

INDEKS KROMATIK KUAT SEBUAH SUBKELAS GRAF HALINKUBIK

Imam Abi Chasan Asysyadzili

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : imamasysyadzili16030214042@mhs.unesa.ac.id

Budi Rahadjeng

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : budirahadjeng@unesa.ac.id

Abstrak

Pewarnaan-sisi-kuat graf G adalah pemetaan $c : E(G) \rightarrow [n]$ sedemikian hingga setiap dua sisi yang memiliki jarak paling banyak dua diberi nilai (warna) berbeda, di mana $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ merupakan himpunan n bilangan asli pertama (himpunan n warna). Pewarnaan-sisi- n -kuat pada graf G merupakan pewarnaan-sisi-kuat pada graf G menggunakan paling banyak n warna. Indeks kromatik kuat graf G dilambangkan dengan $x'_s(G)$, didefinisikan sebagai berikut: $x'_s(G) = \min\{n | \text{ada pewarnaan-sisi-kuat-}n \text{ pada } G\}$. Pada artikel ini, ditunjukkan bahwa indeks kromatik kuat $x'_s(G)$ graf Halin kubik $2h + 2$ titik dengan pohon karakteristik graf ulat memenuhi $6 \leq x'_s(G) \leq 9$.

Kata kunci: Indeks kromatik kuat, Pewarnaan-sisi-kuat, Graf Halin, Graf Ulat.

Abstract

Strong-edge-coloring of a graph G is a mapping $c : E(G) \rightarrow n$ such that any two edges which the distance has at most two is given a different value (colors), which $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ is the set of n first natural number. A strong n -edge-coloring of a graph G is a strong-edge-coloring of G using at most n colors. Strong chromatic index of graph G is denoted by $x'_s(G)$, defined as: $x'_s(G) = \min\{n | \text{there is a strong } n\text{-edge-coloring for } G\}$. In this article will be shown that the strong chromatic index $x'_s(G)$ of cubic Halin graph with $2h + 2$ node whose characteristic tree is a caterpillar satisfy $6 \leq x'_s(G) \leq 9$.

Keywords : Strong chromatic index, Strong-edge-coloring, Halin graph, Caterpillar graph

1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang telah ada lebih dari dua abad yang lalu. Seorang matematikawan yang bernama Euler dari Swiss memperkenalkan jurnal tentang teori graf untuk pertama kalinya pada tahun 1736. Pada awalnya teori graf tidak terlalu signifikan dalam segi matematika, karena sebagian besar digunakan untuk menyelesaikan permasalahan teka-teki. Seiring berjalannya waktu teori graf mencapai perkembangan yang begitu cepat dalam beberapa dekade akhir, karena teori graf dapat diaplikasikan secara luas pada kehidupan sehari-hari hingga bermacam-macam bidang ilmu : Teknik, Sains, Ilmu Komputasi, hingga Ilmu Sosial dan Bisnis (Budayasa, 2007).

Saat ini sangatlah banyak aplikasi teori graf, salah satunya adalah pewarnaan graf. Awal mula pewarnaan graf dikenalkan oleh seorang matematikawan Francis Guthrie pada tahun 1852. Terdapat 3 jenis pewarnaan graf, yaitu pewarnaan sisi, pewarnaan titik, dan pewarnaan muka.

Kajian pewarnaan sisi mengalami perkembangan, salah satunya adalah pewarnaan-sisi-kuat graf. Dalam

artikel yang ditulis W.C. Shiu, P.C.B. Lam dan W.K. Tam dinyatakan bahwa pewarnaan-sisi-kuat pertama kali dipelajari pada tahun 1983 oleh Fouquet dan Jolivet pada graf kubik planar.

Pewarnaan-sisi-kuat pada graf G adalah pemetaan $c : E(G) \rightarrow [n]$ sedemikian hingga setiap dua sisi yang memiliki jarak maksimum dua akan diberi nilai (warna) berbeda, di mana $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ merupakan himpunan n bilangan asli pertama (himpunan n warna). Pewarnaan-sisi-kuat- n pada graf G merupakan pewarnaan-sisi-kuat graf G dengan menggunakan maksimum n warna berbeda. Indeks kromatik kuat graf G dilambangkan $x'_s(G)$, didefinisikan sebagai: $x'_s(G) = \min\{n | \text{ada pewarnaan-sisi-kuat-}n \text{ pada } G\}$. Dalam kehidupan sehari-hari, pewarnaan-sisi-kuat juga dapat diterapkan pada sistem jaringan komunikasi, penyelesaian permainan Sudoku, dan lain-lain.

Terdapat beberapa penelitian yang telah dilakukan untuk memperoleh indeks-kromatik-kuat kelas graf tertentu, yaitu pada Graf Bipartit, dan Graf Planar. Dalam permasalahan pewarnaan-sisi-kuat suatu graf, beberapa graf tidak dapat ditentukan nilai eksak indeks-kromatik-

kuatnya, karena graf tersebut hanya dapat dicari batas atas dan batas bawahnya. Dalam artikel ini, dikaji tentang teorema-teorema dalam menentukan batas atas dan batas bawah untuk indeks-kromatik-kuat pada graf Halin.

