MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika **Volume 09 No 01**
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115 **Tahun 2021**

SIFAT-SIFAT OPERASI PADA HIMPUNAN LUNAK FUZZY BERPARAMETER FUZZY

Dwidita Gusti Ningrum
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: dwidita.17030214012@mhs.unesa.ac.id

Dwi Nur Yunianti
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: dwiyunianti@unesa.ac.id

Abstrak

Molodtsov memperkenalkan himpunan lunak yang menggabungkan antara himpunan semesta dengan suatu himpunan parameter melalui suatu fungsi dari himpunan parameter ke himpunan kuasa atas himpunan semestanya. L. A Zadeh memperkenalkan teori baru yaitu himpunan fuzzy. Seiring berjalannya waktu konsep himpunan fuzzy berkembang menghasilkan himpunan lunak fuzzy. Pengembangan konsep himpunan lunak memberikan teori baru yang dinamakan himpunan lunak berparameter fuzzy. Penggabungan konsep himpunan lunak fuzzy dengan himpunan lunak berparameter fuzzy diperoleh himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy. Pada artikel ini akan dibahas mengenai himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy khususnya sifat-sifat operasi himpunan, sehingga dapat dikaji apakah sifat-sifat operasi pada himpunan biasa juga berlaku pada himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy. Berdasarkan pembahasan disimpulkan bahwa, sifat-sifat operasi yang berlaku pada himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy meliputi sifat transitif, sifat komutatif terhadap operasi gabungan, irisan, sifat asosiatif terhadap operasi gabungan, irisan, sifat De Morgan's, serta sifat distributif terhadap operasi gabungan dan irisan.
Kata Kunci: himpunan fuzzy, himpunan lunak, himpunan lunak fuzzy, himpunan lunak berparameter fuzzy, himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy.

Abstract

Molodtsov introduced a soft set that combines the universal set with a parameter set through a function from the parameter set to the power set over the universal set. L. A Zadeh introduced a new theory, namely the fuzzy set. Over time, the concept of fuzzy sets develops to produce fuzzy soft sets. The development of the soft set concept provides a new theory called the fuzzy parameterized soft set. Combining the concept of fuzzy soft set with fuzzy parameterized soft set is obtained fuzzy parameterized fuzzy soft set. In this article, we will discuss about fuzzy parameterized fuzzy soft set, especially the characteristics of the set operation, so that it can be studied whether the operating properties of ordinary sets also apply to fuzzy parameterized fuzzy soft set. Based on the discussion, it can be concluded that the operating properties that apply to fuzzy parameterized fuzzy soft set include transitive properties, commutative properties of union operations, intersection, associative properties of union operations, intersection, De Morgan's properties, and distributive properties of union and intersection operations.
Keywords: *Fuzzy set, soft set, fuzzy soft set, fuzzy parameterized soft set, fuzzy parameterized fuzzy soft set.*

PENDAHULUAN

Himpunan lunak diperkenalkan oleh Molodstov pada tahun 1999, himpunan lunak menggabungkan antara himpunan semesta dengan suatu himpunan parameter melalui suatu fungsi dari himpunan parameter ke himpunan kuasa atas himpunan semestanya (Molodtsov, 1999). Pengaplikasian teori himpunan lunak dalam beberapa kasus, diantaranya dalam integral Reimann, integral Perron, teori ukuran, riset operasi, teori game, dan sebagainya (Cagman & Enginoglu, 2010). Maji et al., (2003) mendefinisikan operasi pada himpunan lunak diantaranya komplemen, gabungan, dan irisan. Aplikasi pengambilan keputusan himpunan lunak (Feng et al., 2010). Cagman & Enginoglu (2010) memperkenalkan representasi matrik himpunan lunak, sedangkan struktur aljabar dari himpunan lunak dikembangkan oleh Acar et al., (2010) dan Zhan & Jun (2010).

Konsep himpunan fuzzy diperkenalkan pertama kali pada tahun 1965 oleh Prof L. A. Zadeh seorang peneliti di Universitas California, Barkley. Zadeh mendefinisikan suatu himpunan fuzzy X atas U sebagai koleksi dari pasangan terurut $(u, \mu_X(u))$, $\forall\, u \in U$ dimana derajat keanggotaan $\mu_X(u) \in [0, 1]$ (Zadeh, 1965).

Dengan menggunakan konsep himpunan fuzzy Cagman mendefinisikan teori baru yaitu himpunan lunak fuzzy (Cagman et al., 2011). Himpunan lunak fuzzy mengkaitkan antara himpunan semesta dengan suatu himpunan parameter melaui suatu fungsi dari himpunan parameter ke dalam himpunan fuzzy.

Cagman et al., (2011) mengembangkan himpunan lunak dengan memberikan derajat keanggotaan pada himpunan parameternya, yang disebut himpunan lunak berparameter fuzzy. Himpunan lunak berparameter fuzzy dapat digunakan untuk pengambilan keputusan dalam pemilihan alternatif sesuai parameter yang diinginkan (Cagman et al., 2011).

Konsep himpunan lunak fuzzy dapat digabungkan dengan himpunan lunak berparameter fuzzy sehingga diperoleh himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy yang dikembangkan Cagman et al., (2010). Himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy mengkaitkan fungsi dari himpunan parameter fuzzy ke himpunan fuzzy atas himpunan semestanya. Permasalahan pengambilan keputusan juga bisa diselesaikan menggunakan konsep himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy (Cagman et al., 2010).

Pada himpunan terdapat beberapa operasi. Ada banyak manfaat mengembangkan operasi himpunan. Diantaranya pada himpunan fuzzy terdapat operasi AND, OR, irisan, gabungan, yang digunakan dalam logika fuzzy (Zadeh, 1965). Selain itu, operasi himpunan juga bisa digunakan untuk pengolahan citra digital (Mehta & Yadav, 2014).

Berdasarkan hal tersebut, pada artikel ini akan membahas himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy khususnya sifat-sifat operasi himpunan dan mengkaji apakah sifat-sifat operasi pada himpunan klasik juga berlaku pada himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy. Pembahasan pada artikel ini mengacu pada (Cagman et al., 2010) dan memberikan bukti teorema yang belum dibuktikan pada artikel tersebut.

KAJIAN TEORI

HIMPUNAN FUZZY

Himpunan fuzzy merupakan pengembangan konsep dari himpunan crips, yang memperhitungkan derajat keanggotaan diantara 0 dan 1 dalam proses pengambilan keputusan.

Definisi 2.1

Misalkan U adalah himpunan semesta. Himpunan fuzzy X atas U adalah himpunan yang ditentukan oleh suatu fungsi μ_X dengan:

$$\mu_X : U \to [0, 1]$$

Dimana μ_X disebut fungsi keangggotaan X, dan nilai $\mu_X(u)$ adalah nilai dari keanggotaan untuk setiap $u \in U$. Nilai tersebut menunjukkan derajat dari u pada himpunan fuzzy X. Jadi, himpunan fuzzy X atas U dapat dituliskan,

$$X = \{(u, \mu_X(u)) : u \in U, \mu_X(u) \in [0, 1]\}$$

Koleksi himpunan fuzzy atas U dinotasikan F(U).

