

ANALISIS PEMODELAN MATEMATIKA PENULARAN COVID-19 DENGAN TINDAKAN RAWAT INAP DI RUMAH SAKIT

Latifah Asmaul Fauzia

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : Latifah.17030214001@mhs.unesa.ac.id

Abstrak

Penyakit COVID-19 ditetapkan sebagai pandemi oleh World Health Organization pada maret 2020. wabah COVID-19 masih menjadi polemik bagi semua warga dunia. Dalam upaya pengendalian penyebaran COVID-19 individu terinfeksi menjalani rawat inap di rumah sakit. Berdasarkan kondisi tersebut dimunculkan kompartemen rawat inap (H) dan individu terinfeksi tetapi tidak terdeteksi diperhitungkan. Kontruksi model matematika dengan menambahkan kompartemen H diperoleh model baru $SII_uHR_uR_d$. Hasil analisis secara analitik model $SII_uHR_uR_d$ didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik endemik beserta analisis kestabilan, bilangan reproduksi dasar. Penelitian ini bertujuan untuk mengkonstruksi model penularan COVID-19 dengan tindakan rawat inap. Telah dilakukan dua simulasi numerik yaitu saat $R_0 > 1$ semua grafik kompartemen stabil menuju titik kesetimbangan endemik sedangkan saat $R_0 < 1$ semua grafik kompartemen stabil menuju titik kesetimbangan bebas penyakit.

Kata kunci: Rawat inap, COVID-19, Bilangan reproduksi dasar, Titik kesetimbangan, Simulasi numerik.

Abstract

The COVID-19 disease was declared a pandemic by the World Health Organization in March 2020. The COVID-19 outbreak is still a polemic for all citizens of the world. In an effort to control the spread of COVID-19, infected individuals undergo hospitalization. Based on these conditions an inpatient compartment (H) is presented and individuals infected but not detected are taken into account. The construction of a mathematical model by adding compartment H obtained a new model of $SII_uHR_uR_d$. The results of the analytical analysis of the $SII_uHR_uR_d$ model obtained disease-free equilibrium points and endemic points along with stability analysis, basic reproduction numbers. This study aims to construct a model of transmission of COVID-19 with inpatient measures. Two numerical simulations have been carried out, namely when $R_0 > 1$ all compartment graphs are stable towards the endemic equilibrium point while when $R_0 < 1$ all compartment graphs are stable towards the disease-free equilibrium point.

Keywords : Hospitalization ; COVID-19, Basic reproduction number, Equilibrium point, Numerical simulation

PENDAHULUAN

Munculnya COVID-19 di Wuhan, Cina pada akhir tahun 2019 hingga saat ini masih menjadi topik hangat diberbagai negara. COVID-19 merupakan jenis penyakit sindrom pernapasan parah yang disebabkan oleh virus *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2* (Susilo A dkk, 2020). COVID-19 dapat ditularkan antar manusia (Li Q dkk, 2020). Potensi penularan dapat terjadi apabila individu rentan melakukan kontak dengan individu yang terinfeksi. Proses infeksi membutuhkan periode inkubasi selama 5–6 hari, jumlah 1–14 hari (World Health Organization, 2020). Saat individu terinfeksi dapat diidentifikasi secara dini dengan melihat gejala seperti kelelahan, demam, batuk, sakit tenggorokan, dan sesak nafas merupakan (Huang C dkk, 2020). Tetapi berdasarkan hasil estimasi hampir 80% dari total populasi tidak semua individu

terinfeksi menunjukkan gejala berat bahkan tidak menunjukkan gejala. (Andrea, Cossarizza dkk., 2020). Munculnya individu terinfeksi yang tidak menunjukkan gejala menyebabkan individu tidak sadar jika dirinya terinfeksi. Kondisi tersebut menyebabkan banyaknya kasus tidak terdeteksi, sehingga sulit memutus tali penyebaran.

Sejak Maret 2020 World Health Organization (2020) telah menetapkan COVID-19 sebagai pandemi. Situasi global terkini pada tanggal 14 januari 2021 telah terkonfirmasi 90,759,370 kasus positif dan 1,963,169 kasus meninggal dunia (World Health Organization , 2021). Kondisi tersebut menunjukkan bahwa wabah COVID-19 masih menjadi polemik bagi semua warga dunia. Berbagai cara telah diupayakan untuk mengendalikan penyebaran COVID-19 seperti tindakan rawat inap di rumah sakit. Tindakan rawat inap di rumah sakit diperuntukan bagi individu yang terinfeksi untuk

melakukan serangkaian perawatan dalam jangka waktu tertentu. Dengan adanya tindakan rawat inap diharapkan dapat menekan angka kasus COVID-19. Telah banyak cabang ilmu yang berperan penting dalam penanganan dan pengendalian COVID-19 salah satunya yakni ilmu matematika melalui model matematika (Cooper, Ian dkk, 2020). Model matematika hingga saat ini terus dikembangkan untuk mengetahui karakteristik penyebaran COVID-19.

