

POHON PERENTANG GEOMETRIK BIDANG YANG KOMPATIBEL

Agis Sagita Widyaningrum

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail: agis.17030214051@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail: ketutbudayasa@yahoo.com

Abstrak

Dua graf geometrik bidang pada himpunan titik S dikatakan kompatibel jika gabungan kedua graf tersebut juga merupakan sebuah graf geometrik bidang pada S . Diberikan sebuah pohon perentang geometrik bidang T pada himpunan S . Fokus permasalahan dalam artikel ini adalah mencari sebuah pohon perentang geometrik bidang T_1 pada S sedemikian hingga T_1 kompatibel- T dan banyak sisi T_1 dan T yang bersekutu minimum. Minimum banyaknya sisi T dan T_1 yang bersekutu dilambangkan dengan $d(T)$. Secara umum menentukan nilai $d(T)$ merupakan masalah menarik tetapi sulit, karena $d(T)$ tergantung pada dua hal yaitu kelas pohon T itu sendiri, dan letak titik-titik S pada bidang datar. Jika T pohon khusus seperti bintang diperoleh $d(T) = 1$. Sebuah triangulasi Δ dari pohon T adalah sebuah graf diperoleh dari T dengan menambahkan sebanyak mungkin sisi-sisi baru, namakan sisi-sisi merah, ke T sedemikian hingga graf baru tetap geometrik bidang dengan setiap internal muka berbentuk segitiga. Pada umumnya, triangulasi Δ dari T tidak tunggal, minimum banyaknya komponen graf $\Delta - T$, dilambangkan dengan $C(T)$. Dibuktikan bahwa untuk pohon geometrik bidang T berlaku $d(T) = C(T) - 1$. Jika T sebuah pohon geometrik bidang merentang semua titik poligon konveks, ditunjukkan $C(T) = 2$ atau $d(T) = 1$. Akhirnya, jika T pohon geometrik bidang merentang semua titik poligon sederhana Q dan paling sedikit satu di interior Q dan T bukan bintang maka $C(T) = 1$ atau $d(T) = 0$.

Kata Kunci: Graf geometrik, Graf Bidang, Kompatibel, Poligon, Triangulasi.

Abstract

Two plane geometric graphs on a set of vertices S are said to be compatible when their union is a plane geometric graphs on S . Given a plane geometric spanning tree T on S . The main problem is finding another plane geometric spanning tree T_1 on S , such that T_1 is T -compatible and T_1 has a minimum number of edges in common with T . The minimum number of common edges of T and T_1 , denoted by $d(T)$. In general, determining the value of $d(T)$ is an interesting but difficult problem, since it depends on two things, the class of T and the position of the vertices of T on the plane. If T is a star, then $d(T) = 1$. A triangulation Δ of T is a graph obtained from T by adding as much as possible new edges, namely red edges, to T such that the resulting graph is still a plane geometric graph and each of its internal face is a triangle. Generally, a triangulation Δ of T is not unique. The minimum number of components of $\Delta - T$ is denoted by $C(T)$. It is proven that if T is a plane geometric tree, then $d(T) = C(T) - 1$. If T is a plane geometric tree is spanning all vertices of a simple convex polygon, it is shown that $C(T) = 2$ or $d(T) = 1$. Finally, we prove that T is a plane geometric tree that spans all vertices of a simple polygon Q and at least one in the interior of Q and T is not a star, then $C(T) = 1$ or $d(T) = 0$.

Keywords: Geometric Graph, Plane Graph, Compatible, Polygon, Triangulation.

PENDAHULUAN

Salah satu kelas graf yang mempunyai aplikasi sangat luas adalah pohon. Secara formal, pohon adalah graf terhubung tanpa siklus. Jadi pohon merupakan graf terhubung dengan banyak sisi minimum. Pohon juga merupakan graf bidang,

karena selalu bisa digambar pada bidang datar sedemikian hingga tidak ada sisi-sisi yang saling berpotongan kecuali mungkin pada titik-titik akhir sisi. Salah satu sifat pohon yang dipakai dalam pembahasan nanti adalah pada pohon tak trivial, setiap dua titik dihubungkan tepat satu lintasan.

Misalkan S adalah himpunan $n \geq 3$ titik pada bidang datar sedemikian hingga tidak ada tiga titik yang segaris. Sebuah graf geometrik pada S adalah sebuah graf dengan himpunan titik S dan setiap sisinya berupa ruas garis yang menghubungkan dua titik S sedemikian hingga tidak ada sisi yang melalui sebuah titik selain dari titik akhir dari sisi tersebut. Selanjutnya jika G graf geometrik sedemikian hingga tidak ada dua sisi G berpotongan kecuali mungkin di titik akhir dari sisi-sisi tersebut disebut graf geometrik bidang. Dua graf geometrik bidang pada himpunan S dikatakan "Kompatibel" jika gabungan kedua graf tersebut juga merupakan sebuah graf geometrik bidang pada S . Sebuah graf geometrik bidang yang kompatibel dengan sebuah graf geometrik bidang G disebut kompatibel- G .

Dalam artikel ini kita fokus pada sebuah permasalahan yaitu, diberikan sebuah pohon perentang geometrik bidang T pada himpunan S , akan dicari sebuah pohon perentang geometrik bidang T pada S sedemikian hingga $T1$ kompatibel- T dan banyaknya sisi $T1$ dan T yang bersekutu adalah minimum. Minimum banyaknya sisi T dan $T1$ yang bersekutu, dilambangkan dengan $d(T)$. Secara umum, nilai $d(T)$ dipengaruhi oleh dua hal, yaitu pohon T itu sendiri dan posisi (letak) titik-titik S pada bidang datar. Sehingga nilai $d(T)$ dapat dipandang sebagai sebuah ukuran "rintangan" disebabkan oleh T . Misalnya $d(T) = 0$ berarti bahwa T bukan rintangan sama sekali, karena sebuah pohon perentang geometrik bidang yang pisah atau berbeda sisi dan kompatibel- T masih bisa digambar pada S . Sebaliknya, nilai $d(T)$ yang besar berarti bahwa tidak banyak ruang tersisa untuk sisi-sisi pohon kedua.