Dalam himpunan fuzzy terdapat relasi subset yang didefinisikan sebagai berikut, misalkan A dan B himpunan fuzzy, A ⊆ B jika dan hanya jika $\mu_A(u) \leq \mu_B(u)\ \forall\, u \in U$ (Zadeh, 1965).

Berikut ini diberikan contoh himpunan fuzzy

Contoh 2.1:

Diberikan U himpunan kategori warna baju dan X himpunan warna baju yang paling banyak diminati konsumen di Toko Laris Manis, dengan U ={putih, merah, hitam, kuning, hijau}

Himpunan fuzzy X atas U dapat dituliskan
X = {(putih, 0.8), (merah, 0.2), (hitam, 1), (kuning, 0), (hijau, 0.4)}

Pada contoh 2.1, kuning menjadi warna yang paling tidak diminati oleh konsumen sehingga derajat keanggotaan 0 sedangkan hitam menjadi warna yang paling banyak diminati oleh konsumen pada saat membeli baju di Toko Laris Manis sehingga diberi derajat keanggotan 1.

HIMPUNAN LUNAK

Berikut ini akan diberikan definisi serta contoh dari konsep himpunan lunak.

Definisi 2.2

Misalkan U suatu himpunan semesta, P(U) suatu himpunan kuasa atas U didefinisikan, E suatu himpunan parameter. Definisi parameter yaitu himpunan yang anggotanya merupakan suatu kriteria. Himpunan lunak atas U ditulis F, adalah himpunan yang ditentukan oleh fungsi f dengan,

$$f : E \to P(U),$$

Fungsi f dikatakan fungsi pendekatan (aproksimasi) dari F. Jadi himpunan lunak atas U ditulis

$$\mathrm{F} = \{(e, f(e)) : e \in E, f(e) \in P(U)\}$$

Lebih lanjut, koleksi himpunan lunak atas U dinotasikan S(U) (Molodtsov, 1999).

Berikut ini diberikan contoh himpunan lunak.

Contoh 2.2:

Pertimbangan kriteria dalam membeli mobil dilihat dari design mobil, harganya murah, kenyamanan dan hemat bahan bakar. Andy ingin membeli sebuah mobil di suatu showroom. Pada showroom tersebut, Andy memilih 5 mobil sebagai calon mobil yang akan dibeli. Berdasarkan informasi yang diperoleh, untuk desain mobil terpilih mobil 1, mobil 2, mobil 3, dan mobil 5. Untuk kriteria mobil murah ada pada mobil 2 dan mobil 4. Untuk kriteria kenyamanan, mobil 1, mobil 3, dan mobil 4 yang memenuhi, sedang kriteria hemat bahan bakar dipenuhi kelima mobil tersebut.

Berdasarkan hal tersebut, dapat dituliskan dalam bentuk matematis sebagai berikut :

Himpunan mobil yang akan dibeli yaitu $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, himpunan parameter $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yang menyatakan pertimbangan kriteria dalam membeli mobil yaitu desain mobil, harganya murah, kenyamanan, dan hemat bahan bakar. $f(e_1) = \{u_1, u_2, u_3, u_5\}, f(e_2) = \{u_2, u_4\}$,
$f(e_3) = \{u_1, u_3, u_4\}, f(e_4) = U$,
maka himpunan lunak F_A dapat ditulis

$$F = \begin{Bmatrix} (e_1, \{u_1, u_2, u_3, u_5\}), (e_2, \{u_2, u_4\}), \\ (e_3, \{u_1, u_3, u_4\}), (e_4, U) \end{Bmatrix}$$

HIMPUNAN LUNAK FUZZY

Berikut ini akan diberikan definisi serta contoh dari konsep himpunan lunak fuzzy.

Definisi 2.3

Misalkan U adalah himpunan semesta, E adalah suatu himpunan parameter, F(U) adalah koleksi himpunan fuzzy atas U. Himpunan lunak fuzzy atas U ditulis Γ, adalah himpunan yang ditentukan oleh fungsi γ dengan,

$$\gamma : E \rightarrow F(U)$$

Fungsi γ disebut fungsi perkiraan dari Γ. Jadi, himpunan lunak fuzzy Γ atas U dapat dituliskan,

$$\Gamma = \{(e, \gamma(e)) : e \epsilon E, \gamma(e) \epsilon F(U)\}$$

Koleksi himpunan lunak fuzzy atas U dinotasikan FS(U) (Cagman et al., 2011).

Berikut ini diberikan contoh himpunan lunak fuzzy

Contoh 2.3 :

Berdasarkan contoh 2.2, diberikan penambahan derajat keanggotaan untuk mobil pada kriteria. Untuk desain mobil, mobil 1 derajat keanggotannya 0.9,mobil 2 sebesar 0.6, mobil 3 sebesar 0.3 dan mobil 5 sebesar 0.7. Untuk kriteria murah, mobil 2 derajat keanggotannya 0.5 dan mobil 4 sebesar 0.9. Untuk kriteria kenyamanan, mobil 1 derajat keanggotannya 0.2, mobil 3 sebesar 0.6 dan mobil 4 sebesar 0.4. Untuk kriteria hemat bahan bakar, mobil 1 derajat keanggotannya 0.9, mobil 2 sebesar 0.8, mobil 3 sebesar 0.3, mobil 4 sebesar 0.1, dan mobil 5 sebesar 0.7.

Dengan demikian, himpunan lunak fuzzy Γ dapat ditulis

$$\Gamma = \begin{Bmatrix} \left(e_1, \begin{Bmatrix} (u_1, 0.9), (u_2, 0.6), \\ (u_3, 0.3), (u_5, 0.7) \end{Bmatrix}\right), \\ (e_2, \{(u_2, 0.5), (u_4, 0.9)\}), \\ (e_3, \{(u_1, 0.2), (u_3, 0.6), (u_4, 0.4)\}), \\ \left(e_4, \begin{Bmatrix} (u_1, 0.9), (u_2, 0.8), (u_3, 0.3), \\ (u_4, 0.1), (u_5, 0.7) \end{Bmatrix}\right) \end{Bmatrix}$$

HIMPUNAN LUNAK BERPARAMETER FUZZY

Cagman et al., (2011) mengembangkan konsep baru yaitu himpunan lunak berparameter fuzzy dengan definisi sebagai berikut.