2. KAJIAN TEORI

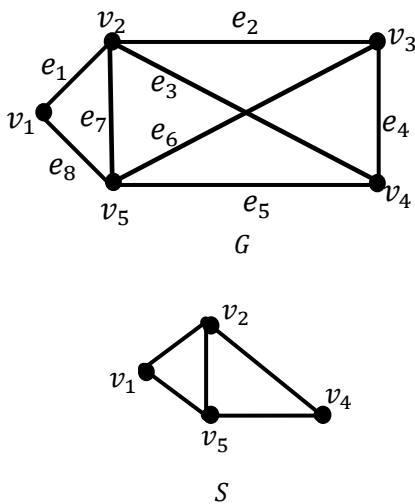
Dalam bagian ini, dikaji konsep-konsep dasar yang digunakan sebagai landasan pada pembahasan berikutnya.

A. Konsep Graf

Graf G terdiri atas dua himpunan yaitu himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$.

Graf S dinamakan subgraf dari graf G , yaitu $S \subset G$, dimana $V(S) \subset V(G)$ dan $E(S) \subset E(G)$.

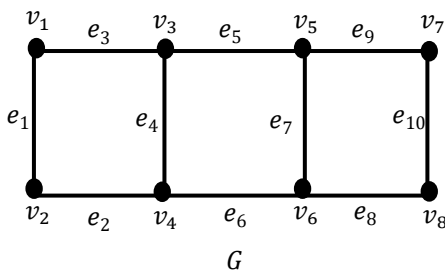
Contoh :



Gambar 2.1. Graf S merupakan subgraf dari G

Misalkan G sebuah graf yang memuat sisi e, e' . Jarak antara sisi e dengan sisi e' pada graf G , disimbolkan sebagai $d_G(e, e')$, yaitu minimum n , sedemikian hingga ada barisan sisi e_0, e_1, \dots, e_n , dengan $e = e_0, e' = e_n$, dan e_{i-1} dan e_i terkait pada titik yang sama, $\forall 1 \leq i \leq n$.

Contoh :



Gambar 2.2. Graf G dengan $d_G(e_1, e_2) = 1$, $d_G(e_1, e_4) = 2$, $d_G(e_1, e_7) = 3$, $d_G(e_1, e_{10}) = 4$, $d_G(e_4, e_9) = 2$, $d_G(e_6, e_3) = 2$, dan seterusnya.

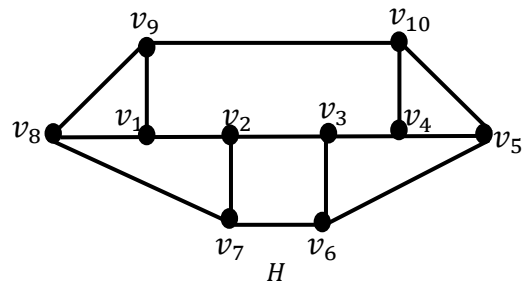
B. Beberapa Jenis Graf

Jika suatu graf G dapat digambarkan pada bidang datar sedemikian hingga tidak ada semua sisinya yang saling berpotongan kecuali pada titik-titik ujungnya disebut graf planar. Sedangkan graf bidang merupakan graf planar yang digambarkan pada bidang datar dimana tidak ada sisi-sisi yang saling berpotongan.

Graf terhubung dan tidak memuat siklus disebut graf pohon. Pada graf pohon, titik berderajat 1 disebut daun. Graf ulat merupakan graf pohon di mana jika semua daunnya dihapus akan menjadi lintasan, lintasan ini disebut batang pohon (Chartrand dkk., 1998).

Graf Halin $G = T \cup C$ adalah graf bidang yang dibangun dengan menggabungkan sebuah pohon T dan siklus C yang menghubungkan daun (titik berderajat 1) pada T . Graf Halin Kubik merupakan graf Halin yang semua titiknya berderajat 3.

Contoh :

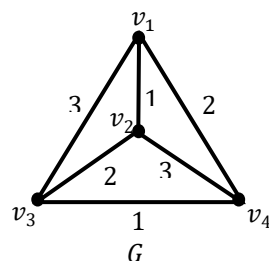


Gambar 2.3. Graf H merupakan graf Halin kubik.

C. Pewarnaan-sisi Graf

Pewarnaan-sisi graf G merupakan pemberian atau pelabelan warna ke semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang saling terkait di titik yang sama diwarnai dengan warna berbeda. Indeks kromatik graf G dilambangkan sebagai $\chi'(G)$, yaitu bilangan yang menyatakan minimum banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan-sisi G .

