triangulasi yaitu T_m dan T_{n-m+2}, dengan $m \in \{6,7,8,9\}$. Maka,

$$gg(T_n) \le gg(T_{n-m+2}) + gg(T_m) \qquad (6)$$

Untuk $m = 7$.

$$\begin{aligned} gg(T_n) &\le gg(T_{n-m+2}) + gg(T_m) \\ &\le gg(T_{n-7+2}) + gg(T_7) \\ &\le gg(T_{n-5}) + gg(T_7) \\ &\le \left\lfloor \frac{3(n-5)-1}{7} \right\rfloor + gg(T_7) \end{aligned}$$

Berdasarkan Lemma 3.6 (b), $gg(T_7) = 2$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} gg(T_n) &\le \left\lfloor \frac{3(n-5)-1}{7} \right\rfloor + 2 \\ &\le \left\lfloor \frac{3n-15-1}{7} + 2 \right\rfloor \\ &\le \left\lfloor \frac{3n-16+14}{7} \right\rfloor \\ &\le \left\lfloor \frac{3n-2}{7} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{3n-1}{7} \right\rfloor \end{aligned}$$

Untuk $m = 9$.

$$\begin{aligned} gg(T_n) &\le gg(T_{n-m+2}) + gg(T_m) \\ &\le gg(T_{n-9+2}) + gg(T_9) \\ &\le gg(T_{n-7}) + gg(T_9) \\ &\le \left\lfloor \frac{3(n-7)-1}{7} \right\rfloor + gg(T_9) \end{aligned}$$

Berdasarkan Lemma 3.6 (d), $gg(T_9) = 3$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} gg(T_n) &\le \left\lfloor \frac{3(n-7)-1}{7} \right\rfloor + 3 \\ &\le \left\lfloor \frac{3n-21-1}{7} + 3 \right\rfloor \\ &\le \left\lfloor \frac{3n-22+21}{7} \right\rfloor \end{aligned}$$

$$gg(T_n) \le \left\lfloor \frac{3n-1}{7} \right\rfloor$$

Untuk $m \in \{6,8\}$. Dengan mengontraksikan diagonal $[x,y]$ pada graf triangulasi T_{n-m+2}, maka diperoleh graf triangulasi T_{n-m+1}.

Misal $\mathcal{G}^*$ adalah himpunan penjaga terjaga di graf triangulasi T_{n-m+1}. Maka berdasarkan Lemma 3.6 (b) dan (c), untuk $m = 6$, $gg(T_n) = T_{n-m+1} \cup \{w,y\}$ dan untuk $m = 8$, $gg(T_n) = T_{n-m+1} \cup \{v,w,y\}$.

Untuk $m = 6$.

$$\begin{aligned} gg(T_n) &\le gg(T_{n-m+1}) \cup \{w,y\} \\ &\le gg(T_{n-6+1}) + 2 \\ &\le gg(T_{n-5}) + 2 \\ &\le \left\lfloor \frac{3(n-5)-1}{7} \right\rfloor + 2 \\ &\le \left\lfloor \frac{3n-15-1}{7} + 2 \right\rfloor \\ &\le \left\lfloor \frac{3n-16+14}{7} \right\rfloor \\ &\le \left\lfloor \frac{3n-2}{7} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{3n-1}{7} \right\rfloor \end{aligned}$$

Untuk $m = 8$.

$$gg(T_n) \le gg(T_{n-m+1}) \cup \{v,w,y\}$$

$\leq gg(T_{n-8+1}) + 3$
$\leq gg(T_{n-7}) + 3$
$\leq \left\lfloor \frac{3(n-7)-1}{7} \right\rfloor + 3$
$\leq \left\lfloor \frac{3n-21-1}{7} + 3 \right\rfloor$
$\leq \left\lfloor \frac{3n-22+21}{7} \right\rfloor$
$\leq \left\lfloor \frac{3n-1}{7} \right\rfloor$

Jadi, $gg(T_n) \leq \left\lfloor \frac{3n-1}{7} \right\rfloor$, untuk $n \geq 5$ terbukti. ■

Lemma 3.7:

Untuk setiap penjaga terjaga pada poligon P_n memiliki kardinalitas setidaknya $\left\lfloor \frac{3n-1}{7} \right\rfloor$ untuk $n \geq 5$.

(Michael & Pinciu, 2003)

Bukti:

$gg(P_n) \geq \left\lfloor \frac{3n-1}{7} \right\rfloor$ (7)

Dengan melakukan substitusi $n = 5, 6, 7, 8, 9$, maka pertidaksamaan (7) benar untuk $n = 5$, dan berdasarkan Lemma 3.6, pertidaksamaan (7) benar untuk $6 \leq n \leq 9$.