Salah satunya hasil penelitian COVID-19 yang telah dilakukan oleh Ivorra, dkk (2020) dengan mengembangkan model θ -SEIHRD. Pada model θ -SEIHRD memperhitungkan individu terinfeksi yang tidak terdeteksi dan diberlakukan tindakan rawat inap di rumah sakit. Populasi pada model θ -SEIHRD dibagi menjadi 9 kompartemen dengan memunculkan kompartemen I_u dan H. Kompartemen I_u merupakan individu yang telah terinfeksi tetapi tidak terdeteksi dan tidak dilaporkan kepada pihak berwenang. Kompartemen H merupakan individu terinfeksi berada di rumah sakit yang mendapatkan tindakan rawat inap. Penelitian dengan memperhitungkan individu yang tidak terdeteksi dan terdapat tindakan rawat inap perlu dilakukan supaya mengetahui pola penyebaran COVID-19 dalam kondisi tersebut. Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan Ivorra, dkk (2020) penulis terinspirasi untuk mengembangkan menjadi model baru $SII_uHR_uR_d$. Penelitian ini bertujuan untuk memodelkan, menganalisis, dan mensimulasikan model matematika penyebaran COVID-19 dengan pengaruh tindakan rawat inap di rumah sakit.

KAJIAN TEORI

SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

Gabungan dari n persamaan diferensial berorde satu yang membentuk suatu sistem disebut sistem diferensial (Conte dkk, 1993). Sistem persamaan diferensial dengan n persamaan disajikan dalam system (1).

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(t, x_1, x_2, x_3 \dots x_n) \\ x_2'(t) &= f_2(t, x_1, x_2, x_3 \dots x_n) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f_n(t, x_1, x_2, x_3 \dots x_n) \end{aligned} \quad (1)$$

Dimana t adalah variable terikat dan $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ adalah variable bebas. Turunan fungsi x_n terhadap t dan f_1 dinotasikan dengan $x_n'(t)$. (Neuhauser, C, 2004). Berdasarkan kelinearannya sistem persamaan

diferensial dibedakan menjadi dua yakni sistem persamaan diferensial non linier dan sistem persamaan diferensial linier.

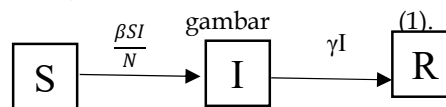
Model SIR dapat digunakan untuk memodelkan penyebaran penyakit. Berdasarkan Hethcote (2000)

MODEL SIR (SUSCEPTIBLE, INFECTED, RECOVERED)

populasi pada model SIR dibagi menjadi 3 bagian antara lain :

- kompartemen individu sehat yang rentan terhadap penyakit disimbolkan dengan S.
- kompartemen I terdiri dari individu terinfeksi dan dapat menularkan kepada individu lain.
- kompartemen pulih yakni individu terinfeksi yang telah sembuh dari penyakit disimbolkan dengan R.

Diagram kompartemen model SIR disajikan pada



Gambar 1. Model SIR Klasik

Berdasarkan Gambar (1) dapat dirumuskan model SIR dalam persamaan diferensial sebagai berikut (Hethcote, 2000):

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\frac{\beta SI}{N} \\ I'(t) &= \frac{\beta SI}{N} - \gamma I \\ R'(t) &= \gamma I \end{aligned} \quad (2)$$

Dimana $N = S(t) + I(t) + R(t)$ dengan parameter β merupakan tingkat infeksi serta γ merupakan tingkat pulihnya individu yang terinfeksi.

TITIK KESETIMBANGAN

Titik kesetimbangan juga sering disebut sebagai *equilibrium point*. Suatu titik yang tidak mengalami perubahan sepanjang waktu disebut titik kesetimbangan. Diberikan persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (3)$$

Titik $x^* \in R^n$ disebut titik kesetimbangan pada persamaan (3) apabila memenuhi $f(x^*) = 0$ (Perko, 1991).