Contoh :

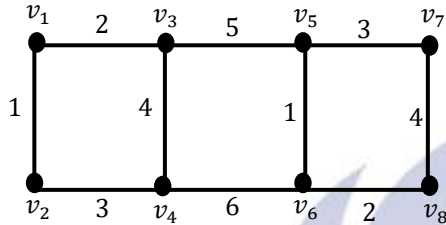


Gambar 2.3. Graf G dengan $\chi'(G) = 3$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembahasan diawali dengan konsep pewarnaan-sisi-kuat dan indeks kromatik kuat pada graf.

Pewarnaan-sisi-kuat graf G adalah pemetaan $c : E(G) \rightarrow \llbracket n \rrbracket$ sedemikian hingga setiap dua sisi yang memiliki jarak paling banyak dua akan diberi nilai (warna) berbeda, di mana $\llbracket n \rrbracket = \{1, 2, \dots, n\}$ merupakan himpunan n bilangan asli pertama (himpunan n warna). Pewarnaan-sisi-kuat- n pada graf G merupakan pewarnaan-sisi-kuat graf G menggunakan maksimum n warna. Indeks kromatik kuat graf G dilambangkan $x'_s(G)$, didefinisikan sebagai: $x'_s(G) = \min\{n \mid \text{ada pewarnaan-sisi-kuat-}n \text{ pada } G\}$. Di bawah ini merupakan pewarnaan-sisi-kuat berdasarkan Gambar 2.1:



Gambar 3.1. Graf G dengan $x'_s(G) = 6$.

Lemma 3.1:

Misalkan graf S merupakan subgraf dari graf G , maka:

$$x'_s(S) \leq x'_s(G)$$

Bukti :

Karena S merupakan subgraf dari G , $E(S) \subseteq E(G)$. Karena itu, minimum banyaknya warna yang digunakan untuk mewarnai graf S pasti tidak lebih banyak daripada warna yang digunakan untuk mewarnai graf G , sehingga

$$x'_s(S) \leq x'_s(G)$$

Berdasarkan alasan di atas, lemma ini terbukti.

Teorema 3.1 (Candra & Budayasa 2019).

Jika G sebuah pohon, maka

$$x'_s(G) = \max_{uv \in E(G)} \{d(u) + d(v) - 1\}$$

Bukti:

Misalkan, $\max_{uv \in E(G)} \{d(u) + d(v) - 1\} = \sigma(G)$

Misal $e = uv \in E(G)$, karena $e = uv \in E(G)$, maka setiap dua sisi e_1, e_2 yang terkait titik u atau titik v , $d(e_1, e_2) \leq 2$. Berdasarkan definisi pewarnaan-sisi-kuat, maka sisi yang terkait di titik u dan v pada graf G diwarnai dengan warna yang berbeda. Jadi, banyaknya sisi yang terkait di titik u dan di v pada graf G yaitu $d(u) + d(v) - 1$ maka,

$$x'_s(G) \geq d(u) + d(v) - 1 = \sigma(G)$$

$$x'_s(G) \geq \sigma(G) \quad (1)$$

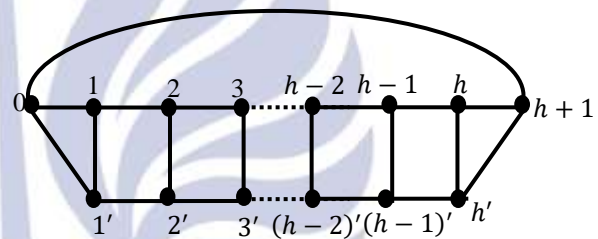
Jika dalam mewarnai seluruh sisi pada G , semua sisi yang terkait di titik u dan titik v pada graf G telah diberikan warna dengan $\sigma(G)$ warna, maka didapatkan:

$$x'_s(G) \leq \sigma(G) \quad (2)$$

Berdasarkan persamaan (1) dan (2), maka $x'_s(G) = \sigma(G)$. Dengan demikian teorema ini terbukti.

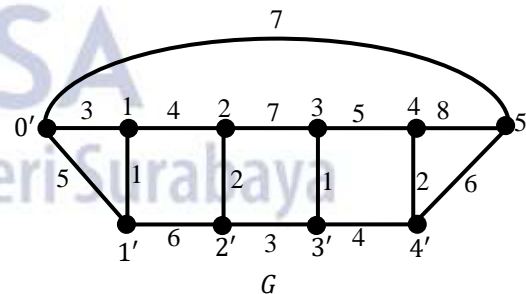
Pada artikel ini ditunjukkan indeks kromatik kuat graf Halin kubik dengan karakteristik pohon graf ulat. Misalkan G graf Halin dengan pohon karakteristik graf ulat dengan $2h + 2$ titik, di mana $h \geq 1$ (Gambar 3.2). Labeli titik-titik batang pohon dengan $1, 2, \dots, h$. Titik yang berhubungan langsung dengan 1 dilabeli dengan 0 dan $1'$. Titik yang berhubungan langsung dengan h dilabeli dengan $h+1$ dan h' . Daun yang berhubungan langsung dengan i dilabeli dengan $i', 2 \leq i \leq h-1$. Perhatikan bahwa $0, 1', \dots, h', h+1$ merupakan titik yang terletak pada siklus C_{h+2} . Pelabelan titik ini digunakan untuk mempermudah menentukan indeks kromatik kuat. Misalkan g_h menyatakan himpunan semua graf Halin kubik dengan pohon karakteristik graf ulat dengan $2h + 2$ titik.