Definisi 2.4

Misalkan U adalah suatu himpunan semesta, P(U) adalah suatu himpunan kuasa atas U dan E adalah suatu himpunan parameter dan X adalah himpunan fuzzy atas E dengan fungsi keanggotaan $\mu_X : E \rightarrow [0, 1]$. Himpunan lunak berparameter fuzzy atas U ditulis F_X, adalah himpunan yang ditentukan oleh fungsi f_X dengan,

$$f_X : \mathrm{E} \rightarrow \mathrm{P(U)}$$

Fungsi f_X disebut fungsi pendekatan dari F_X. Jadi, himpunan lunak berparameter fuzzy atas U dapat dituliskan sebagai,

$$F_X = \begin{Bmatrix} \left((e, \mu_X(e)), f_X(e)\right) : e \in E, \\ f_X(e) \in P(U), \mu_X(e) \in [0, 1] \end{Bmatrix}$$

Koleksi himpunan lunak berparameter fuzzy atas U dinotasikan FPS(U) (Cagman et al., 2011).

Berikut ini diberikan contoh himpunan lunak berparameter fuzzy,

Contoh 2.4:

Dari contoh 2.2 untuk membentuk suatu himpunan lunak berparameter fuzzy, maka penambahan derajat keanggotaan pada setiap kriteria yang menjadi pertimbangan Andy untuk membeli mobil. Untuk desain mobil derajat keanggotannya 0.7, kriteria murah derajat keanggotannya 0.2, kriteria merk mobil sebesar 0.5, dan kriteria hemat bahan bakar sebesar 1.

Dengan demikian, himpunan lunak berparameter fuzzy F_X dapat ditulis

$$F_X = \left\{ \begin{matrix} ((e_1, 0.7), \{u_1, u_2, u_3, u_5\}), \\ ((e_2, 0.2), \{u_2, u_4\}), \\ ((e_3, 0.4), \{u_1, u_3, u_4\}), ((e_4, 1), U) \end{matrix} \right\}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Cagman et al., (2010) mengembangkan konsep baru yaitu himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy dengan definisi sebagai berikut.

DEFINISI 3.1: Misalkan U adalah suatu himpunan semesta, E adalah suatu himpunan parameter, F(U) adalah koleksi himpunan fuzzy atas U dan X adalah himpunan fuzzy atas E dengan fungsi keanggotaan $\mu_X : E \to [0, 1]$ dan $\gamma_X(e)$ himpunan fuzzy atas U untuk setiap $x \in E$. Himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy atas U ditulis Γ_X , adalah himpunan yang ditentukan oleh fungsi γ_X dengan,

$$\gamma_X : \mathrm{E} \to \mathrm{F(U)}$$

Fungsi γ_X disebut fungsi perkiraan dari Γ_X. Jadi, himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy atas U dapat dituliskan dalam himpunan pasangan terurut,

$$\Gamma_X = \left\{ \begin{matrix} ((e, \mu_X(e)), \gamma_X(e)): \\ e \in E, \gamma_X(e) \in F(U), \mu_X(e) \in [0, 1] \end{matrix} \right\}$$

Jika$\gamma_X(e)$ =U, yang artinya derajat keanggotaan pada F(U) bernilai 1.

Koleksi himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy atas U dinotasikan FPFS(U) (Cagman et al., 2010).

Berikut ini diberikan contoh himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy,

CONTOH 3.1:

Untuk contoh himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy menggabungkan contoh 2.3 dan contoh 2.4, sehingga didapatkan penambahan derajat keanggotaan pada kriteria dan mobil yang akan dipilih Andy.

Dengan demikian, himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy Γ_X dapat ditulis

$$\Gamma_X = \left\{ \begin{matrix} \left((e_1, 0.7), \left\{ \begin{matrix} (u_1, 0.9), (u_2, 0.6), \\ (u_3, 0.3), (u_5, 0.7) \end{matrix} \right\}\right), \\ ((e_2, 0.2), \{(u_2, 0.5), (u_4, 0.9)\}), \\ ((e_3, 0.4), \{(u_1, 0.2), (u_3, 0.6), (u_4, 0.4)\}), \\ \left((e_4, 1), \left\{ \begin{matrix} (u_1, 0.9), (u_2, 0.8), (u_3, 0.3), \\ (u_4, 0.1), (u_5, 0.7) \end{matrix} \right\}\right) \end{matrix} \right\}$$

DEFINISI 3.2: Misalkan $\Gamma_X \in FPFS(U)$. Jika $\gamma_X(e)$=$\emptyset$ untuk setiap $e \in E$, kemudian Γ_X dinamakan himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy kosong X, dinotasikan Γ_{Φ_X} dapat dituliskan sebagai,

$$\Gamma_{\Phi_X} = \left\{ \begin{matrix} \left(\left(e, \mu_{\Phi_X}(e)\right), \gamma_{\Phi_X}(e)\right): \\ e \in E, \gamma_{\Phi_X}(e) = \emptyset, \mu_{\Phi_X}(e) = \mu_X(e) \in [0, 1] \end{matrix} \right\}$$

Jika $X = \emptyset$, maka himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy kosong X (Γ_{Φ_X}) dinamakan himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy kosong, dinotasikan Γ_Φ dapat dituliskan sebagai,

$$\Gamma_\Phi = \left\{ \begin{matrix} ((e, \mu_\Phi(e)), \gamma_\Phi(e)): \\ e \in E, \gamma_\Phi(e) = \emptyset, \mu_\Phi(e) = 0 \end{matrix} \right\}$$

CONTOH 3.2:

Dari contoh 3.1, jika $X = \{(e_1, 0), (e_3, 0)\}$ dan $\gamma_X(e_1) = \{(u_2, 0), (u_3, 0), (u_5, 0)\}$, $\gamma_X(e_3) = \{(u_4, 0)\}$

Dengan demikian, himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy kosong X Γ_{Φ_X} dapat ditulis

$$\Gamma_{\Phi_X} = \left\{ \begin{matrix} ((e_1, 0), \{(u_2, 0), (u_3, 0), (u_5, 0)\}), \\ ((e_3, 0), \{(u_4, 0)\}) \end{matrix} \right\}$$

DEFINISI 3.3: Misalkan $\Gamma_X \in FPFS(U)$. Jika $\mu_X(e)$=1 dan $\gamma_X(e)$ =U untuk setiap $e \in E$, kemudian Γ_X dinamakan himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy semesta X, dinotasikan $\Gamma_{\tilde{E}}$.

Jika $X = E$, maka himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy semesta X dinamakan himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy semesta, dinotasikan $\Gamma_{\tilde{E}}$ dapat dituliskan sebagai,

$$\Gamma_{\tilde{E}} = \left\{ \begin{matrix} ((e, \mu_{\tilde{E}}(e)), \gamma_{\tilde{E}}(e)): \\ e \in E, \gamma_{\tilde{E}}(e) = U, \mu_{\tilde{E}}(e) = 1 \end{matrix} \right\}$$

CONTOH 3.3:

Dari contoh 3.1, jika $X = \{(e_1, 1), (e_3, 1)\}$ dan $\gamma_X(e_1) = \{(u_2, 1), (u_3, 1), (u_5, 1)\}$, $\gamma_X(e_3) = \{(u_4, 1)\}$

Dengan demikian, himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy semesta X $\Gamma_{\tilde{E}}$ dapat ditulis

$$\Gamma_{\Phi_X} = \left\{ \begin{matrix} ((e_1, 1), \{(u_2, 1), (u_3, 1), (u_5, 1)\}), \\ ((e_3, 1), \{(u_4, 1)\}) \end{matrix} \right\}$$

DEFINISI 3.4: Misalkan $\Gamma_X, \Gamma_Y \in FPFS(U)$. Kemudian, Γ_X adalah subset himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy dari Γ_Y, dinotasikan $\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_Y$, jika $\mu_X(e) \leq \mu_Y(e)$ dan $\gamma_X(e) \subseteq \gamma_Y(e)$ untuk setiap $e \in E$.