KESTABILAN TITIK KESETIMBANGAN

Tahap pertama proses analisis kestabilan titik kesetimbangan yakni melakukan linierisasi sistem. Linierisasi sistem bertujuan untuk mengubah sistem persamaan nonlinier menjadi sistem linier dengan

menggunakan matriks jacobian (Perko, 2001). Selanjutnya disubstitusikan titik kesetimbangan ke sistem yang telah dilinierisasi. Sehingga didapatkan persamaan karakteristik pada persamaan (4) :

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (4)$$

Dari persamaan (4) didapatkan nilai eigen yang dinotasikan dengan λ . Sifat kestabilan dapat ditinjau dari nilai eigen, apabila semua nilai eigen bernilai negatif maka stabil asimtotik.

BILANGAN REPRODUKSI DASAR (R_0)

Bilangan reproduksi dasar dinotasikan dengan R_0 . Jumlah kasus sekunder dalam populasi rentan disebut bilangan reproduksi dasar (R. M. Anderson and R. M. May, 1991). Bilangan reproduksi dasar diperoleh dengan menggunakan metode *The Next Generation matrix* dari kompartemen yang mengandung individu terinfeksi. Langkah awal penyusunan *The Next Generation matrix* adalah dengan melakukan linierisasi pada persamaan kompartemen terinfeksi. Dengan demikian dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\dot{x} = (F - V)x$$

Dimana $F = \frac{\partial \phi_i}{\partial u_j}(x_0, y_0)$ dan $V = \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(x_0, y_0)$

Berdasarkan Castillo (2020) *The Next Generation matrix* dapat dinyatakan pada sistem (5) (Castillo, 2002) :

$$K = FV^{-1} \quad (5)$$

Niali eigen dominan pada dominan atau radius spectral dari sistem (5) dapat dinyatakan sebagai bilangan reproduksi dasar. Jika $R_0 < 1$ artinya bebas penyakit, sedangkan Jika $R_0 > 1$ artinya dalam populasi penyakit masih mewabah atau endemik (P. van den Driessche and James Watmough, 2008).

METODE

Pada penelitian ini bertujuan untuk memodelkan penyebaran COVID-19 dengan pengaruh tindakan rawat inap Tahapan-tahapan pada penelitian ini antara lain:

- Menetapkan batasan-batasan permasalahan dan mengontruksi model penyebaran COVID-19 dengan pengaruh tindakan rawat inap di rumah sakit.
- Menganalisis model secara analitik seperti mencari titik kesetimbangan, analisis kestabilan titik kesetimbangan, menentukan bilangan reproduksi dasar dengan metode *The Next Generation matrix*.

- Menganalisis model dengan simulasi numerik.

PEMBAHASAN

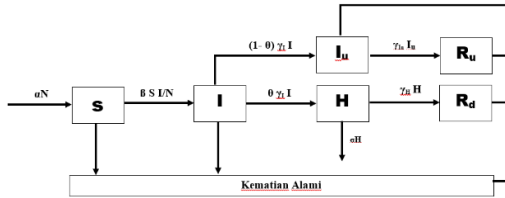
KONTRUKSI MODEL PENYEBARAN COVID-19

Penyusunan model matematika penyebaran COVID-19 dengan pengaruh tindakan rawat inap di rumah sakit terinspirasi dari hasil penelitian Ivorra (2020) dengan model matematika θ -SEIHRD. Dengan demikian dapat dikonstruksi model baru $SII_u HR_u R_d$ merupakan hasil modifikasi model SIR dengan menambahkan kompartemen H. Perbedaan model $SII_u HR_u R_d$ dengan model θ -SEIHRD terletak pada kompartemen D yang dihilangkan karena dihadirkan parameter kematian yang disebabkan oleh kasus COVID-19 (σ). Selain itu kompartemen E juga dihilangkan. Konstruksi model matematika diawali dengan Menyusun batasan-batasan atau asumsi sebagai berikut : (1) individu rentan terdiri dari individu yang berpotensi terinfeksi termasuk juga bayi yang baru lahir. (2) Pada populasi hanya terdapat penyakit COVID-19. (3) Kontak langsung dengan penderita COVID-19 berpotensi tertular. (4) Pada tingkat kontak penyakit diasumsikan individu yang sudah melewati masa inkubasi. (5) terdapat sekumpulan orang yang terinfeksi tetapi tidak terdeteksi. (6) Individu terinfeksi yang tidak terdeteksi kematian karena COVID-19 tidak diperhitungkan. (7) Tindakan rawat inap diperuntukan bagi individu terinfeksi yang terdeteksi. (8) individu terinfeksi yang tidak terdeteksi memiliki kesempatan untuk pulih tanpa melalui tindakan rawat inap, (9) kesembuhan diasumsikan permanen. (10) Terdapat kematian karena COVID-19. (11) kematian secara alami diperhitungkan. Pada model matematika $SII_u HR_u R_d$ populasi dibagi menjadi enam kompartemen yakni :

- Kompartemen rentan dinotasikan dengan S
- Kompartemen terinfeksi dinotasikan dengan I. Pada kompartemen (I) terdiri dari individu yang terinfeksi dan mampu menularkan terhadap individu lain.
- Kompartemen (I_u) terdiri dari sekumpulan individu terinfeksi yang tidak terdeteksi
- Kompartemen (H) terdiri dari individu terinfeksi dengan tindakan rawat inap di rumah sakit.
- Kompartemen (R_u) terdiri dari individu terinfeksi tetapi tidak terdeteksi yang telah pulih dari COVID-19.