Misalkan $G \in g_h$. Jika sisi $\{0, 1'\}, \{1', 2'\}, \dots, \{h', h+1\}, \{h+1, 0\}$ merupakan siklus pada G , maka G disebut kalung (necklace), dan disimbolkan Ne_h .



Gambar 3.2. Pelabelan titik pada Ne_h

Dibawah ini merupakan contoh pelabelan titik dan pewarnaan-sisi-kuat yang pohon karakteristiknya berupa graf ulat.



Gambar 3.3. Graf G dengan Ne_4 dan $x'_s(G) = 8$.

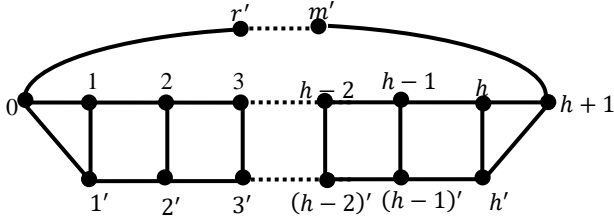
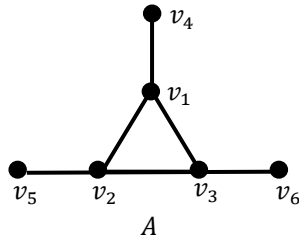
Teorema 3.2 (Shiu, Lam & Tam 2006)

Untuk $h \geq 4$ dan $G \in g_h$, $6 \leq x'_s(G) \leq 8$.

Bukti:

Misalkan $G \in g_h$. Terdapat paling sedikit 2 subgraf segitiga di G ketika $h > 1$. Karena semua titik pada graf Halin kubik berderajat 3, maka ketika $h > 1$, terdapat 2 titik (daun) yang berhubungan langsung dengan titik awal dan titik akhir pada batang (tulang belakang) ulat. 2 daun tersebut pasti saling berhubungan langsung karena

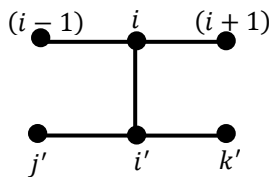
dihubungkan dengan siklus, maka membentuk 2 subgraf segitiga. Contohnya ditunjukkan pada graf G (Gambar 3.4), yang mempunyai 2 subgraf segitiga. Maka G pasti memuat subgraf isomorfik dengan graf A (Gambar 3.5).


 Gambar 3.4. Graf G

 Gambar 3.5. Graf A

Untuk memberi warna graf G (Gambar 3.4), kita warnai terlebih dahulu subgraf dari G yaitu graf A (Gambar 3.5).

Misalkan $v_1 = 1$, $v_2 = 0$ dan $v_3 = 1'$, maka $v_4 = 2$, dan berhubungan langsung antara v_5 atau v_6 , sehingga jika $v_6 = 2'$, maka $v_5 = r'$ ($r \neq 2$). Dengan cara yang sama seperti diatas, subgraf lain di G yang isomorfik dengan A dapat dilabeli dengan $v_1 = h$, $v_2 = h+1$, $v_3 = h'$, $v_4 = h-1$, $v_5 = m'$ ($m \neq h-1$) dan $v_6 = (h-1)'$. Karena setiap dua sisi pada graf A jaraknya lebih dari dua, maka semua sisi graf A diwarnai dengan warna yang berbeda pada sisi $\{\{h-1, h\}, \{h, h+1\}, \{h-1, (h-1)'\}, \{h, h'\}, \{(h-1)', h'\}, \{h', h+1\}\}$, sehingga $\chi_s'(A) = 6$.

Misalkan $\bar{G} = G - \{\{h, h+1\}, \{h-1, (h-1)'\}, \{h, h'\}, \{(h-1)', h'\}, \{h-1, h\}, \{h', h+1\}\}$. Untuk mewarnai seluruh sisi pada G , kita harus mewarnai \bar{G} . Berdasarkan konstruksi graf G , G memuat subgraf H (Gambar 3.6) untuk $0 \leq j < i < k \leq h+1$.