Misalkan T sebuah pohon geometrik bidang pada himpunan S . Sebuah triangulasi Δ dari T adalah sebuah graf yang didapat dari T dengan menambahkan sebanyak mungkin sisi baru ke T sedemikian hingga graf baru tetap geometrik bidang dan setiap muka "dalam" berupa segitiga. Sisi-sisi T disebut sisi-sisi "hitam" dan sisi-sisi yang ditambahkan pada T untuk memperoleh sebuah triangulasi Δ kompatibel- T disebut sisi-sisi "merah". Komponen-komponen dari graf $\Delta - T$ disebut komponen-komponen "merah" dari Δ .

Sebuah poligon adalah kurva tertutup yang dibatasi oleh sisi-sisi berupa ruas garis. Sebuah poligon dikatakan sederhana jika tidak memotong

dirinya sendiri. Dengan kata lain, sebuah poligon sederhana adalah sebuah graf sikel geometrik bidang. Sebuah poligon sederhana lemah adalah sebuah graf geometrik bidang gabungan dari sebuah poligon sederhana (sikel sederhana) dengan sejumlah pohon terakar di titik-titik sikel dan titik-titik lain terletak dalam interior sikel.

Konsep triangulasi dan poligon, akan digunakan untuk menentukan nilai $d(T)$ jika T adalah sebuah pohon geometrik bidang yang merentang himpunan titik S .

KAJIAN PUSTAKA

Bangun dikatakan konveks jika setiap dua titik pada bangun atau interior bangun apabila dihubungkan dengan ruas garis, maka seluruh bagian ruas garis terletak pada interior bangun. Sebaliknya, disebut bangun konkaf. Misalnya, Kubus, Bola, segitiga, Lingkaran, Persegi adalah bangun-bangun konveks.

Sebuah graf dikatakan terhubung, jika setiap dua titik pada graf dihubungkan oleh sebuah lintasan. Komponen sebuah graf adalah sebuah subgraf yang terhubung maksimal. Jadi, jika G graf terhubung, maka G memiliki tepat satu komponen. Sebaliknya, jika graf G tak terhubung, maka banyaknya komponen G paling sedikit dua. Pada pendahuluan sudah disebutkan bahwa pohon adalah graf terhubung dan tidak memuat sikel. Graf yang setiap komponennya berupa pohon disebut hutan (forest). Sifat-sifat pohon sebagai berikut.

Jika G graf pohon, maka untuk setiap dua titik u dan v yang berbeda di G terdapat tepat satu lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut.

Banyaknya sisi dari sebuah pohon G sama dengan banyaknya titik dikurangi 1, $|V(G)| = |E(G)| - 1$

Setiap pohon dengan paling sedikit dua titik, mempunyai paling sedikit dua titik yang berderajat satu.

(Budayasa, 2007)

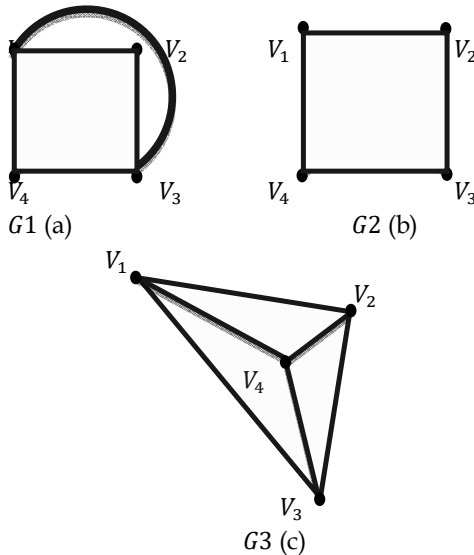
Misalkan G adalah sebuah graf terhubung. Sebuah pohon di G yang memuat semua titik G disebut Pohon perentang (Spanning tree).

Definisi 2.1: Misalkan S himpunan $n \geq 3$ titik pada bidang datar sedemikian hingga tidak ada tiga titik yang segaris. Sebuah graf geometrik pada S adalah sebuah graf dengan himpunan titik S dan setiap sisinya berupa ruas garis yang

menghubungkan dua titik S sedemikian hingga tidak ada sisi yang melalui sebuah titik selain titik akhir dari sisi tersebut. Selanjutnya jika G graf geometrik bidang sedemikian hingga tidak ada dua sisi G berpotongan kecuali mungkin di titik akhir dari sisi-sisi tersebut disebut graf geometrik bidang.

Contoh 2.1:

Misalkan $S = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$



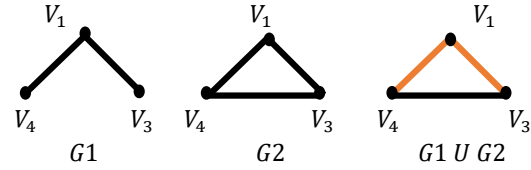
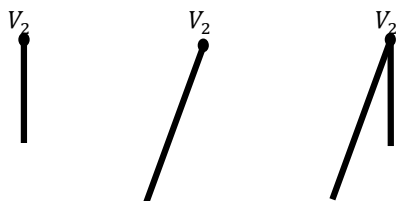
Gambar 2.1

Perhatikan graf $G1$ pada Gambar 2.1(a), $G1$ adalah sebuah graf, tetapi $G1$ bukan geometrik pada S karena sisi $G1$ yang menghubungkan titik V_1 dan titik V_3 bukan sebuah ruas garis. Graf $G2$ pada Gambar 2.1(b) adalah graf geometrik pada S , tetapi $G2$ bukan graf geometrik bidang pada S karena sisi V_1V_3 berpotongan dengan sisi V_2V_4 . Graf $G3$ adalah graf geometrik bidang pada S , karena setiap sisi yang menghubungkan dua titik S berupa ruas garis S sedemikian hingga tidak ada sisi melalui sebuah titik selain titik akhir dari sisi tersebut dan tidak ada dua sisi $G3$ berpotongan.

Definisi 2.2: Dua graf geometrik bidang pada himpunan S dikatakan “Kompatibel” jika gabungan kedua graf tersebut juga merupakan sebuah graf geometrik bidang pada S . Sebuah graf geometrik bidang yang kompatibel dengan sebuah graf geometrik bidang G disebut kompatibel- G .