- Kompartemen (R_d) terdiri dari individu terinfeksi yang mendapatkan tindakan rawat inap yang telah pulih dari COVID-19.

Diagram kompartemen model $SII_uHR_uR_d$ disajikan pada Gambar 2.



Gambar 2. Diagram Penyebaran COVID-19 dengan pengaruh rawat inap di rumah sakit

Berdasarkan Gambar (2) dapat dirumuskan model $SII_uHR_uR_d$ dalam persamaan diferensial sebagai berikut : Dimana $S(0) \geq 0$, $I(0) \geq 0$, $I_u(0) \geq 0$, $H(0) \geq 0$, $R_d(0) \geq 0$, $R_u(0) \geq 0$. Berdasarkan model $SII_uHR_uR_d$ didapatkan daftar parameter yang disajikan dalam tabel 1.

Tabel 1. Daftar Parameter

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \alpha N - \frac{\beta SI}{N} - \mu S \\
 \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - (1-\theta)\gamma_I I - \theta\gamma_I I - \mu I \\
 \frac{dI_u}{dt} &= (1-\theta)\gamma_I I - (\gamma_{I_u} + \mu) I_u \\
 \frac{dH}{dt} &= \theta\gamma_I I - \gamma_H H - \sigma H \\
 \frac{dR_u}{dt} &= \gamma_{I_u} I_u - \mu R_u \\
 \frac{dR_d}{dt} &= \gamma_H H - \mu R_d
 \end{aligned} \quad (6)$$

Parameter	Keterangan	Syarat
α	Tingkat kelahiran hidup	$\alpha > 0$
β	Proporsi kontak penyakit COVID-19	$\beta > 0$
μ	Tingkat kematian alami	$\mu > 0$
θ	Tingkat rawat inap individu yang terinfeksi.	$\theta > 0$

γ_I	Tingkat transisi kompartemen I	$\gamma_I > 0$
γ_H	Tingkat pemulihan individu pada kompartemen H	$\gamma_H > 0$
γ_{I_u}	Tingkat pemulihan individu pada kompartemen I_u	$\gamma_{I_u} > 0$
σ	Tingkat kematian yang disebabkan COVID-19.	$\sigma > 0$

Sistem (6) dapat disederhanakan dengan melakukan skala ulang atau rescale. Berikut rescale setiap kompartemen dapat dinyatakan sebagai berikut :

$s = \frac{S}{N}$, $i = \frac{I}{N}$, $i_u = \frac{I_u}{N}$, $h = \frac{H}{N}$, $r_u = \frac{R_u}{N}$, $r_d = \frac{R_d}{N}$
 Dengan demikian dapat dinyatakan $\frac{s}{N} + \frac{i}{N} + \frac{i_u}{N} + \frac{h}{N} + \frac{r_u}{N} + \frac{r_d}{N} = 1$. Hasil rescale sistem (6) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{dt} &= \alpha - \beta si - \mu s \\
 \frac{di}{dt} &= \beta si - \gamma_I i - \mu i \\
 \frac{di_u}{dt} &= (1-\theta)\gamma_I i - (\gamma_{I_u} + \mu) i_u \\
 \frac{dh}{dt} &= \theta\gamma_I i - \gamma_H h - \sigma h \\
 \frac{dr_u}{dt} &= \gamma_{I_u} i_u - \mu r_u \\
 \frac{dr_d}{dt} &= \gamma_H h - \mu r_d
 \end{aligned} \quad (7)$$

Selanjutnya akan dilakukan perhitungan analitik.