 Gambar 3.6. Graf H

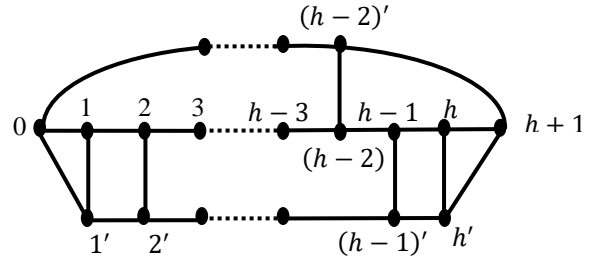
Karena jarak setiap dua sisi pada graf H tidak lebih dari dua, semua sisi H harus menerima warna berbeda.

Untuk $2 \leq i \leq h-2$, misalkan $\{i-1, i\}$ dan $\{j', i'\}$ pada H telah diwarnai. Selanjutnya, warnai sisi yang tersisa pada H sedemikian hingga sisi $\{i, i'\}$, $\{i', i+1\}$, dan $\{i', k'\}$ mendapatkan warna yang berbeda. Karena $\bar{G} = G + \{\{h-1, h\}, \{h, h+1\}, \{h-1, (h-1)'\}, \{h, h'\}, \{(h-1)', h'\}, \{h', h+1\}\}$, paling banyak 6 warna tidak dapat diberikan ke tiap-tiap sisi $\{i, i'\}$, $\{i', i+1\}$, dan $\{i', k'\}$. Karena itu, kita mendapatkan pewarnaan-sisi-7-kuat pada \bar{G} .

Selanjutnya untuk mewarnai sisi yang tersisa pada G perhatikan 2 kasus berikut. Pertama, kita asumsikan G merupakan graf pada Gambar 3.4. Misalkan c merupakan pewarnaan-sisi-kuat pada \bar{G} .

Kasus 1:

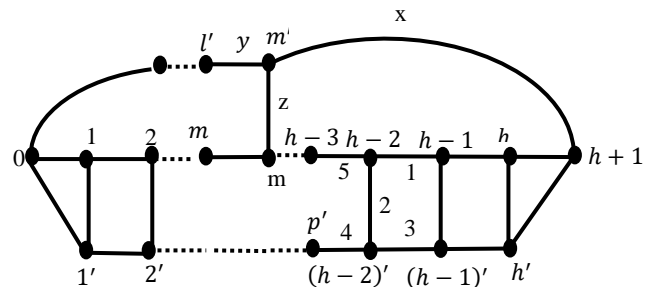
Jika $m = h-2$ (Gambar 3.7), kita warnai sisi-sisi dengan urutan : $\{h-1, h\}, \{(h-1)', h'\}, \{h, h+1\}, \{h, h'\}, \{h-1, (h-1)'\}, \{h', h+1\}$. Paling banyak 6 warna yang tidak dapat diberikan ke tiap-tiap sisi $\{h-1, (h-1)'\}$ dan $\{h-1, h\}$. Selanjutnya, paling banyak 7 warna yang tidak bisa diberikan ke tiap-tiap sisi $\{h, h+1\}, \{(h-1)', h'\}$ dan $\{h', h\}$. Karena jarak $\{h-2, h-1\}$ dari $\{h', h+1\}$ adalah 3, kita berikan warna $c(\{h-2, h-1\})$ ke $\{h', h+1\}$. Jadi, semua sisi pada G membutuhkan paling banyak 8 warna.



Gambar 3.7

Kasus 2:

Misalkan $0 < m \leq h-3$ (Gambar 3.8). Berdasarkan pemberian warna diatas kita sudah menggunakan 7 warnaberbeda untuk mewarnai sisi \bar{G} . Misalkan l' merupakan titik yang berhubungan langsung dengan m' , $0 \leq l' \leq m-1$. Tanpa kehilangan keumuman, asumsikan $c(\{h-2, h-1\}) = 1, c(\{h-2, (h-2)'\}) = 2, c(\{(h-2)', (h-1)'\}) = 3, c(\{p', (h-2)'\}) = 4$, dengan $2 \leq p \leq h-3, c(\{h-3, h-2\}) = 5$. Misalkan $c(\{m', h+1\}) = x, c(\{l', m'\}) = z$, dengan $x, y, z \in \llbracket 7 \rrbracket$.

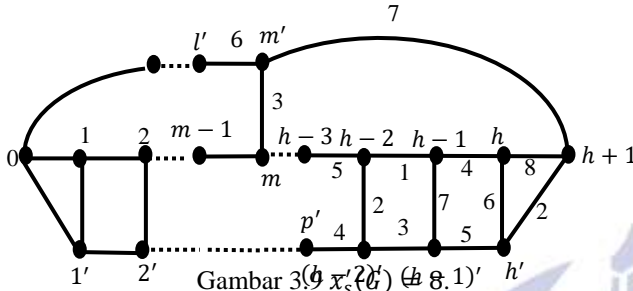


Gambar 3.8.