Contoh 2.2:

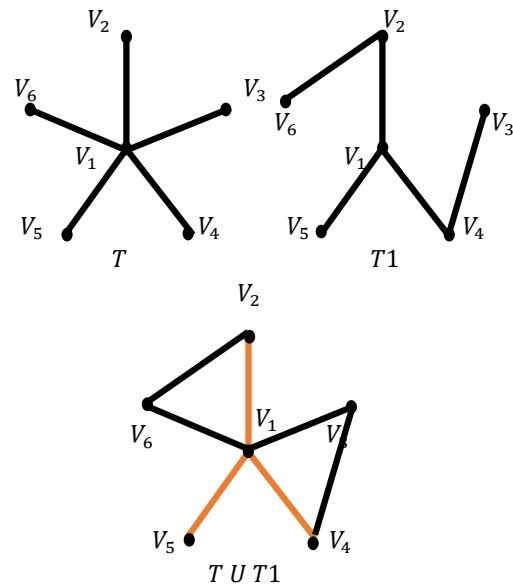
Misalkan $S = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$



Gambar 2.2

Perhatikan bahwa $G1$, $G2$, dan $G1 \cup G2$ adalah graf-graf geometrik bidang pada S . Sehingga $G1$ dan $G2$ kompatibel: $G2$ adalah kompatibel- $G1$ dan $G1$ adalah kompatibel- $G2$, dalam hal ini, ada dua sisi $G1$ dan $G2$ yang bersekutu (beririsan) yaitu sisi V_1V_3 dan V_1V_4 .

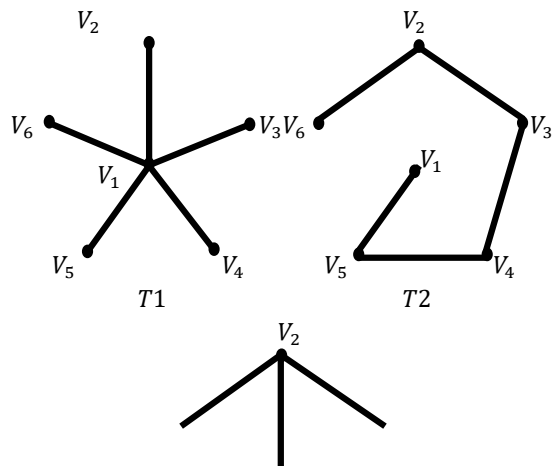
Misalkan $S = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$

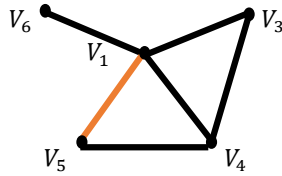


Gambar 2.3

Karena pohon T , $T1$, dan $T \cup T1$ adalah graf-graf geometrik bidang pada himpunan $S = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$, maka pohon $T1$ kompatibel- T . dalam hal ini T dan $T1$ memiliki sebanyak 3 sisi yang bersekutu yaitu sisi V_1V_2 , V_1V_4 , V_1V_5 .

Misalkan $S = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$




 Gambar 2.4 $T1 \cup T2$

Perhatikan bahwa pohon $T1$, pohon $T2$, dan $T1 \cup T2$ adalah graf-graf geometrik bidang pada S . sehingga pohon $T1$ kompatibel dengan pohon $T2$. Perhatikan bahwa dalam hal ini hanya ada satu sisi $T1$ dan sisi $T2$ yang bersekutu yaitu sisi $V1V5$.

Sedangkan untuk graf yang tidak kompatibel yaitu graf tak berhingga, dimana banyaknya himpunan titik dan banyaknya himpunan sisi tak hingga.

Definisi 2.3: Misalkan T sebuah pohon geometrik bidang pada himpunan S . Sebuah triangulasi Δ dari T adalah sebuah graf yang didapat dari T dengan menambahkan sebanyak mungkin sisi baru ke T sedemikian hingga graf baru tetap geometrik bidang dan setiap muka "dalam" berupa segitiga. Sisi-sisi T disebut sisi-sisi "hitam" dan sisi-sisi yang ditambahkan pada T untuk memperoleh sebuah Δ triangulasi kompatibel- T disebut sisi-sisi "merah". Komponen-komponen dari graf $\Delta - T$ disebut komponen-komponen "merah" dari Δ .

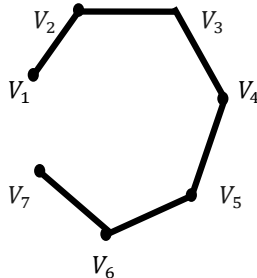
$C_\Delta(T)$ = banyaknya komponen merah dari Δ .

Perhatikan bahwa triangulasi Δ dari pohon T tidak tunggal. Selanjutnya, minimum nilai $C_\Delta(T)$ untuk semua kemungkinan Δ triangulasi. Kompatibel- T , dilambangkan dengan $C(T)$. Sehingga,

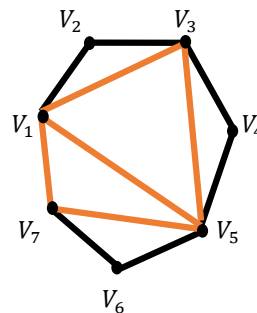
$C(T) = \min \{C_\Delta(T) / \Delta \text{ triangulasi kompatibel-}T\}$

Contoh 2.3:

Diberikan sebuah pohon geometrik bidang T pada himpunan $S = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7\}$, seperti dampak pada Gambar 2.5 (a) berikut.



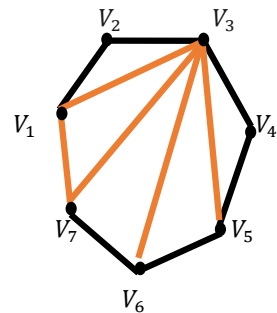
Sebuah triangulasi Δ_1 kompatibel- T diperlihatkan seperti gambar 2.5(b) graf $\Delta_1 - T$ dapat pada gambar 2.5(c). perhatikan bahwa graf $\Delta_1 - T$ mempunyai 4 komponen. Sehingga $C_{\Delta_1}(T) = 4$


 Sebuah triangulasi Δ_1
Kompatibel- T

(b)

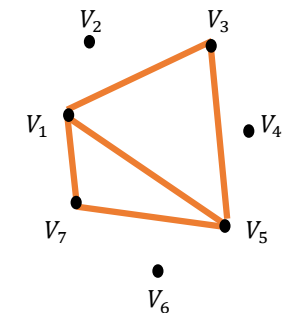
Gambar 2.5

Sebuah triangulasi Δ_2 kompatibel- T dapat diperlihatkan pada Gambar 2.5 (d) Gambar 2.5 (e) menunjukkan graf $\Delta_2 - T$ dengan $C_{\Delta_2}(T) = 3$