CONTOH 3.4 : Misalkan $\Gamma_X, \Gamma_Y \in FPFS(U)$

$$\Gamma_X = \left\{ \begin{matrix} ((e_1, 0.1), \{(u_1, 0.5), (u_5, 0.4)\}), \\ ((e_2, 0.2), \{(u_2, 0.5), (u_4, 0.7)\}), \\ ((e_3, 0.4), \{(u_4, 0.4)\}) \end{matrix} \right\}$$

$$\Gamma_Y = \left\{ \begin{matrix} ((e_1, 0.7), \{(u_1, 0.5), (u_5, 0.7)\}), \\ ((e_2, 0.9), \{(u_2, 0.8), (u_4, 0.7)\}), \\ ((e_3, 0.8), \{(u_4, 0.7)\}) \end{matrix} \right\}$$

Dari contoh diatas dapat dilihat, jika $\mu_X(e) \leq \mu_Y(e)$ dan $\gamma_X(e) \subseteq \gamma_Y(e)$ untuk setiap $e \in E$, menurut definisi 3.4 maka $\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_Y$.

Teorema berikut menunjukkan relasi subset dari himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy.

TEOREMA 3.1: Misalkan $\Gamma_X, \Gamma_{\Phi_X}, \Gamma_\Phi, \Gamma_{\tilde{E}}, \Gamma_Y, \Gamma_Z \in FPFS(U)$. Maka berlaku:

i. $\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_{\tilde{E}}$
ii. $\Gamma_{\Phi_X} \tilde{\subseteq} \Gamma_X$
iii. $\Gamma_\Phi \tilde{\subseteq} \Gamma_X$
iv. $\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_X$
v. Jika $\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_Y$ dan $\Gamma_Y \tilde{\subseteq} \Gamma_Z$, maka $\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_Z$

Bukti: Untuk setiap $e \in E$,

i. $$\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_{\tilde{E}} = \left\{ \begin{matrix} \left(\begin{matrix} (e, \mu_X(e) \leq \mu_{\tilde{E}}(e)) \\ , \gamma_X(e) \subseteq \gamma_{\tilde{E}}(e) \end{matrix} \right) : \\ e \in E, \gamma_X(e) \in F(U), \gamma_{\tilde{E}}(e) = U \\ , \mu_X(e) \in [0,1], \mu_{\tilde{E}}(e) = 1 \end{matrix} \right\}$$

Akan dibuktikan $\mu_X(e) \leq \mu_{\tilde{E}}(e)$ dan $\gamma_X(e) \subseteq \gamma_{\tilde{E}}(e)$

- $\mu_X(e) \in [0,1]$ berarti $0 \leq \mu_X(e) \leq 1 = \mu_{\tilde{E}}(e)$
  $\mu_X(e) \leq \mu_{\tilde{E}}(e)$……………………(1)
- $\gamma_X(e) \in F(U)$, karena $0 \leq \mu_{F(U)}(u) \leq 1 = \mu_U(u)$
  sehingga, $\mu_{F(U)}(u) \leq \mu_U(u)$
  $F(U) \subseteq$ U
  $\gamma_X(e) \subseteq \gamma_{\tilde{E}}(e)$……………………(2)

Dari persamaan (1) dan (2) terbukti bahwa $\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_{\tilde{E}}$ ■

ii. $$\Gamma_{\Phi_X} \tilde{\subseteq} \Gamma_X = \left\{ \begin{matrix} \left(\begin{matrix} (e, \mu_{\Phi_X}(e) \leq \mu_X(e)) \\ , \gamma_{\Phi_X}(e) \subseteq \gamma_X(e) \end{matrix} \right) : \\ e \in E, \gamma_{\Phi_X}(e) = \emptyset, \gamma_X(e) \in F(U) \\ , \mu_{\Phi_X}(e) = \mu_X(e) \in [0,1] \end{matrix} \right\}$$

Akan dibuktikan $\mu_{\Phi_X}(e) \leq \mu_X(e)$ dan $\gamma_{\Phi_X}(e) \subseteq \gamma_X(e)$

- $\mu_{\Phi_X}(e) \in [0,1]$ dan $\mu_X(e) \in [0,1]$ berarti $0 \leq \mu_X(e) = \mu_{\Phi_X}(e) \leq 1$
  $\mu_{\Phi_X}(e) \leq \mu_X(e)$……………………(3)
- $\gamma_X(e) \in F(U)$, karena $\mu_{\Phi_U}(u) = 0 \leq \mu_{F(U)}(u) \leq 1$
  sehingga, $\mu_{\Phi_U}(u) \leq \mu_{F(U)}(u)$
  $\Phi_U \subseteq F(U)$
  $\gamma_{\Phi_X}(e) \subseteq \gamma_X(e)$……………………(4)

Dari persamaan (3) dan (4) terbukti bahwa $\Gamma_{\Phi_X} \tilde{\subseteq} \Gamma_X$ ■

iii. $$\Gamma_\Phi \tilde{\subseteq} \Gamma_X = \left\{ \begin{matrix} \left(\begin{matrix} (e, \mu_\Phi(e) \leq \mu_X(e)) \\ , \gamma_\Phi(e) \subseteq \gamma_X(e) \end{matrix} \right) : \\ e \in E, \gamma_\Phi(e) = \emptyset, \gamma_X(e) \in F(U) \\ , \mu_\Phi(e) = 0, \mu_X(e) \in [0,1] \end{matrix} \right\}$$

Akan dibuktikan $\mu_\Phi(e) \leq \mu_X(e)$ dan $\gamma_\Phi(e) \subseteq \gamma_X(e)$

- $\mu_X(e) \in [0,1]$ berarti $\mu_\Phi(e) = 0 \leq \mu_X(e) \leq 1$
  $\mu_\Phi(e) \leq \mu_X(e)$……………………(5)
- $\gamma_X(e) \in F(U)$, karena $0 \leq \mu_{F(U)}(u) \leq 1$
  sehingga $\mu_\Phi(u) \leq \mu_{F(U)}(u)$
  $\Phi \subseteq F(U)$
  $\gamma_\Phi(e) \subseteq \gamma_X(e)$……………………(6)