TITIK KESETIMBANGAN MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN COVID-19

Berdasarkan hasil penyelesaian persamaan $\frac{ds}{dt} = \frac{di}{dt} = \frac{di_u}{dt} = \frac{dh}{dt} = \frac{dr_u}{dt} = \frac{dr_d}{dt} = 0$ diperoleh dua titik kesetimbangan antara lain :

- Titik kesetimbangan ketika tidak ada penyebaran COVID-19 atau dapat diartikan bebas penyakit yakni $E_0 = (s^*, i^*, i_u^*, h^*, r_u^*, r_d^*) = (\frac{\alpha}{\mu}, 0, 0, 0, 0, 0)$.
- Titik kesetimbangan endemik yakni $E_1 = (s^{**}, i^{**}, i_u^{**}, h^{**}, r_u^{**}, r_d^{**})$, dimana :

$$s^{**} = \frac{\gamma_I + \mu}{\beta}$$

$$i^{**} = -\frac{-\beta\alpha + \mu\gamma_I + \mu^2}{(\gamma_I + \mu)\beta}$$

$$i_u^{**} = \frac{\gamma_I(-1+\theta)(-\beta\alpha + \mu\gamma_I + \mu^2)}{(\gamma_{I_u} + \mu)(\gamma_I + \mu)\beta}$$

$$h^{**} = -\frac{\theta\gamma_I(-\beta\alpha + \mu\gamma_I + \mu^2)}{\beta(\gamma_H\gamma_I + \gamma_H\mu + \sigma\gamma_I + \sigma\mu)}$$

$$r_u^{**} = \frac{\gamma_{I_u}(-1+\theta)(-\beta\alpha + \mu\gamma_I + \mu^2)}{(\gamma_{I_u} + \mu)(\gamma_I + \mu)\beta\mu}$$

$$r_d^{**} = -\frac{\gamma_h\theta\gamma_I(-\beta\alpha + \mu\gamma_I + \mu^2)}{\beta\mu(\gamma_H\gamma_I + \gamma_H\mu + \sigma\gamma_I + \sigma\mu)}$$

BILANGAN REPRODUKSI DASAR

Pencarian bilangan reproduksi dasar menggunakan metode *The Next Generation matrix* (NGM). NGM dikonstruksi dari kompartemen yang terdapat kasus terinfeksi seperti kompartemen I, kompartemen I_u dan kompartemen H disajikan sebagai berikut :

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma_I i - \mu i \quad (8)$$

$$\frac{dI_u}{dt} = (1-\theta)\gamma_I i - (\gamma_{I_u} + \mu) i_u \quad (9)$$

$$\frac{dH}{dt} = \theta\gamma_I i - \gamma_H h - \sigma h \quad (10)$$

Selanjutnya ditentukan matriks transmisi dinotasikan dengan F dan matriks transisi dinotasikan dengan V. matriks F dan matriks V disajikan sebagai berikut :

$$F = \begin{bmatrix} \beta s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$V = \begin{bmatrix} \gamma_I + \mu & 0 & 0 \\ -(1-\theta)\gamma_I & \gamma_{I_u} + \mu & 0 \\ -\theta\gamma_I & 0 & \gamma_H + \sigma \end{bmatrix} \quad (12)$$

Pada persamaan (11) dan (12) disubstitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (s, i, i_u, h, r_u, r_d) = (\frac{\alpha}{\mu}, 0, 0, 0, 0, 0)$. Dengan demikian diperoleh kontruksi NGM sebagai berikut :

$$K = FV^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta\alpha}{\mu(\gamma_I + \mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Dari sistem (13) diperoleh nilai eigen. Nilai eigen dominan merupakan bilangan reproduksi dasar. Dengan demikian diperoleh $R_0 = \frac{\beta\alpha}{\mu(\gamma_I + \mu)}$.

ANALISIS TITIK KESETIMBANGAN

Kestabilan titik kesetimbangan dapat tentukan berdasarkan nilai eigen. Nilai eigen diperoleh dari persamaan karakteristik sistem yang telah dilinierisasi disekitar titik kesetimbangan. Dikarenakan model $SII_uHR_uR_d$ mempunyai dua titik kesetimbangan maka akan dilakukan analisis titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik.

• Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit.

Berdasarkan linierisasi sitem (7) disekitar titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (s^*, i^*, i_u^*, h^*, r_u^*, r_d^*) = (\frac{\alpha}{\mu}, 0, 0, 0, 0, 0)$ diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut :

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + \mu & -\frac{\beta\alpha}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{\beta\alpha}{\mu} - \gamma_I - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\theta)\gamma_I & \lambda + \gamma_{I_u} - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta\gamma_I & 0 & \lambda + \gamma_H - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{I_u} & 0 & \lambda + \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_H & 0 & \lambda + \mu \end{pmatrix} = 0$$

Dari persamaan karakteristik diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -\mu,$$

$$\lambda_4 = -\gamma_H - \sigma$$

$$\lambda_5 = -\gamma_{I_u} - \mu$$

$$\lambda_6 = -\frac{-\beta\alpha + \gamma_I\mu + \mu^2}{\mu}$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit dapat dikatakan stabil apabila $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0, \lambda_5 < 0$, dan $\lambda_6 < 0$ maka $\frac{-\beta\alpha + \gamma_I\mu + \mu^2}{\mu} > 0$.