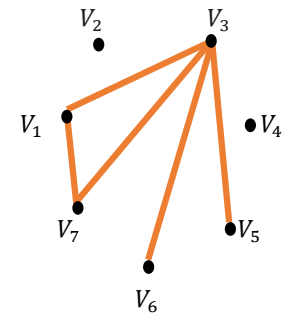

 Sebuah triangulasi Δ_2
 T

 Kompatibel- T

(d)

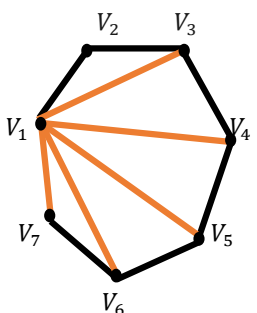

 graf $\Delta_1 - T$
Dengan $C_{\Delta_1}(T) = 4$

(c)

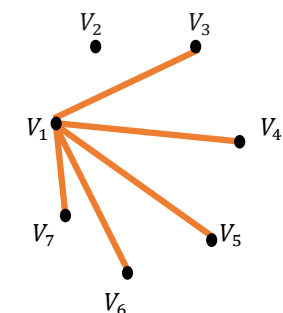

 graf $\Delta_2 - T$
 $C_{\Delta_2}(T) = 3$

(e)

Selanjutnya, Gambar 2.5(f) memperlihatkan sebuah triangulasi Δ_3 kompatibel- T dan Gambar 2.5 (g) memperlihatkan graf $\Delta_3 - T$ dengan $C_{\Delta_3}(T) = 2$


 Sebuah triangulasi Δ_3
Kompatibel- T

(f)


 Graf $\Delta_3 - T$
 $C_{\Delta_3}(T) = 2$

(g)

Gambar 2.5 Untuk hasil-hasil selanjutnya, konsep-konsep berikut diperlukan.

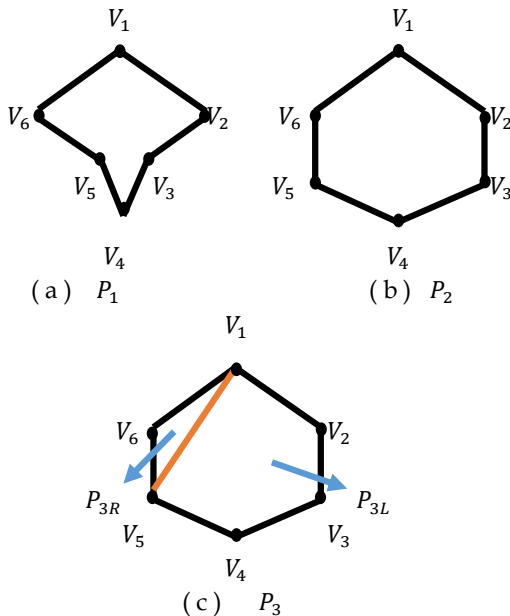
Definisi 2.4: Sebuah poligon adalah kurva tertutup yang dibatasi oleh sisi-sisi berupa ruas

garis. Sebuah poligon dikatakan sederhana jika tidak memotong dirinya sendiri.

Dengan kata lain, sebuah poligon sederhana adalah sebuah graf sikel geometrik bidang. Misalkan V_1, V_2, \dots, V_n titik-titik sebuah poligon sederhana P , dengan urutan searah “putaran jarum jam”; dengan aritmetik indeks modulo n . Titik V_i dikatakan konveks, jika besar sudut antara vektor $|V_iV_{i+1}|$ dan $|V_iV_{i-1}|$ kurang dari π ; dan dikatakan konkaf (refleks) jika sebaliknya. Dengan catatan daerah sudut adalah bidang datar pada interior P yang dibatasi oleh dua sisi atau vektor. Poligon P disebut poligon konveks jika setiap titik P konveks. Sebuah diagonal V_iV_j dan $i < j$, membagi poligon P menjadi dua poligon; yaitu poligon ‘kiri’ P_L , yang titik-titiknya adalah titik-titik P dari V_i ke V_j , poligon ‘kanan’ P_R , yang titik-titiknya adalah titik-titik P dari V_i ke V_j . Jika digambar sebanyak maksimum $n - 3$, diagonal yang “tidak saling berpotongan” (*non-crossing*) di dalam poligon P , maka diperoleh sebuah triangulasi Δ dari P .

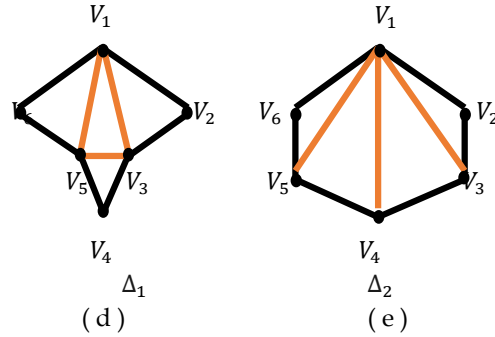
Contoh 2.4:

Perhatikan Gambar 2.6 berikut.



Gambar 2.6.(a) menunjukkan bahwa P_1 sebuah poligon sederhana tak konveks. Titik-titik V_1, V_2, V_4, V_6 adalah titik-titik konveks, tetapi titik V_3 dan V_5 adalah titik konkaf (refleks). Sedangkan P_2 pada Gambar 2.6.(b), adalah sebuah poligon sederhana yang konveks, karena setiap titik P_2 adalah titik konveks. Gambar 2.6.(c), memperlihatkan bahwa diagonal V_1V_5 membagi poligon menjadi dua

poligon, yaitu poligon kiri $P_{3L} = (V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_1)$ dan poligon kanan $P_{3R} = (V_5, V_6, V_1, V_5)$.

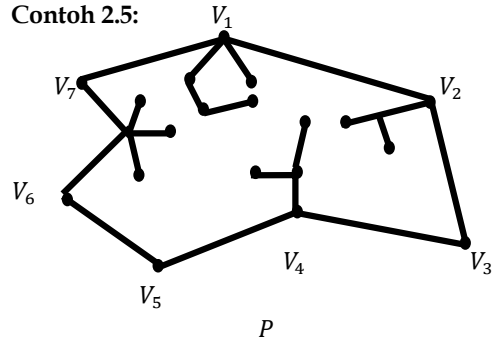


Gambar 2.6

Perhatikan bahwa, Δ_1 pada Gambar 2.6.(d) adalah sebuah triangulasi dari poligon P_1 dan Δ_2 pada Gambar 2.6.(e) sebuah triangulasi dari poligon P_2 .