Dari persamaan (5) dan (6) terbukti bahwa $\Gamma_\Phi \tilde{\subseteq} \Gamma_X$ ■

iv. $$\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_X = \left\{ \begin{matrix} \left((e, \mu_X(e) \leq \mu_X(e)), \gamma_X(e) \subseteq \gamma_X(e) \right) : \\ e \in E, \gamma_X(e) \in F(U), \mu_X(e) \in [0,1] \end{matrix} \right\}$$

Akan dibuktikan $\mu_X(e) \leq \mu_X(e)$ dan $\gamma_X(e) \subseteq \gamma_X(e)$

- $\mu_X(e) \in [0,1]$ berarti $0 \leq \mu_X(e) \leq 1$
  $\mu_X(e) \leq \mu_X(e)$……………………(7)
- $\gamma_X(e) \in F(U)$, karena $0 \leq \mu_{F(U)}(u) \leq 1$
  $\gamma_X(e) \subseteq \gamma_X(e)$……………………(8)

Dari persamaan (7) dan (8) terbukti bahwa $\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_X$ ■

v. $$\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_Y = \left\{ \begin{matrix} \left((e, \mu_X(e) \leq \mu_Y(e)), \gamma_X(e) \subseteq \gamma_Y(e) \right) : \\ e \in E, \gamma_X(e) = \gamma_Y(e) \in F(U) \\ , \mu_X(e) = \mu_Y(e) \in [0,1] \end{matrix} \right\}$$

$$\Gamma_Y \tilde{\subseteq} \Gamma_Z = \left\{ \begin{matrix} \left((e, \mu_Y(e) \leq \mu_Z(e)), \gamma_Y(e) \subseteq \gamma_Z(e) \right) : \\ e \in E, \gamma_Y(e) = \gamma_Z(e) \in F(U) \\ , \mu_Y(e) = \mu_Z(e) \in [0,1] \end{matrix} \right\}$$

Akan dibuktikan $\mu_X(e) \leq \mu_Y(e) \leq \mu_Z(e)$ dan $\gamma_X(e) \subseteq \gamma_Y(e) \subseteq \gamma_Z(e)$

- $\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_Y$ berarti,
  $\mu_X(e) \leq \mu_Y(e)$ dan $\gamma_X(e) \subseteq \gamma_Y(e)$…….(9)
- $\Gamma_Y \tilde{\subseteq} \Gamma_Z$, berarti
  $\mu_Y(e) \leq \mu_Z(e)$ dan $\gamma_Y(e) \subseteq \gamma_Z(e)$……(10)

Dari persamaan (9) dan (10) didapatkan $\mu_X(e) \leq \mu_Z(e)$ dan $\gamma_X(e) \subseteq \gamma_Z(e)$ sehingga terbukti bahwa Jika $\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_Y$ dan $\Gamma_Y \tilde{\subseteq} \Gamma_Z$, maka $\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_Z$ ■

Berikut ini salah satu contoh dari teorema 3.1.

CONTOH 3.5:

Misalkan $\Gamma_X, \Gamma_{\tilde{E}} \in FPFS(U)$

$\Gamma_X = \{((e_2, 0.2), \{(u_1, 0.5)\})\}$

$\Gamma_{\tilde{E}} = \{((e_2, 1), \{(u_1, 1)\})\}$

Dikatakan $\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_{\tilde{E}}$, jika $\mu_X(e) \leq \mu_{\tilde{E}}(e)$ dan $\gamma_X(e) \subseteq \gamma_{\tilde{E}}(e)$

$\mu_X(e) \leq \mu_{\tilde{E}}(e) = 0.2 \leq 1$

dan

$\gamma_X(e) \subseteq \gamma_{\tilde{E}}(e) = 0.5 \subseteq 1$

Dari contoh diatas berlaku teorema $\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_{\tilde{E}}$.

DEFINISI 3.5: Misalkan $\Gamma_X, \Gamma_Y \in FPFS(U)$. Γ_X dan Γ_Y himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy yang sama, dituliskan $\Gamma_X = \Gamma_Y$, jika $\mu_X(e) = \mu_Y(e)$ dan $\gamma_X(e) = \gamma_Y(e)$ untuk setiap $e \in E$.

CONTOH 3.6: Misalkan $\Gamma_X, \Gamma_Y \in FPFS(U)$

$$\Gamma_X = \left\{ \begin{matrix} ((e_1, 0.7), \{(u_1, 0.9), (u_5, 0.7)\}), \\ ((e_2, 0.2), \{(u_2, 0.5), (u_4, 0.9)\}), \\ ((e_3, 0.4), \{(u_4, 0.4)\}) \end{matrix} \right\}$$

$$\Gamma_Y = \left\{ \begin{matrix} ((e_1, 0.7), \{(u_1, 0.9), (u_5, 0.7)\}), \\ ((e_2, 0.2), \{(u_2, 0.5), (u_4, 0.9)\}), \\ ((e_3, 0.4), \{(u_4, 0.4)\}) \end{matrix} \right\}$$

Dari contoh diatas dapat dilihat, jika $\mu_X(e) = \mu_Y(e)$ dan $\gamma_X(e) = \gamma_Y(e)$, menurut definisi 3.5 maka $\Gamma_X = \Gamma_Y$.

Teorema berikut membuktikan bahwa relasi subset dan "=" pada himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy memenuhi sifat transitif.

TEOREMA 3.2: Misalkan $\Gamma_X, \Gamma_Y, \Gamma_Z \in FPFS(U)$.

i. Jika $\Gamma_X = \Gamma_Y$ dan $\Gamma_Y = \Gamma_Z$, maka $\Gamma_X = \Gamma_Z$

ii. Jika $\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_Y$ dan $\Gamma_Y \tilde{\subseteq} \Gamma_X$, maka $\Gamma_X = \Gamma_Y$

Bukti:

i. $$(\Gamma_X = \Gamma_Y) = \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} (e, \mu_X(e) = \mu_Y(e)) \\ , \gamma_X(e) = \gamma_Y(e) \end{pmatrix}: \\ e \in E, \gamma_X(e) = \gamma_Y(e) \in F(U) \\ , \mu_X(e) = \mu_Y(e) \in [0,1] \end{matrix} \right\}$$

$$(\Gamma_Y = \Gamma_Z) = \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} (e, \mu_Y(e) = \mu_X(e)) \\ , \gamma_Y(e) = \gamma_X(e) \end{pmatrix}: \\ e \in E, \gamma_Y(e) = \gamma_X(e) \in F(U) \\ , \mu_Y(e) = \mu_X(e) \in [0,1] \end{matrix} \right\}$$

- $\Gamma_X = \Gamma_Y$ berarti,
  $\mu_X(e) = \mu_Y(e)$ dan $\gamma_X(e) = \gamma_Y(e)$.......(11)
- $\Gamma_Y = \Gamma_Z$, berarti
  $\mu_Y(e) = \mu_Z(e)$ dan $\gamma_Y(e) = \gamma_Z(e)$......(12)