Analisis kestabilan titik endemik

Berdasarkan linierisasi sitem (7) disekitar titik kesetimbangan endemik $E_1 = (s^{**}, i^{**}, i_u^{**}, h^{**}, r_u^{**}, r_d^{**}) = (\frac{\gamma_I + \mu}{\beta}, -\frac{-\beta\alpha + \mu\gamma_I + \mu^2}{(\gamma_I + \mu)\beta}, \frac{\gamma_I(-1+\theta)(-\beta\alpha + \mu\gamma_I + \mu^2)}{(\gamma_{I_u} + \mu)(\gamma_I + \mu)\beta}, -\frac{\theta\gamma_I(-\beta\alpha + \mu\gamma_I + \mu^2)}{\beta(\gamma_H\gamma_I + \gamma_H\mu + \sigma\gamma_I + \sigma\mu)}, \frac{\gamma_{I_u}(-1+\theta)(-\beta\alpha + \mu\gamma_I + \mu^2)}{(\gamma_{I_u} + \mu)(\gamma_I + \mu)\beta\mu}, -\frac{\gamma_h\theta\gamma_I(-\beta\alpha + \mu\gamma_I + \mu^2)}{\beta\mu(\gamma_H\gamma_I + \gamma_H\mu + \sigma\gamma_I + \sigma\mu)})$ diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut :

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - \frac{-\beta\alpha + \mu\gamma_I + \mu^2}{(\gamma_I + \mu)} - \mu & -\gamma_I - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{-\beta\alpha + \mu\gamma_I + \mu^2}{(\gamma_I + \mu)} & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\theta)\gamma_I & \lambda + \gamma_{I_u} + \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta\gamma_I & 0 & \lambda + \gamma_H + \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{I_u} & 0 & \lambda + \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_H & 0 & \lambda + \mu \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu$$

$$\lambda_3 = -\gamma_H - \sigma$$

$$\lambda_4 = -\gamma_{I_u} - \mu$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{2} \frac{-\beta\alpha + \sqrt{\beta^2\alpha^2 + 12\mu^3\gamma_I + 12\mu^2\gamma_I^2 + 4\mu\gamma_I^3 - 8\beta\alpha\mu\gamma_I - 4\beta\alpha\gamma_I^2 + 4\mu^4 - 4\beta\alpha\mu^2}}{\gamma_I + \mu}$$

$$\lambda_6 = \frac{1}{2} \frac{\beta\alpha + \sqrt{\beta^2\alpha^2 + 12\mu^3\gamma_I + 12\mu^2\gamma_I^2 + 4\mu\gamma_I^3 - 8\beta\alpha\mu\gamma_I - 4\beta\alpha\gamma_I^2 + 4\mu^4 - 4\beta\alpha\mu^2}}{\gamma_I + \mu}$$

Titik kesetimbangan E_1 stabil asimtotik apabila

$$1) \frac{\beta\alpha + \sqrt{\beta^2\alpha^2 + 12\mu^3\gamma_I + 12\mu^2\gamma_I^2 + 4\mu\gamma_I^3 - 8\beta\alpha\mu\gamma_I - 4\beta\alpha\gamma_I^2 + 4\mu^4 - 4\beta\alpha\mu^2}}{\gamma_I + \mu} < 0$$

$$0$$

$$2) \frac{\beta\alpha + \sqrt{\beta^2\alpha^2 + 12\mu^3\gamma_I + 12\mu^2\gamma_I^2 + 4\mu\gamma_I^3 - 8\beta\alpha\mu\gamma_I - 4\beta\alpha\gamma_I^2 + 4\mu^4 - 4\beta\alpha\mu^2}}{\gamma_I + \mu} > 0$$

$$0.$$

SIMULASI NUMERIK

Pada tahap ini akan dilakukan interpretasi model penyebaran COVID-19 dengan tindakan rawat inap di rumah sakit dengan bantuan *software MATLAB*. Berikut disajikan daftar nilai awal dalam Tabel 2 dan daftar nilai parameter dalam Tabel 3. .