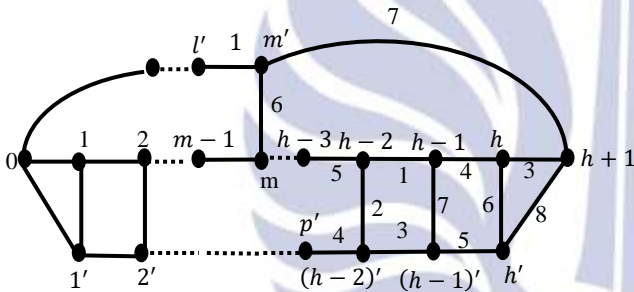
Kasus 2.1:

Misalkan $x = 7$. Maka $y, z \in \llbracket 6 \rrbracket$.

- (a) Jika $1 \notin \{y, z\}$, Tetapkan $c(\{h-1, (h-1)'\}) = 7, c(\{(h-1)', h'\}) = 5, c(\{h, h'\}) = 6$ dan Selanjutnya warnai sisi $\{h', h+1\}$ dengan 2 dan $\{h, h+1\}$ dengan 8. (Gambar 3.9)



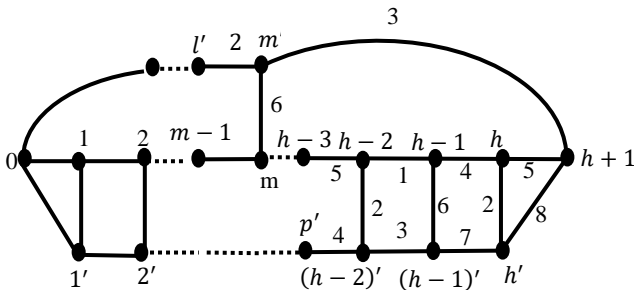
- (b) Jika $1 \in \{y\}$, Tetapkan $c(\{h-1, (h-1)'\}) = 7, c(\{(h-1)', h'\}) = 5, c(\{h, h'\}) = 6$ warnai sisi $\{h', h+1\}$ dengan 8, dan $\{h, h+1\}$ dengan 3. Maka G diwarnai dengan 8 warna berbeda. (Gambar 3.10)



Gambar 3.10. $x'_s(G) = 8$.

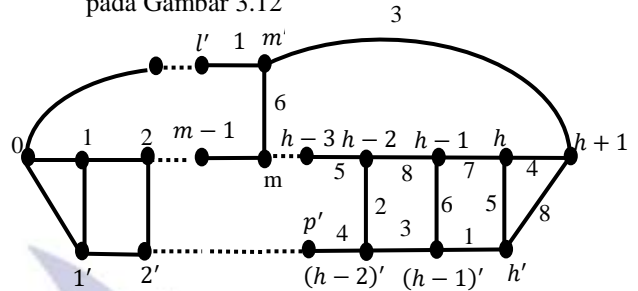
Kasus 2-2: misalkan $x \neq 7$.

- (a) Jika $1 \notin \{y, z\}$, warnai sisi-sisi berikut dengan menetapkan $c(\{h-1, (h-1)'\}) = 6, c(\{(h-1)', h'\}) = 7, c(\{h', h+1\}) = 1$ dan $c(\{h-1, h\}) = 8$. Maka 7 warna tidak dapat diberikan untuk $\{h, h+1\}$. Setelah mewarnai $\{h, h+1\}$, 6 warna tidak dapat diberikan untuk $\{h, h'\}$. Jadi kita dapat memberi warna G dengan 8 warna. (Graf G ditunjukkan pada Gambar 3.11)



Gambar 3.11. $x'_s(G) = 8$.

- (b) Jika $1 \in \{y, z\}$, warnai ulang $\{h-1, h-2\}$ dengan 8. Tetapkan $c(\{h-1, (h-1)'\}) = 6$. Sekarang sisi $\{h, h'\}$ bisa diwarnai dengan 2, 4 atau 5 tergantung pada nilai dari x, y, z (perhatikan bahwa $1 \in \{y, z\}$). Dengan cara yang sama maka $\{h, h+1\}$ bisa diwarnai dengan salah satu dari warna $\{2, 3, 4, 5\}$. (ditunjukkan pada Gambar 3.12)

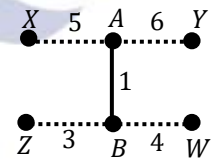


Gambar 3.12. $x'_s(G) = 8$.

Jadi maksimal 8 warna digunakan untuk mewarnai semua sisi pada G di kasus ini. Sehingga teorema ini terbukti untuk $h \geq 4$ dan $G \in \mathcal{G}_h$, maka $6 \leq x'_s(G) \leq 8$.

Lemma 3.2.