Dari persamaan (11) dan (12) didapatkan $\mu_X(e) = \mu_Z(e)$ dan $\gamma_X(e) = \gamma_Z(e)$ sehingga terbukti bahwa jika $\Gamma_X = \Gamma_Y$ dan $\Gamma_Y = \Gamma_Z$, maka $\Gamma_X = \Gamma_Z$ ■

ii. $$\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_Y = \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} (e, \mu_X(e) \leq \mu_Y(e)) \\ , \gamma_X(e) \subseteq \gamma_Y(e) \end{pmatrix}: \\ e \in E, \gamma_X(e) = \gamma_Y(e) \in F(U) \\ , \mu_X(e) = \mu_Y(e) \in [0,1] \end{matrix} \right\}$$

$$\Gamma_Y \tilde{\subseteq} \Gamma_X = \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} (e, \mu_Y(e) \leq \mu_X(e)) \\ , \gamma_Y(e) \subseteq \gamma_X(e) \end{pmatrix}: \\ e \in E, \gamma_Y(e) = \gamma_X(e) \in F(U) \\ , \mu_Y(e) = \mu_X(e) \in [0,1] \end{matrix} \right\}$$

- $\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_Y$ berarti,
  $\mu_X(e) \leq \mu_Y(e)$ dan $\gamma_X(e) \subseteq \gamma_Y(e)$
  Dari $\mu_X(e) \leq \mu_Y(e)$ memiliki 2 kemungkinan, $\mu_X(e) < \mu_Y(e)$ atau $\mu_X(e) = \mu_Y(e)$. Sama halnya untuk $\gamma_X(e) \subseteq \gamma_Y(e)$. Sehingga berlaku sebaliknya $\Gamma_Y \tilde{\subseteq} \Gamma_X$.

Dari persamaan diatas didapatkan $\mu_X(e) = \mu_Y(e)$ dan $\gamma_X(e) = \gamma_Y(e)$ sehingga menurut definisi 3.5 terbukti bahwa jika $\Gamma_X \tilde{\subseteq} \Gamma_Y$ dan $\Gamma_Y \tilde{\subseteq} \Gamma_X$, maka $\Gamma_X = \Gamma_Y$ ■

DEFINISI 3.6: Misalkan $\Gamma_X \in FPFS(U)$. Kemudian, komplemen dari Γ_X, dinotasikan $\Gamma_X^{\tilde{c}}$, didefinisikan sebagai,

$$\mu_{X^c}(e) = 1 - \mu_X(e) \text{ dan } \gamma_{X^{\tilde{c}}}(e) = \gamma_X^c\,(e)$$

untuk setiap $e \in E$, dimana γ_X^c (e) adalah komplemen dari himpunan $\gamma_X(e)$, sehingga $\gamma_X^c(e) = U \backslash \gamma_X(e)$ untuk setiap $e \in E$.

CONTOH 3.7 : Misalkan $\Gamma_X \in FPFS(U)$

$$\Gamma_X = \left\{ \begin{matrix} ((e_1, 0.7), \{(u_1, 0.9), (u_5, 0.7)\}), \\ ((e_2, 0.2), \{(u_2, 0.5), (u_4, 0.9)\}), \\ ((e_3, 0.4), \{(u_4, 0.4)\}) \end{matrix} \right\}$$

Menurut definisi 3.6, didapatkan komplemen dari Γ_X yaitu,

$$\Gamma_X^{\tilde{c}} = \left\{ \begin{matrix} ((e_1, 1-0.7), \{(u_1, 0.9), (u_5, 0.7)\}), \\ ((e_2, 1-0.2), \{(u_2, 0.5), (u_4, 0.9)\}), \\ ((e_3, 1-0.4), \{(u_4, 0.4)\}) \end{matrix} \right\}$$

$$\Gamma_X^{\tilde{c}} = \left\{ \begin{matrix} ((e_1, 0.3), \{(u_1, 0.9), (u_5, 0.7)\}), \\ ((e_2, 0.8), \{(u_2, 0.5), (u_4, 0.9)\}), \\ ((e_3, 0.6), \{(u_4, 0.4)\}) \end{matrix} \right\}$$

Teorema berikut menunjukkan operasi komplemen dari himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy.

TEOREMA 3.3: Misalkan $\Gamma_X, \Gamma_\Phi, \Gamma_{\tilde{E}} \in FPFS(U)$. Kemudian,

i. $\left(\Gamma_X^{\tilde{c}}\right)^{\tilde{c}} = \Gamma_X$

ii. $\Gamma_\Phi^{\tilde{c}} = \Gamma_{\tilde{E}}$

Bukti:

i. $$\left(\Gamma_X^{\tilde{c}}\right)^{\tilde{c}} = \left\{ \begin{matrix} \left((e, (\mu_{X^c}(e))^c), (\gamma_X^c(e))^c\right): \\ e \in E, \gamma_X(e) \in F(U), \mu_X(e) \in [0,1] \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} (\mu_{X^c}(e))^c &= (1 - \mu_X(e))^c \\ &= 1 - \mu_{X^c}(e) \\ &= 1 - (1 - \mu_X(e)) \\ &= \mu_X(e) \text{..................(13)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\gamma_X^c(e))^c &= U \backslash (U \backslash \gamma_X(e)) \\ &= \gamma_X(e) \text{.....................(14)} \end{aligned}$$

Dari persamaan (13) dan (14) terbukti bahwa $\left(\Gamma_X^{\tilde{c}}\right)^{\tilde{c}} = \Gamma_X$ ■

ii. $$\Gamma_\Phi^{\tilde{c}} = \left\{ \begin{matrix} ((e, \mu_\Phi(e)^c), \gamma_\Phi^c(e)): \\ e \in E, \gamma_\Phi(e) = \emptyset, \mu_\Phi(e) = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} \mu_\Phi(e)^c &= 1 - \mu_\Phi(e) \\ &= 1-0 \\ &= 1 = \mu_{\tilde{E}}(e) \text{..................(15)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_\Phi^c(e) &= U \backslash \gamma_\Phi(e) \\ &= U \backslash \emptyset \\ &= U = \gamma_{\tilde{E}}(e) \text{....................(16)} \end{aligned}$$

Dari persamaan (15) dan (16) terbukti bahwa $\Gamma_\Phi^{\tilde{c}} = \Gamma_{\tilde{E}}$ ■

DEFINISI 3.7: Misalkan $\Gamma_X, \Gamma_Y \in FPFS(U)$. Kemudian, gabungan dari Γ_X dan Γ_Y dinotasikan $\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_Y$, didefinisikan sebagai

$$\Gamma_X \,\tilde{\cup}\, \Gamma_Y = \left\{ \begin{array}{c} \big((e, \mu_{X\tilde{\cup}Y}(e)), \gamma_{X\tilde{\cup}Y}(e)\big): \\ e \in E, \gamma_{X\tilde{\cup}Y}(e) = \gamma_X(e) \cup \gamma_Y(e) \\ , \mu_{X\tilde{\cup}Y}(e) \ = \max\{\mu_X(e), \mu_Y(e)\} \end{array} \right\}$$