Definisi 2.5: Sebuah poligon sederhana lemah adalah sebuah graf geometrik bidang gabungan dari sebuah poligon sederhana (sikel sederhana) dengan sejumlah pohon terakar di titik-titik sikel dan titik-titik lain terletak dalam interior sikel. Sebuah titik pada poligon sederhana lemah dikatakan konveks jika setiap sudut terkait ke titik tersebut dalam “muka terbatas” kurang dari π .

Contoh 2.5:

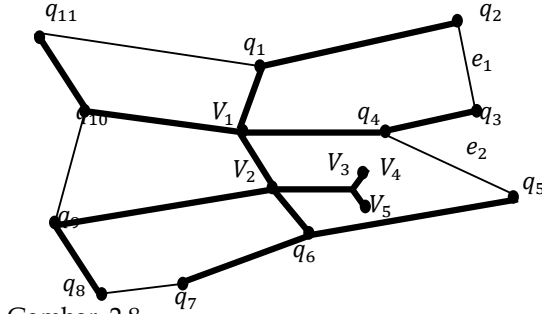


Gambar 2.7: P sebuah poligon sederhana lemah

Definisi 2.6: Misalkan $Q = (q_1, q_2, \dots, q_k, q_1)$ sebuah poligon sederhana, dan T adalah sebuah pohon geometrik bidang yang merentang semua titik Q dan mungkin beberapa titik di interior Q sedemikian hingga semua sisi T di interior Q atau sisi-sisi Q . Jika $e_i = q_iq_{i+1}$ bukan sisi T , maka $T \cup \{e_i\}$ memuat tepat satu sikel. Gabungan sikel tersebut dengan semua titik Q dan sisi T yang terletak di interior sikel tersebut merupakan sebuah poligon sederhana lemah, yang selanjutnya disebut sebuah “kantong” dari T . Dalam pembahasan selanjutnya, kita batasi pada kesepakatan berikut :

“jika $q_i \in Q$ sebuah titik di kantong P_j , maka q_i sebuah titik konveks dari poligon sederhana lemah P_j .”

Contoh 2.6:



Gambar 2.8

Perhatikan graf pada Gambar 2.8.

Graf $Q = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_1)$ sebuah poligon sederhana. Pohon T (sisi-sisi berwarna hitam / tebal) merentang semua titik Q dan titik-titik di interior Q . Dengan kata lain, poligon Q menutup pohon T , dan T adalah pohon geometrik bidang. Sisi $e_1 = q_2q_3 \notin E(T)$ sehingga subgraf yang dibangun oleh himpunan sisi $\{e_1, q_3q_4, q_4V_1, V_1q_1, q_1q_2\}$ adalah sebuah “kantong” (pocket) dari T . Begitu juga sisi $e_2 = q_4q_5 \notin E(T)$, sehingga subgraf yang dibangun oleh himpunan sisi $\{e_2, q_4q_5, q_5q_6, q_6V_2, V_2V_1, V_1q_4, V_2V_3, V_3V_4, V_3V_5\}$ juga sebuah kantong (pocket) dari pohon T . Perhatikan bahwa kantong ini merupakan sebuah poligon sederhana lemah. Cermati bahwa dalam hal ini, pohon T mempunyai lima kantong, empat kantong masing-masing berupa poligon sederhana, dan satu kantong berupa poligon sederhana lemah.

PEMBAHASAN

Dalam artikel kita fokus pada suatu masalah yaitu, diberikan sebuah pohon perentang geometrik bidang T pada himpunan S . Akan dicari sebuah pohon perentang geometrik bidang T pada S sedemikian hingga T_1 kompatibel- T dan banyak sisi T_1 dan T yang bersekutu adalah minimum. Selanjutnya, bilangan ini dinotasikan dengan $d(T)$, maka:

$$d(T) = \min\{|E(T_1) \cap E(T)| \mid T_1 \text{ adalah kompatibel-}T\}$$

Secara umum, nilai $d(T)$ bergantung pada dua hal, yaitu pohon T itu sendiri dan posisi (letak) titik-titik S pada bidang datar. Sehingga nilai $d(T)$ dapat dipandang sebagai sebuah ukuran “rintangan” disebabkan oleh T . misalnya $d(T) = 0$ berarti bahwa T bukan rintangan sama sekali, karena

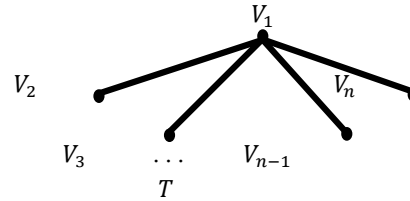
sebuah pohon perentang geometrik bidang yang pisah sisi dan kompatibel- T masih bisa digambar pada S .

Sebaliknya, nilai $d(T)$ yang besar berarti bahwa tidak banyak ruang tersisa untuk sisi-sisi pohon kedua. Jika diberikan sebuah pohon sebarang T , menentukan nilai eksak $d(T)$ merupakan masalah yang sangat sulit. Tetapi jika T pohon khusus seperti bintang, diperoleh hasil sebagai berikut.

Teorema 3.1: Jika T sebuah bintang, maka $d(T) = 1$

Bukti:

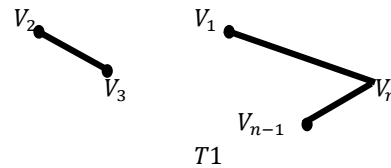
Misal T sebuah bintang dengan n titik. Maka $T = K_{1,n-1}$. Misal V_1 titik pusat T dan $\{V_2, V_3, \dots, V_n\}$ himpunan titik-titik daun T . sehingga $S = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$. Karena T adalah pohon perentang geometrik bidang pada S , tidak ada sisi T yang berpotongan dan $E(T) = \{V_iV_j \mid i, j = 2, 3, \dots, n\}$.