Misalkan G merupakan sebuah graf dengan $x'_s(G) \geq 6$. Misalkan dua titik A dan B berhubungan langsung dan keduanya berderajat 3 dalam graf G . Misalkan X, Y dan Z, W merupakan titik yang masing-masing berhubungan langsung dengan A dan B , maka G dapat digambarkan seperti (Gambar 3.13). Misalkan \tilde{G} merupakan sebuah graf yang diperoleh dari G dengan mengganti sisi $\{AB\}$ pada G dengan graf tangga dengan panjang 4 (Gambar 3.14). Maka didapatkan $x'_s(\tilde{G}) \leq x'_s(G)$

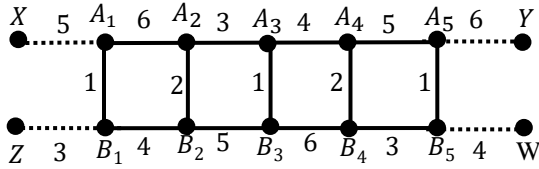


Gambar 3.13. Graf G dengan $x'_s(G) \leq 6$.

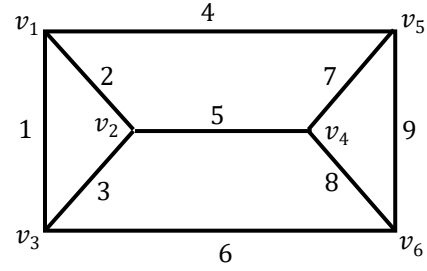
Bukti :

Karena konstruksi \tilde{G} diperoleh dari G dengan mengganti sisi $\{AB\}$ pada G menjadi graf tangga dengan panjang 4, maka \tilde{G} digambarkan pada Gambar 3.14. Berdasarkan pewarnaan-sisi-kuat, \tilde{G} diwarnai paling banyak dengan 6 warna berbeda. Sehingga $x'_s(\tilde{G}) \leq x'_s(G)$.

Dengan demikian lemma ini terbukti.



Gambar 3.14. Graf \tilde{G} dengan $x'_s(\tilde{G}) = 6$



Gambar 3.17. $x'_s(Ne_2) = 9$

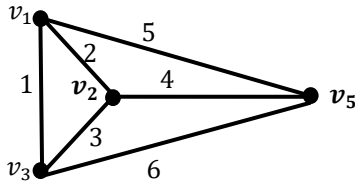
Teorema 3.3. (Shiu, Lam & Tam 2006)

Misalkan $h \geq 1$.

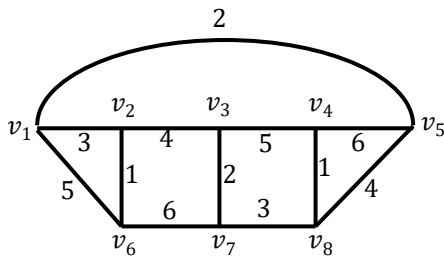
$$x'_s(Ne_h) = \begin{cases} 6 & \text{jika } h \text{ ganjil,} \\ 7 & \text{jika } h \geq 6 \text{ dan genap,} \\ 8 & \text{jika } h = 4, \\ 9 & \text{jika } h = 2. \end{cases}$$

Bukti :

Untuk h ganjil, cukup diberikan pewarnaan-sisi-6-kuat untuk Ne_h . Hal ini ditunjukkan pada Gambar 3.15 dan 3.16 untuk $h = 1$ dan 3, $x'_s(Ne_h) = 6$. Untuk $h = 3$, terdapat subgraf isomorfik dengan G (Gambar 3.13). Sisi $\{AB\} = \{v_3, v_7\}$ pada Gambar 3.16, Menggunakan Lemma 3.2, kita mengganti sisi $\{v_3, v_7\}$ dengan graf tangga dengan panjang n , n merupakan himpunan n bilangan ganjil positif. maka $x'_s(n) \leq x'_s(Ne_h)$, Sehingga $x'_s(Ne_h) = 6$ untuk h bilangan ganjil positif.



Gambar 3.15. $x'_s(Ne_1) = 6$.

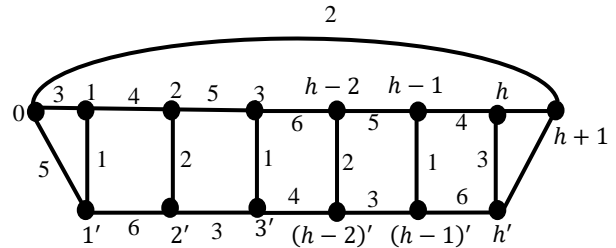


Gambar 3.16. $x'_s(Ne_3) = 6$.

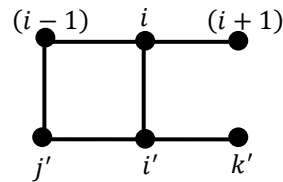
Untuk $h = 2$, kita dapat melihat bahwa $x'_s(Ne_2) = 9$. Hal ini ditunjukkan pada Gambar 3.1.