CONTOH 3.8: Misalkan $\Gamma_X, \Gamma_Y \in FPFS(U)$

$$\Gamma_X = \left\{ \begin{array}{c} \big((e_1, 0.7), \{(u_1, 0.9), (u_5, 0.7)\}\big), \\ \big((e_2, 0.2), \{(u_2, 0.5), (u_4, 0.9)\}\big), \\ \big((e_3, 0.4), \{(u_4, 0.4)\}\big) \end{array} \right\}$$

$$\Gamma_Y = \left\{ \begin{array}{c} \big((e_1, 0.1), \{(u_1, 0.5), (u_5, 0.4)\}\big), \\ \big((e_2, 0.9), \{(u_2, 0.8), (u_4, 0.7)\}\big), \\ \big((e_3, 0.8), \{(u_4, 0.7)\}\big) \end{array} \right\}$$

Menurut definisi 3.7, didapatkan gabungan dari Γ_X dan Γ_Y yaitu,

$$\Gamma_X \,\tilde{\cup}\, \Gamma_Y = \left\{ \begin{array}{c} \big((e_1, 0.7), \{(u_1, 0.9), (u_5, 0.7)\}\big), \\ \big((e_2, 0.9), \{(u_2, 0.8), (u_4, 0.9)\}\big), \\ \big((e_3, 0.8), \{(u_4, 0.7)\}\big) \end{array} \right\}$$

Teorema berikut menunjukkan operasi gabungan dari himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy.

TEOREMA 3.4: Misalkan $\Gamma_X, \Gamma_{\Phi_X}, \Gamma_\Phi, \Gamma_{\tilde{E}}, \Gamma_Y, \Gamma_Z \in FPFS(U)$. Maka,

i. $\Gamma_X \,\tilde{\cup}\, \Gamma_X = \Gamma_X$
ii. $\Gamma_{\Phi_X} \,\tilde{\cup}\, \Gamma_X = \Gamma_X$
iii. $\Gamma_X \,\tilde{\cup}\, \Gamma_\Phi = \Gamma_X$
iv. $\Gamma_X \,\tilde{\cup}\, \Gamma_{\tilde{E}} = \Gamma_{\tilde{E}}$
v. $\Gamma_X \,\tilde{\cup}\, \Gamma_Y = \Gamma_Y \,\tilde{\cup}\, \Gamma_X$
vi. $(\Gamma_X \,\tilde{\cup}\, \Gamma_Y) \,\tilde{\cup}\, \Gamma_Z = \Gamma_X \,\tilde{\cup}\, (\Gamma_Y \,\tilde{\cup}\, \Gamma_Z)$

Bukti: Misalkan $\Gamma_X, \Gamma_{\Phi_X}, \Gamma_\Phi, \Gamma_{\tilde{E}}, \Gamma_Y, \Gamma_Z \in FPFS(U)$. Maka,

i. $$\Gamma_X \,\tilde{\cup}\, \Gamma_X = \left\{ \begin{array}{c} \big((e, \mu_{X\tilde{\cup}X}(e)), \gamma_{X\tilde{\cup}X}(e)\big): \\ e \in E, \gamma_{X\tilde{\cup}X}(e) = \gamma_X(e) \cup \gamma_X(e) \\ , \mu_{X\tilde{\cup}X}(e) \ = \max\{\mu_X(e), \mu_X(e)\} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \mu_{X\tilde{\cup}X}(e) &= \max\{\mu_X(e), \mu_X(e)\} \\ &= \mu_X(e) \\ \gamma_{X\tilde{\cup}X}(e) &= \gamma_X(e) \cup \gamma_X(e) \\ &= \gamma_X(e) \end{aligned}$$

$$\Gamma_X \,\tilde{\cup}\, \Gamma_X = \left\{ \begin{array}{c} \big((e, \mu_X(e)), \gamma_X(e)\big): \\ e \in E, \gamma_X(e) \in F(U), \mu_X(e) \in [0, 1] \end{array} \right\}$$

Terbukti bahwa $\Gamma_X \,\tilde{\cup}\, \Gamma_X = \Gamma_X$ ■

ii. $$\Gamma_{\Phi_X} \,\tilde{\cup}\, \Gamma_X = \left\{ \begin{array}{c} \big((e, \mu_{\Phi_X\tilde{\cup}X}(e)), \gamma_{\Phi_X\tilde{\cup}X}(e)\big): \\ e \in E, \gamma_{\Phi_X\tilde{\cup}X}(e) = \gamma_{\Phi_X}(e) \cup \gamma_X(e) \\ , \mu_{\Phi_X\tilde{\cup}X}(e) \ = \max\{\mu_{\Phi_X}(e), \mu_X(e)\} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\Phi_X\tilde{\cup}X}(e) &= \max\{\mu_{\Phi_X}(e), \mu_X(e)\} \\ &= \max\{\mu_X(e), \mu_X(e)\} \\ &= \mu_X(e) \\ \gamma_{\Phi_X\tilde{\cup}X}(e) &= \gamma_{\Phi_X}(e) \cup \gamma_X(e) \\ &= \emptyset \cup \gamma_X(e) \\ &= \gamma_X(e) \end{aligned}$$

$$\Gamma_{\Phi_X} \,\tilde{\cup}\, \Gamma_X = \left\{ \begin{array}{c} \big((e, \mu_X(e)), \gamma_X(e)\big): \\ e \in E, \gamma_X(e) \in F(U), \mu_X(e) \in [0, 1] \end{array} \right\}$$

Terbukti bahwa $\Gamma_{\Phi_X} \,\tilde{\cup}\, \Gamma_X = \Gamma_X$ ■

iii. $$\Gamma_X \,\tilde{\cup}\, \Gamma_\Phi = \left\{ \begin{array}{c} \big((e, \mu_{X\tilde{\cup}\Phi}(e)), \gamma_{X\tilde{\cup}\Phi}(e)\big): \\ e \in E, \gamma_{X\tilde{\cup}\Phi}(e) = \gamma_X(e) \cup \gamma_\Phi(e) \\ , \mu_{X\tilde{\cup}\Phi}(e) \ = \max\{\mu_X(e), \mu_\Phi(e)\} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \mu_{X\tilde{\cup}\Phi}(e) &= \max\{\mu_X(e), \mu_\Phi(e)\} \\ &= \max\{\mu_X(e), 0\} \\ &= \mu_X(e) \\ \gamma_{X\tilde{\cup}\Phi}(e) &= \gamma_X(e) \cup \gamma_\Phi(e) \\ &= \gamma_X(e) \cup \emptyset \\ &= \gamma_X(e) \end{aligned}$$

$$\Gamma_X \,\tilde{\cup}\, \Gamma_\Phi = \left\{ \begin{array}{c} \big((e, \mu_X(e)), \gamma_X(e)\big): \\ e \in E, \gamma_X(e) \in F(U), \mu_X(e) \in [0, 1] \end{array} \right\}$$