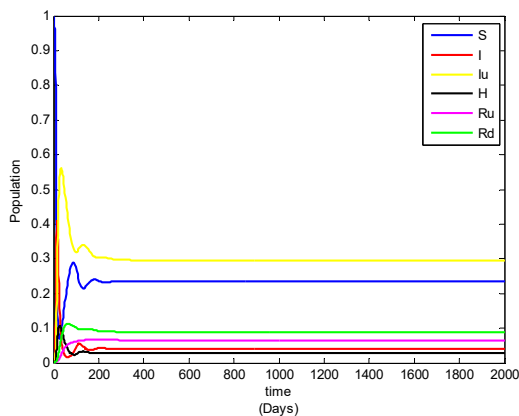
Tabel 2. Daftar Nilai Awal

Notasi	Nilai awal	Referensi
$S(0)$	1	(Cooper, 2020)
$I(0)$	0.001	(Cooper, 2020)
$I_u(0)$	0.0002	Estimasi
$H(0)$	0.0001	Estimasi
$R_u(0)$	0	(Cooper, 2020)
$R_d(0)$	0	(Cooper, 2020)

Tabel 3. Daftar Nilai Parameter

Parameter	Nilai	Referensi
α	0.01	Estimasi
β	0.7	(Alshammari, 2020)
μ	0.0138	(Supriyono, 2017)
θ	0.2	(Safi, 2011)
γ_I	0.15	(Ivorraa dkk, 2020)
γ_H	0.042553	(Safi, 2011)
γ_{Iu}	0,003	(Goswami dkk, 2016)
σ	0.0009	(Rahim ud Dina, 2020)

Berdasarkan nilai parameter pada tabel 2 diperoleh nilai $R_0 = 3.096 > 1$. Simulasi pertama dipilih nilai awal dalam Tabel 2 dan nilai parameter dalam Tabel 3. Hasil simulasi pertama disajikan dalam Gambar 2.

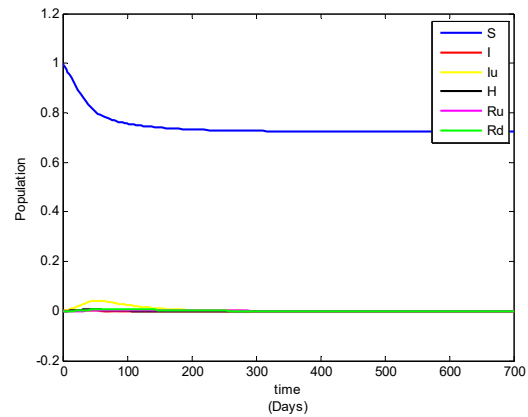


Gambar 2. Stabilitas kesetimbangan

Gambar 2 menunjukkan grafik setiap kompartemen saat $R_0 = 3.096 > 1$. Grafik kompartemen terinfeksi

(I) dan kompartemen terinfeksi tetapi tidak terdeteksi (I_u) menunjukkan jumlah kasus meningkat dengan pesat dalam waktu yang singkat. Dari hasil simulasi pada Gambar 2 terlihat bahwa wabah COVID-19 masih mewabah pada populasi. Seiring berjalannya waktu grafik setiap kompartemen stabil menuju titik $E_1 = (s^{**}, i^{**}, i_u^{**}, h^{**}, r_u^{**}, r_d^{**}) = (0.234, 0.041, 0.295, 0.028, 0.064, 0.087)$.

Simulasi kedua dipilih $\gamma_I = 0.6$ sedangkan untuk parameter dan nilai awal yang lain sama dengan simulasi pertama. Hasil simulasi kedua disajikan dalam Gambar 3.



Gambar 3. Stabilitas kesetimbangan bebas penyakit

Gambar 3 merupakan gabungan grafik semua kompartemen saat $R_0 = 0.826 < 1$. Pada grafik kompartemen (R_u) yang berwarna magenta dan grafik kompartemen (R_d) yang berwarna hijau menunjukkan bahwa individu yang telah pulih meningkat. Kondisi saat $R_0 = 0.826 < 1$ artinya bahwa penyakit COVID-19 beransur-ansur menghilang pada populasi. Seiring berjalannya waktu grafik stabil menuju titik $E_0 = (s^*, i^*, i_u^*, h^*, r_u^*, r_d^*) = (0.724, 0, 0, 0, 0, 0)$.

PENUTUP

Berdasarkan hasil kontruksi model matematika penularan penyakit COVID-19 dengan tindakan rawat inap di rumah sakit diperoleh model baru $SIIuHR_dR_{u..}$. Setelah dikonstruksi model dianalisis secara analitik. Hasil analisis analitik antara lain :

- titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (s^*, i^*, i_u^*, h^*, r_u^*, r_d^*) = (\frac{\alpha}{\mu}, 0, 0, 0, 0, 0)$ dan titik kesetimbangan endemik $E_1 = (s^{**}, i^{**}, i_u^{**}, h^{**}, r_u^{**}, r_d^{**}) =$

$$\left(\frac{\gamma_I + \mu}{\beta}, -\frac{-\beta\alpha + \mu\gamma_I + \mu^2}{(\gamma_I + \mu)\beta}, \frac{\gamma_I(-1 + \theta)(-\beta\alpha + \mu\gamma_I + \mu^2)}{(\gamma_{I_u} + \mu)(\gamma_I + \mu)\beta}, \right. \\ \left. -\frac{\theta\gamma_I(-\beta\alpha + \mu\gamma_I + \mu^2)}{\beta(\gamma_H\gamma_I + \gamma_H\mu + \sigma\gamma_I + \sigma\mu)}, \frac{\gamma_{I_u}(-1 + \theta)(-\beta\alpha + \mu\gamma_I + \mu^2)}{(\gamma_{I_u} + \mu)(\gamma_I + \mu)\beta\mu}, \right. \\ \left. -\frac{\gamma_h\theta\gamma_I(-\beta\alpha + \mu\gamma_I + \mu^2)}{\beta\mu(\gamma_H\gamma_I + \gamma_H\mu + \sigma\gamma_I + \sigma\mu)} \right)$$

- Bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{\beta\alpha}{\mu(\gamma_I + \mu)}$$

Pada model $SIIIuHR_uR_u$ dilakukan dua simulasi yakni saat $R_0 = 0.826 < 1$ grafik gabungan semua kompartemen stabil menuju titik $E_0 = (s^*, i^*, i_u^*, h^*, r_u^*, r_d^*) = (0.724, 0, 0, 0, 0, 0)$ dan saat $R_0 = 3.096 > 1$ grafik gabungan semua kompartemen stabil menuju titik $E_1 = (s^{**}, i^{**}, i_u^{**}, h^{**}, r_u^{**}, r_d^{**}) = (0.234, 0.041, 0.295, 0.028, 0.064, 0.087)$. Hasil simulasi menunjukkan masih banyak individu terinfeksi yang belum terdeteksi sehingga menyebabkan bertambah panjang rantai penularan penyakit. Untuk menekan angka kasus COVID-19 dapat dilakukan dengan meningkatkan identifikasi individu terinfeksi yang tidak terdeteksi.

DAFTAR PUSTAKA

- Supriyono, G. (2017). Pemodelan Matematika Pada Penyebaran Penyakit Difteri Dengan Pengaruh Karantina dan Vaksinasi. *UNNES Journal of Mathematics*.
- Alshammari, F. (2020). A Mathematical Model to Investigate the Transmission of COVID-19 in the Kingdom of Saudi Arabia. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*.
- Andrea, Cossarizza dkk. (2020). SARS-CoV-2, the Virus that Causes COVID-19: Cytometry and the New Challenge for Global Health. *Journal of Quantitative Cell Science*, 97A: 340-343.
- Bushra Abdul Halima*, H. A. (2015). Bank Financial Statement Management using a Goal Programming Model. *Social and Behavioral Sciences*, 7.
- Cooper, I. (2020). Dynamic tracking with model - based forecasting for the spread of the COVID-19 pandemic. *Chaos, Solitons and Fractals*, 110298.
- Cooper, Ian dkk. (2020). A SIR model assumption for the spread of COVID-19 in different communities. *Chaos, Solitons and Fractals*, 139(2020):110057.
- Goal Programming : An Application To Budgetary Allocation Of An Institution Of Higher Learning. (n.d.).
- Hethcote, H. (2000). The Mathematics of Infection Disease. *SIAM Review* 42, 4:599-653.
- Ivorraa dkk. (2020). Mathematical modeling of the spread of the coronavirus. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 88 (2020) 105303.
- Li Q dkk. (2020). Early transmission dynamics in Wuhan, China, of novel coronavirusinfected pneumonia. *N Engl J Med* 2020.
- Onuoha, E. D. (2013). Goal Programming : An Application To Budgetary Allocation Of An Institution Of Higher Learning. *Engineering and Applied Sciences*, 11.
- Rahim ud Dina, A. (2020). Study of global dynamics of COVID-19 via a new mathematical model. *Results in Physics*, (2020)103468.
- R. M. Anderson and R. M. May. (1991). *Infectious Diseases of Humans*. Oxford: OxfordUniversity Press
- Safi, M. (2011). Mathematical analysis of a disease transmission model with quarantine, isolation, and an imperfect vaccine. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(2011)3044-3070.
- Susilo A dkk. (2020). Coronavirus disease 2019 : tinjauan literatur terkini. *Jurnal Penyakit Dalam Indonesia*, 7(1):45-67.
- World Health Organization. (2021, Januari 14). Retrieved Januari 14, 2021, from WHO Coronavirus Disease (COVID-19) Dashboard: <https://covid19.who.int>