Selanjutnya asumsikan $h \geq 6$, untuk Ne_h (Gambar 3.18). Maka terdapat subgraf A seperti pada Gambar 3.5. Sehingga sisi $\{1,1'\}, \{h+1,0\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,1'\}$ dan $\{1',2'\}$ harus menerima warna yang berbeda (Gambar 3.15). Kemudian asumsikan sisi tersebut diwarnai dengan 1,2,3,4,5 dan 6 berturut-turut. Pada $h \geq 6$ juga terdapat subgraf H' (Gambar 3.19) yang membutuhkan 6 warna berbeda juga, sehingga pada sisi $\{2,3\}, \{2'3'\}$ dan $\{2,2'\}$ harus menerima warna 5, 3 dan 2 secara berturut-turut.

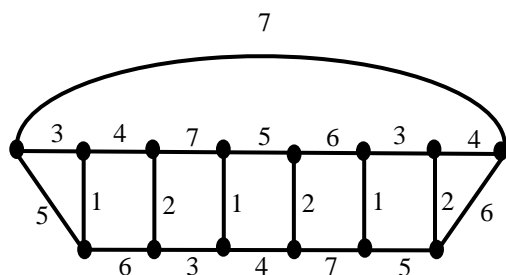
Selanjutnya warnai sisi $\{j,j'\}$, dimana $1 \leq j \leq h-1$, karena j genap, maka $\{h-1, (h-1)'\}$ diwarnai dengan 1, dan $\{h-1, h\}$ serta $\{(h-1)', h'\}$ keduanya juga diwarnai dengan 4 dan 6 secara berturut-turut, atau sebaliknya. Jadi tersisa 3 sisi $\{h, h+1\}, \{h', h+1\}$ dan $\{h, h'\}$ tidak dapat diwarnai dengan 6 warna. Sehingga untuk $h \geq 6$ membutuhkan 7 warna yang berbeda untuk mewarnai semua sisi pada G , (Gambar 3.20).



Gambar 3.18. $x'_s(Ne_6)$ tidak bisa dengan 6 warna.



Gambar 3.19. Graf H'

Gambar 3.20. $x'_s(Ne_6) = 7$

Untuk mewarnai seluruh sisi pada Ne_4 , dibutuhkan 8 warna berbeda. Hal ini ditunjukkan pada pewarnaan-sisi-kuat Gambar 3.3. sehingga $x'_s(Ne_4) = 8$

Dengan demikian teorema ini terbukti.

Selanjutnya kita akan mencari batas atas dan bawah untuk indeks kromatik kuat pada graf Halin kubik yang pohon karakteristiknya berupa graf ulat.

Teorema 3.4 (Shiu, Lam & Tam 2006)

Jika $G \in g_h$, maka $6 \leq x'_s(G) \leq 9$.

Bukti :

Sebagaimana yang telah dijelaskan diatas, setiap graf Halin kubik G memuat sebuah subgraf isomorfik dengansubgraf A (Gambar 3.5). Karena sisi pada A harus diwarnai dengan warna berbeda, maka kita mendapatkan $x'_s(G) \geq x'_s(A) = 6$.

Jika $G \in g_h$, maka $h = 1 \notin g_h$ karena $h = 1$ tidak memiliki batang jika semua daunnya dihapus. $h > 1 \in g_h$, karena memiliki batang ketika semua daunnya dihapus. Menggunakan Teorema 3.2 dan Teorema 3.3, dapat disimpulkan batas atas dan batas bawahnya adalah $6 \leq x'_s(G) \leq 9$.

Dengan demikian teorema ini terbukti.

4. PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan pembahasan pada artikel ini, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

Misalkan g_h adalah subkelas graf Halin kubik dengan pohon karakteristik graf ulat dengan $2h + 2$ titik. Jika $G \in g_h$, maka $6 \leq x'_s(G) \leq 9$.

Saran

Dalam artikel ini telah dibahas tentang pewarnaan-sisi-kuat dan indeks kromatik kuat pada graf Halin kubik yang pohon karakteristiknya berupa graf ulat. Pada pewarnaan-sisi-kuat ini tidak dapat ditemukan nilai eksaknya secara menyeluruh melainkan hanya didapatkan batas atas dan bawahnya. Oleh sebab itu, penulis berharap kepada ini untuk mempelajari lebih dalam dan mengembangkan teori-

teori yang berkaitan dengan indeks kromatik kuat pada beberapa jenis graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Budayasa, I. K. (2007). Teori Graph dan Aplikasinya. Surabaya.
- Candra, I.K.R.S & Budayasa, I.K. 2019. Indeks Kromatik Kuat Beberapa Klas Graf. Jurnal ilmiah matematika Volume 7 No. 2.
- Chartrand, G., & Lesniak, L. (1996). Graphs and Digraphs (third).
- Bondy, J.A & Murty, U.S.R. 1976. Graph Theory With Applications. New York : Amsterdam.
- Mahdian, M. 2000. The Strong Chromatic Index of Graphs. University of Toronto .
- Shiu, W.C, Lam., P.C.B & Tam, W.K. 2006. On Strong Chromatic Index of Halin Graph.