Gambar 3.1

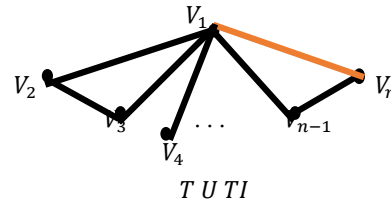
Konstruksi pohon perentang T_1 pada S sebagai berikut:

$$E(T) = \{V_iV_{i+1} \mid i = 2, 3, \dots, n-1\} \cup \{V_1V_n\}$$



Gambar 3.2

Gabungan dari T dengan T_1 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.3

Perhatikan T , T_1 , dan $T \cup T_1$ adalah graf-graf geometrik bidang. Sehingga berdasarkan Definisi 2.2, T_1 kompatibel- T dan hanya ada tepat 1 sisi dari T yang bersekutu dengan sisi T_1 yaitu sisi V_1V_n sehingga

$$d(T) = 1$$

Dengan demikian, teorema terbukti ■

Berikut ditunjukkan hubungan antara $C(T)$ dan $d(T)$ pada pohon geometrik bidang T .

Teorema 3.2: Jika T sebuah pohon geometrik bidang pada himpunan titik S , maka $d(T) = C(T) - 1$.

Bukti:

Misalkan T_1 sebuah pohon geometrik bidang pada himpunan S dan kompatibel- T dengan

$$|E(T_1) \cap E(T)| = d(T)$$

Maka graf $T_1 - T$ adalah sebuah hutan dengan $1 + d(T)$ komponen, dan

$$|E(T_1 - T)| = |S| - 1 - d(T)$$

Operasi penambahan sisi-sisi “merah” sampai melengkapi graf $T \cup T_1$ ke sebuah triangulasi kompatibel, tidak meningkatkan banyaknya komponen “merah” akibatnya,

$$C(T) \leq 1 + d(T) \dots (1)$$

Selanjutnya, misal Δ sebuah triangulasi kompatibel- T mempunyai $C(T)$ komponen merah, katakanlah $C_1, C_2, \dots, C_{C(T)}$

Karena triangulasi Δ terhubung dan tidak ada sisi merah yang menghubungkan setiap dua komponen merah C_i dan C_j , maka harus ada sebanyak $C(T) - 1$ sisi hitam (sisi-sisi T) menghubungkan komponen-komponen merah untuk menghasilkan sebuah subgraf perentang M pada S . Sehingga setiap pohon perentang T_1 di M kompatibel- T dengan paling banyak $C(T) - 1$ sisi hitam. Sehingga,

$$d(T) \leq C(T) - 1$$

ekuivalen dengan

$$C(T) \geq 1 + d(T) \dots (2)$$

Dari (1) dan (2), disimpulkan,

$$C(T) = 1 + d(T)$$

atau

$$d(T) = C(T) - 1$$

Dengan demikian teorema terbukti ■

Dengan menggunakan beberapa definisi yang ada dan Teorema 3.2, kita buktikan teorema berikut.

Teorema 3.3: Diberikan $Q = (q_1, q_2, \dots, q_k, q_1)$ sebuah poligon sederhana dengan $k \geq 3$, dan T sebuah pohon perentang geometrik bidang pada $\{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ “tertutup” oleh Q dan setiap kantong T adalah poligon konveks. Maka $C(T) \geq 2$

Untuk setiap sisi $e = q_i q_j$ dari T , terdapat sebuah triangulasi kompatibel- T Δ dari Q yang memiliki tepat dua komponen “merah” yaitu memuat q_i dan yang lain memuat q_j .

Bukti:

Karena banyak titik poligon Q adalah k , maka setiap triangulasi Q memuat tepat $2k - 3$ sisi, yaitu k sisi dari Q dan $k - 3$ internal dari diagonal Q .

Karena T merentang himpunan $\{q_1, q_2, \dots, q_k\}$, maka banyaknya titik T adalah k . Sehingga berdasarkan sifat pohon, banyak sisi T adalah $k - 1$. Sehingga sebuah triangulasi kompatibel- T Δ terdapat $k - 1$ sisi “hitam” (sisi T) dan $2k - 3 - (k - 1) = k - 2$ sisi “merah”. Ini berarti, setiap pohon perentang T' dari triangulasi Δ memuat paling sedikit satu sisi “hitam”, sehingga

$$d(T) \geq 1 \dots (1)$$

Berdasarkan Teorema 3.2,

$$C(T) = d(T) + 1 \dots (2)$$

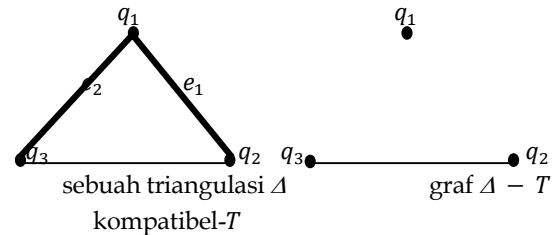
Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan

$$C(T) \geq 1 + 1 = 2$$

Dengan demikian bagian (i) terbukti.

Untuk membuktikan (ii), digunakan induksi pada k .

Untuk $k = 3$, jelas pernyataan benar. Karena dalam hal ini poligon $Q = (q_1, q_2, q_3, q_1)$. Pohon perentang geometrik bidang pada $\{q_1, q_2, q_3\}$, tanpa menghilangkan keumuman, dibangun oleh sisi-sisi $e_1 = q_1 q_2$ dan $e_2 = q_1 q_3$, seperti gambar berikut.



Gambar 3.4

Perhatikan dalam hal ini, triangulasi Δ kompatibel- T adalah Q sendiri. Graf $\Delta - T$ memiliki tepat dua komponen “merah” yaitu komponen-1 memuat titik q_1 saja dan komponen-2 memuat sisi $q_2 q_3$. Sisi $e_1 = q_1 q_2 \in E(T)$ dan q_1 di komponen-1, sedangkan q_2 di komponen-2. Begitu juga sisi $e_2 = q_1 q_3 \in E(T)$, titik q_1 di komponen-1 dan titik q_3 di komponen-2.

Untuk $k \geq 4$, asumsikan pernyataan benar untuk poligon Q' yang mempunyai kurang dari k titik. Misal diagonal $d = q_i' q_j'$ sebuah sisi dari pohon T . Maka d membagi Q menjadi dua poligon Q_1 dan Q_2 . Masing-masing memuat sebuah bagian dari pohon perentang, dimana induksi dapat diterapkan. Misal sisi e di poligon Q_1 . Karena banyak titik Q_1 kurang dari k , maka berdasarkan asumsi, poligon Q_1 dapat

ditriangulasi sedemikian hingga komponen “merah” A_1 memuat q_i dan komponen “merah” yang lain namakan B_1 memuat q_j . Begitu juga, poligon Q_2 dapat ditriangulasi sedemikian hingga komponen “merah” A_2 memuat titik q_i' dan komponen “merah” yang lain B_2 memuat titik q_j' .