Untuk $n = 10, 11$. Berdasarkan Lemma 3.5, ada sebuah diagonal, misal $[x, y]$ yang memisahkan graf triangulasi T_n menjadi dua graf triangulasi yaitu T_m dan T_{n-m+2}, dengan $m \in \{6, 7, 8, 9\}$. Maka,

$gg(T_n) \geq gg(T_{n-m+2}) + gg(T_m)$ (8)

Untuk $n = 10$:

Dengan melakukan substitusi $n = 10$ ke pertidaksamaan (8), maka diperoleh:

$gg(T_{10}) \geq gg(T_{10-m+2}) + gg(T_m)$

Misal $m = 6$, maka

$gg(T_{10}) \geq gg(T_{10-6+2}) + gg(T_6)$
$\geq gg(T_6) + gg(T_6)$

Berdasarkan Lemma 3.6 (a), $gg(T_6) = 2$, maka

$gg(T_{10}) \geq 2 + 2$
≥ 4

Dengan melakukan substitusi $n = 10$ ke pertidaksamaan (7), maka diperoleh:

$gg(P_n) \geq \left\lfloor \frac{3n-1}{7} \right\rfloor$
$gg(P_{10}) \geq \left\lfloor \frac{3(10)-1}{7} \right\rfloor$
$\geq \left\lfloor \frac{29}{7} \right\rfloor$
≥ 4

Maka pertidaksamaan (7) benar untuk $n = 10$.

Untuk $n = 11$:

$gg(T_{11}) \geq gg(T_{11-m+2}) + gg(T_m)$

Misal $m = 6$, maka

$gg(T_{10}) \geq gg(T_{11-6+2}) + gg(T_6)$
$\geq gg(T_7) + gg(T_6)$

Berdasarkan Lemma 3.6 (b), $gg(T_7) = 2$, maka

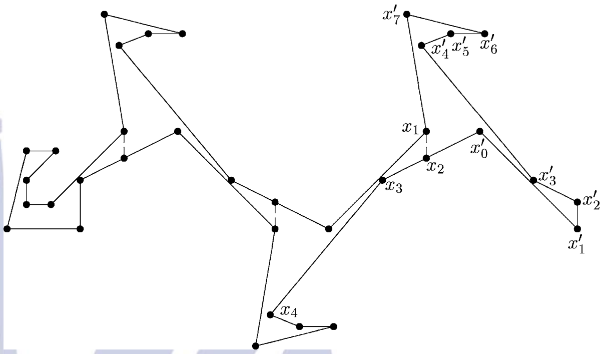
$gg(T_{10}) \geq 2 + 2$
≥ 4

Dengan melakukan substitusi $n = 11$ ke pertidaksamaan (7), maka diperoleh:

$gg(P_n) \geq \left\lfloor \frac{3n-1}{7} \right\rfloor$
$gg(P_{10}) \geq \left\lfloor \frac{3(11)-1}{7} \right\rfloor$
$\geq \left\lfloor \frac{32}{7} \right\rfloor$
≥ 4

Maka pertidaksamaan (7) benar untuk $n = 11$.

Untuk $n \geq 12$.



Gambar 4. P_n

Misal : $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}_{n-7} \cup \mathcal{G}'$

dengan : $\mathcal{G}_n$ = himpunan penjaga terjaga P_n

$\mathcal{G}_{n-7}$ = himpunan penjaga terjaga P_{n-7}

$= \mathcal{G}_n \cap P_{n-7}$

$\mathcal{G}' = P'_{10}$ kecuali $x_1 x_2$

Karena $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}_{n-7} \cup \mathcal{G}'$, maka

$|\mathcal{G}_n| = |\mathcal{G}_{n-7}| + |\mathcal{G}'|$ (8)

Berdasarkan Gambar 4, ada dua titik berbeda di $\mathcal{G}'$, misal w'_2 dan w'_6 untuk menjadi penjaga sedemikian sehingga x'_2 dan x'_6 terlihat. Karena w'_2 dan w'_6 tidak saling melihat, maka ada titik w' di $\mathcal{G}_n$ sedemikian sehingga w' dan w'_2 saling melihat, dan w' dan w'_6 saling melihat. Sehingga diperoleh

$|\mathcal{G}'| \geq 3$ (9)