Triangulasi Q_1 dan Q_2 , bersama-sama membentuk triangulasi Δ kompatibel dari poligon Q . Selanjutnya, jika q_i' dan q_j' terletak di komponen yang sama dari Q_1 , katakan A_1 , maka Δ mempunyai dua komponen “merah” yaitu $A_1 \cup A_2 \cup B_2$ memuat titik q_i dan B_1 memuat titik q_j . Begitu juga, jika q_i' dan q_j' terletak di komponen Q_1 yang berbeda. Tanpa menghilangkan keumuman, misal q_i' di A_1 dan q_j' di B_1 , maka lagi-lagi Δ mempunyai dua komponen “merah” yaitu $A_1 \cup A_2$ memuat q_i dan $B_1 \cup B_2$ memuat q_j . Akhirnya, jika semua sisi T adalah sisi-sisi Q , maka hanya ada satu “kantong” T . Sehingga Q merupakan poligon konveks. Semua sisi T adalah sisi-sisi Q , kecuali satu. Tanpa menghilangkan keumuman, misal $q_k q_1$ sisi Q dan bukan sisi T , sehingga sisi $q_k q_1$ berwarna “merah”. Karena $q_i q_j$ sisi T dan juga sisi Q , maka $q_j = q_{i+1}$. Maka, apabila $q_{i+1} \neq q_k$, triangulasi dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut;

Hubungkan titik q_i dengan titik-titik $q_{i+2}, q_{i+3}, \dots, q_k$ dan hubungkan titik q_k dengan titik-titik q_1, q_2, \dots, q_i .

Perhatikan bahwa, triangulasi ini menghasilkan dua komponen “merah” yaitu A yang dibangun oleh himpunan titik $\{q_1, q_2, \dots, q_i, q_{i+2}, \dots, q_k\}$ dan memuat titik q_i dan B dibangun oleh himpunan titik $\{q_j\}$ dan yang memuat q_j .

Dengan demikian, bukti teorema lengkap. ■

Dalam Teorema 3.3, disyaratkan bahwa himpunan titik pohon T sama dengan himpunan titik poligon Q . Selanjutnya, dibahas kasus dimana pohon T memuat semua titik poligon Q dan ada sejumlah titik T yang terletak di interior Q .

Teorema 3.4: Misal Q sebuah poligon sederhana dengan himpunan titik $\{q_1, q_2, \dots, q_k\}$; $k \geq 3$, dan T sebuah pohon geometrik bidang dengan himpunan titik $\{q_1, \dots, q_k\} \cup \{V_1, V_2, \dots, V_s\}$ dengan $s \geq 1$, sedemikian hingga titik-titik V_i di interior Q , T “tertutup” oleh Q dan semua kantong konveks. Maka:

Jika T sebuah bintang, maka $s = 1$ dan $C(T) = 2$

Jika T bukan bintang, maka $C(T) = 1$

Bukti:

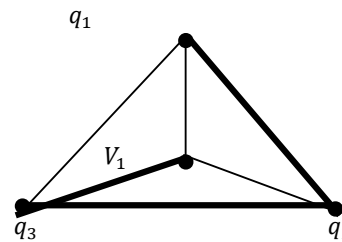
Perhatikan bahwa, karena setiap kantong dari pohon T adalah poligon sederhana, maka titik-titik daun (titik-titik berderajat satu) T harus merupakan titik-titik poligon Q . Karena T sebuah bintang, maka hanya ada tepat satu titik di interior Q yaitu titik sentral dari bintang, sehingga $s = 1$. Gabungan dari Q dan T adalah satu-satunya triangulasi kompatibel dari Q . Dan memiliki tepat dua komponen “merah”, sehingga $C(T) = 2$.

Jika T bukan bintang, maka setiap triangulasi Δ kompatibel- T dari Q memuat sebanyak $t = 2s + k - 2$ segitiga. Selanjutnya, pembuktian (ii) menggunakan induksi pada t .

Karena $k \geq 3$ dan $s \geq 1$, maka

$$t = 2s + k - 2 \geq 3$$

Untuk $t = 3$ atau $s = 1$ dan $k = 3$, satu-satunya kemungkinan poligon Q , pohon T , dan triangulasi Δ kompatibel- T dari Q dapat seperti gambar berikut.



Gambar 3.5

Perhatikan, poligon $Q = (q_1, q_2, q_3, q_1)$. Pohon T dibangun sisi-sisi “tebal” yaitu $q_1 q_2, q_2 q_3, q_3 q_1$. Titik V_1 adalah satu-satunya titik T yang terletak di interior Q . Jadi pohon T tertutup oleh poligon Q . Perhatikan bahwa terdapat tepat satu komponen “merah”, sehingga $C(T) = 1$. Jadi pernyataan benar untuk $t = 2s + k - 2 = 3$. Misalkan $t \geq 4$ dan asumsikan pernyataan benar untuk triangulasi Δ yang memuat kurang dari t segitiga.

Selanjutnya akan dilanjutkan pernyataan benar untuk triangulasi Δ kompatibel- T dari poligon Q yang memuat t segitiga.

Ditinjau dari kasus.

Kasus 1: Ada sisi pohon T merupakan diagonal poligon Q .

Misal $d = q_i q_j$ diagonal Q yang juga merupakan sebuah sisi T . Maka d membagi poligon Q menjadi dua poligon, namakan Q_1 dan Q_2 . Jelas d adalah sisi dari Q_1 dan Q_2 . Poligon Q_1 menutup sub pohon T_1 dan poligon Q_2 menutup sub pohon T_2 . Jika ada titik

di interior Q_1 dan di interior Q_2 , dan T_1 maupun T_2 bukan bintang, maka berdasarkan asumsi, ada tepat satu komponen “merah” dari Q_1 dan ada tepat satu komponen “merah” dari Q_2 . Setiap komponen “merah” ini memuat titik-titik q_i dan q_j . Jadi komponen “merah” dari Q_1 dan komponen “merah” dari Q_2 terhubung. Sehingga hanya ada satu komponen merah dari poligon Q , akibatnya $C(T) = 1$.