Berdasarkan Gambar 4, ada titik x di P_{n-7} yang terlihat dari titik di P'_{10}, maka x juga terlihat dari titik x_3 dan x_1. Kemudian ada titik pada garis $x_3 x_4$ yang dekat dengan x_3 tidak terlihat dari titik di P'_{10} dan karenanya harus terlihat dari titik w di $\mathcal{G}_{n-7}$. Sehingga, x_3 terlihat dari w. Maka, $\mathcal{G}_{n-7} \cup \{z\}$ adalah himpunan penjaga terjaga P_{n-7}, dimana $z = x_3$ jika $x_3 \notin \mathcal{G}_{n-7}$. Dengan menggunakan induksi hipotesis $|\mathcal{G}_{n-7} \cup \{z\}| \geq \left\lfloor \frac{3n-1}{7} \right\rfloor$. Sehingga diperoleh

$|\mathcal{G}_{n-7}| \geq \left\lfloor \frac{3(n-7)-1}{7} \right\rfloor - 1$ (10)

Jika $|\mathcal{G}'| \geq 4$, maka berdasarkan pertidaksamaan (10) dan (8), $|\mathcal{G}_n| \geq \left\lfloor \frac{3n-1}{7} \right\rfloor$. Satu-satunya kasus tersisa adalah $|\mathcal{G}'| = 3$. Maka berdasarkan pertidaksamaan (9), $w' = w''$, sehingga $\mathcal{G}' = \{w'_2, w'_6, w'\}$. Titik pada garis $x_3 x_2$

yang dekat dengan x_3 tidak terlihat dari setiap titik $\mathcal{G}'$, dan karenanya ada titik $w \in \mathcal{G}_{n-7}$ terlihat dari setiap titik. Kemudian himpunan $\mathcal{G}_{n-7} - \{w\} \cup \{z\}$ adalah himpunan penjaga terjaga P_{n-7}, dimana $z = x_1$. Sehingga $|\mathcal{G}_{n-7}| \geq \left\lfloor\frac{3(n-7)-1}{7}\right\rfloor$ dan berdasarkan persamaan (8), $|\mathcal{G}_n| \geq \left\lfloor\frac{3n-1}{7}\right\rfloor$. ∎

Kemudian dapat dibuktikan teorema galeri seni untuk penjaga terjaga sebagai berikut.

Teorema 3.4:

Untuk setiap poligon P_n dengan n sisi, $n \geq 5$, $gg(n) = \left\lfloor\frac{3n-1}{7}\right\rfloor$.

(Michael & Pinciu, 2003)

Bukti:

Berdasarkan Teorema 3.3, $gg(T_n) \leq \left\lfloor\frac{3n-1}{7}\right\rfloor$, maka $gg(P_n) \leq \left\lfloor\frac{3n-1}{7}\right\rfloor$. (11)

Berdasarkan Lemma 3.7, $gg(P_n) \geq \left\lfloor\frac{3n-1}{7}\right\rfloor$. (12)

Berdasarkan (11) dan (12), maka $gg(P_n) = \left\lfloor\frac{3n-1}{7}\right\rfloor$.

Karena $gg(P_n) = \left\lfloor\frac{3n-1}{7}\right\rfloor$, maka $gg(n) = \left\lfloor\frac{3n-1}{7}\right\rfloor$. ∎

Berdasarkan Teorema 3.4 maka dapat ditentukan minimum banyaknya penjaga untuk berbagai macam bentuk galeri seni.

4. PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya, maka dapat diuraikan kesimpulan sebagai berikut:

a. Banyak penjaga pada poligon n sisi, dengan $n > 3$ adalah $\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$.

b. Banyak penjaga terjaga pada poligon n sisi, dengan $n \geq 5$ adalah $\left\lfloor\frac{3n-1}{7}\right\rfloor$.

Saran

Saran untuk penelitian berikutnya adalah dapat membahas variasi penjagaan galeri seni untuk berbagai macam poligon, tidak hanya poligon umum, tetapi juga bentuk poligon yang lain misalnya poligon orthogonal. Selain itu, pembahasan mengenai penjagaan galeri seni dapat diterapkan pada galeri seni atau suatu ruangan di kehidupan nyata.

DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya.* Surabaya: Unesa University Press.

Chesnokov, N. (2018). *The Art Gallery Problem: An Overview and Extension to Chromatic Coloring and Mobile Guards.* Cambridge: MIT Mathematics.

Clements, D. H., Sarama, J., & Battista, M. (2014). Angles. *Research Gate*, 27-30.

Michael, T. S., & Pinciu, V. (2003). Art Gallery Theorems for Guarded Guard. *Computational Geometry*, 247-258.

O'Rourke, J. (1987). *Art Gallery Theorems and Algorithms.* New York: Oxford University Press.

Urrutia, J. (1999). Art Gallery and Illumination Problems. Dalam *COMPUTATIONAL GEOMETRY* (hal. 973-1027). Mexico: Elsevier Science B. V.