Jika tidak ada titik di interior poligon Q_1 atau Q_2 ; misalkan di interior Q_1 tidak ada titik T . Berdasarkan Teorema 3.3, Q_1 dapat ditriangulasi, sedemikian hingga terdapat tepat dua komponen “merah”. Komponen A_1 memuat titik q_i dan komponen B_1 memuat titik q_j . Karena di interior Q_2 ada titik dan sub pohon T_2 di interior Q_2 bukan bintang. Maka berdasarkan asumsi, Q_2 dapat ditriangulasi sedemikian hingga terdapat tepat satu komponen “merah” dari Q_2 . Karena titik-titik q_i dan q_j adalah titik $Q_1 \cap Q_2$, maka komponen “merah” A_1 dari Q_1 terhubung dengan komponen “merah” dari Q_2 di titik q_i ; dan komponen “merah” B_1 dari Q_1 terhubung dengan komponen “merah” dari Q_2 di titik q_j . Sehingga hanya ada tepat satu komponen “merah” dari Q . Ini berarti, $C(T) = 1$.

Kasus 2: setiap sisi T bukan diagonal poligon Q . Karena T bukan bintang, maka ada kantong T , katakan P_i , yang bukan segitiga. Misalkan kantong P_i diperoleh dari sisi $q_i q_{i+1}$ pada Q . Misal V titik pada P_i jelas setelah titik q_{i+1} dan V_1 titik pada P_i di interior Q setelah titik V . Jika V titik Q , maka $V = q_{i+2}$. Sehingga pohon $T' = T - q_{i+1} q_{i+2}$ tertutup oleh poligon Q' yang diperoleh dengan “melompati” (mengabaikan) titik q_{i+1} . Oleh karena itu, apabila T' bukan bintang, berdasarkan asumsi, ada triangulasi Δ' kompatibel- T' dari Q' hanya dengan tepat satu komponen “merah”. Sekarang tambahkan ke Δ' , sisi “tebal” (hitam) $q_{i+1} q_{i+2}$ dan sisi “tipis” (merah) $q_i q_{i+1}$, diperoleh sebuah triangulasi Δ kompatibel- T dari Q dengan tepat satu komponen. Sehingga $C(T) = 1$.

Jika T' bintang, maka V_1 adalah titikpusat T' . Hanya ada satu triangulasi Δ' kompatibel- T' . Dalam hal ini, sebuah triangulasi Δ kompatibel- T diperoleh dengan cara menghapus sisi $q_i q_{i+1}$ dari Δ' dan menyisipkan sisi-sisi “merah” $q_i q_{i+1}$, $V_1 q_{i+1}$ dan sisi-sisi “tebal (hitam) $q_{i+1} q_{i+2}$. Dengan demikian, ada tepat satu komponen “merah”, atau $C(T) = 1$.

Jika V bukan titik Q , misalkan poligon Q' sebagai berikut.

$$Q' = (q_1, q_2, \dots, q_i V, q_{i+1}, q_{i+2}, \dots, q_k, q_1)$$

Perhatikan poligon Q' tetap menutup pohon T tetapi banyak segitiga kurang dari banyak segitiga poligon Q dan V_1 terletak di interior Q' . Berdasarkan asumsi, terdapat tepat satu komponen “merah” dalam triangulasi Δ kompatibel- T dari Q' . Karena sisi $q_i q_{i+1}$ pada Q berwarna merah, maka terdapat tepat satu komponen “merah” dalam triangulasi Δ kompatibel- T dari Q . Sehingga $C(T) = 1$.

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

PENUTUP

SIMPULAN

Dari pembahasan dapat disimpulkan:

1. Jika T sebuah bintang, maka $d(T) = 1$. Artinya, jika T sebuah bintang, maka ada pohon $T1$ kompatibel- T sedemikian hingga hanya ada tepat satu sisi $T1$ dan T yang bersekutu.
2. Jika T pohon geometrik bidang pada himpunan titik S , maka $d(T) = C(T) - 1$.
3. Jika T pohon geometrik bidang yang merentang semua titik poligon Q dan setiap kantong T adalah poligon konveks, maka ada pohon $T1$ kompatibel- T sedemikian hingga hanya ada tepat satu sisi T dan $T1$ yang bersekutu.
4. Jika T pohon geometrik bidang yang merentang semua titik poligon Q dan titik-titik di interior Q sedemikian hingga setiap kantong T poligon konveks dan T bukan bintang, maka ada pohon $T1$ kompatibel- T sedemikian hingga T dan $T1$ pisah sisi.

SARAN

Sudah disebut pada pendahuluan, bahwa nilai $d(T)$ sangat ditentukan oleh kelas pohon T dan letak titik-titik T pada bidang datar. Hasil-hasil yang didapat di sini sebatas pohon T yang dibatasi oleh sebuah poligon sedemikian hingga setiap kantong T berupa poligon konveks. Jika syarat ini tidak dipenuhi, maka penentuan nilai $d(T)$ sulit sekaligus menarik untuk diteliti lebih lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

- A. Garcia, C. Huemer, F. Hurtado, J. Tejel. 2014. *Compatible spanning trees*. Computational Geometry. 47 (2014) 563-584.
- A. Mirzaian. 1992. *Hamiltonian triangulations and circumscribing polygons of disjoint line segments*.

- Computational Geometry. 2 (1) (1992) 15-30.
- A. Qodir. 2017. *Spanning tree auction: A complete*. Mathematical Social Sciences. 86 (2017) 1-8.
- Budayasa. I. K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.
- Lehner, Florian. 2014. *On spanning tree packings of highly edge connected graphs*. Combinatorial Theory, Series B. 105 (2014) 93-126.
- M. Ishaque, D. L. Souvaine, C.D. Toth. 2013. *Disjoint compatible geometric matchings*. Computational Geometry. 49 (1) (2013) 89-131.
- O. Aichholzer, F. Aurenhammer, F. Hurtado. 2002. *Sequences of spanning trees and a fixed tree theorem*. Computational Geometry. 21 (1-2) (2002) 3-20.
- O. Aichholzer, T. Hackl, B. Vogtenhuber. 2010. *Compatible pointed pseudo-triangulations*. Computational Geometry. Pp 91-94.
- S. Zezhen, H. Guo. 2019. *On a family of inverse curvature flows for closed convex plane curves*. Computational Geometry. 50 (2019) 1-7.