Terbukti bahwa $\Gamma_X \,\tilde{\cup}\, \Gamma_\Phi = \Gamma_X$ ■

iv. $$\Gamma_X \,\tilde{\cup}\, \Gamma_{\tilde{E}} = \left\{ \begin{array}{c} \big((e, \mu_{X\tilde{\cup}\tilde{E}}(e)), \gamma_{X\tilde{\cup}\tilde{E}}(e)\big): \\ e \in E, \gamma_{X\tilde{\cup}\tilde{E}}(e) = \gamma_X(e) \cup \gamma_{\tilde{E}}(e) \\ , \mu_{X\tilde{\cup}\tilde{E}}(e) \ = \max\{\mu_X(e), \mu_{\tilde{E}}(e)\} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \mu_{X\tilde{\cup}\tilde{E}}(e) &= \max\{\mu_X(e), \mu_{\tilde{E}}(e)\} \\ &= \max\{\mu_X(e), 1\} \\ &= 1 \ = \mu_{\tilde{E}}(e) \\ \gamma_{X\tilde{\cup}\tilde{E}}(e) &= \gamma_X(e) \cup \gamma_{\tilde{E}}(e) \\ &= \gamma_X(e) \cup U \\ &= U = \gamma_{\tilde{E}}(e) \end{aligned}$$

$$\Gamma_X \,\tilde{\cup}\, \Gamma_{\tilde{E}} = \left\{ \begin{array}{c} \big((e, \mu_{\tilde{E}}(e)), \gamma_{\tilde{E}}(e)\big): \\ e \in E, \gamma_{\tilde{E}}(e) = U, \mu_{\tilde{E}}(e) = 1 \end{array} \right\}$$

Terbukti bahwa $\Gamma_X \,\tilde{\cup}\, \Gamma_{\tilde{E}} = \Gamma_{\tilde{E}}$ ■

v. $$\Gamma_X \,\tilde{\cup}\, \Gamma_Y = \left\{ \begin{array}{c} \big((e, \mu_{X\tilde{\cup}Y}(e)), \gamma_{X\tilde{\cup}Y}(e)\big): \\ e \in E, \gamma_{X\tilde{\cup}Y}(e) = \gamma_X(e) \cup \gamma_Y(e) \\ , \mu_{X\tilde{\cup}Y}(e) \ = \max\{\mu_X(e), \mu_Y(e)\} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \mu_{X\tilde{\cup}Y}(e) &= \max\{\mu_X(e), \mu_Y(e)\} \\ &= \max\{\mu_Y(e), \mu_X(e)\} \\ &= \mu_{Y\tilde{\cup}X}(e) \\ \gamma_{X\tilde{\cup}Y}(e) &= \gamma_X(e) \cup \gamma_Y(e) \\ &= \gamma_Y(e) \cup \gamma_X(e) \\ &= \gamma_{Y\tilde{\cup}X}(e) \end{aligned}$$

$$\Gamma_Y \,\tilde{\cup}\, \Gamma_X = \left\{ \begin{array}{c} \big((e, \mu_{Y\tilde{\cup}X}(e)), \gamma_{Y\tilde{\cup}X}(e)\big): \\ e \in E, \gamma_{Y\tilde{\cup}X} = \gamma_Y(e) \cup \gamma_X(e) \\ , \mu_{Y\tilde{\cup}X}(e) \ = \max\{\mu_Y(e), \mu_X(e)\} \end{array} \right\}$$

Pada teorema ini berlaku sifat komutatif terhadap operasi gabungan, jadi terbukti $\Gamma_X \,\tilde{\cup}\, \Gamma_Y = \Gamma_Y \,\tilde{\cup}\, \Gamma_X$ ■

vi. $(\Gamma_X \,\tilde{\cup}\, \Gamma_Y) \,\tilde{\cup}\, \Gamma_Z =$

$$\left\{ \begin{array}{c} \big((e, \mu_{(X\tilde{\cup}Y)\tilde{\cup}Z}(e)), \gamma_{(X\tilde{\cup}Y)\tilde{\cup}Z}(e)\big): \\ e \in E, \gamma_{(X\tilde{\cup}Y)\tilde{\cup}Z}(e) = \big(\gamma_X(e) \cup \gamma_Y(e)\big) \cup \gamma_Z(e) \\ , \mu_{(X\tilde{\cup}Y)\tilde{\cup}Z}(e) \ = \max\{\max\{\mu_X(e), \mu_Y(e)\}, \mu_z(e)\} \end{array} \right\}$$

$$\mu_{(X\tilde{\cup}Y)\tilde{\cup}Z}(e) = \max\{\max\{\mu_X(e), \mu_Y(e)\}, \mu_z(e)\}$$

$$= \max\{\mu_X(e), \max\{\mu_Y(e), \mu_z(e)\}\}$$

$$\gamma_{(X\tilde{\cup}Y)\tilde{\cup}Z}(e) = \left(\gamma_X(e) \cup \gamma_Y(e)\right) \cup \gamma_Z(e)$$

$$= \gamma_X(e) \cup \left(\gamma_Y(e) \cup \gamma_Z(e)\right)$$

$\Gamma_X \tilde{\cup} (\Gamma_Y \tilde{\cup} \Gamma_Z)$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \left(\left(e, \mu_{(X\tilde{\cup}Y)\tilde{\cup}Z}(e)\right), \gamma_{(X\tilde{\cup}Y)\tilde{\cup}Z}(e)\right): \\ e \in E, \gamma_{X\tilde{\cup}(Y\tilde{\cup}Z)}(e) = \gamma_X(e) \cup \left(\gamma_Y(e) \cup \gamma_Z(e)\right) \\ , \mu_{X\tilde{\cup}(Y\tilde{\cup}Z)}(e) = \max\{\mu_X(e), \max\{\mu_Y(e), \mu_z(e)\}\} \end{array} \right\}$$

Pada teorema ini berlaku sifat asosiatif terhadap operasi gabungan, jadi terbukti $(\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_Y) \tilde{\cup} \Gamma_Z = \Gamma_X \tilde{\cup} (\Gamma_Y \tilde{\cup} \Gamma_Z)$ ■

Berikut ini salah satu contoh dari teorema 3.4.

CONTOH 3.9:

Misalkan $\Gamma_X \in FPFS(U)$,

$\Gamma_X = \{((e_2, 0.2), \{(u_1, 0.5)\})\}$

$\mu_{X\tilde{\cup}X}(e_2) = \max\{\mu_X(e_2), \mu_X(e_2)\}$

$= \max\{0.2, 0.2\}$

$= 0.2$

$\gamma_{X\tilde{\cup}X}(e_2) = \gamma_X(e_2) \cup \gamma_X(e_2)$

$= 0.5 \cup 0.5$

$= 0.5$

$\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_X = \{((e_2, 0.2), \{(u_1, 0.5)\})\}$

DEFINISI 3.8: Misalkan $\Gamma_X, \Gamma_Y \in FPFS(U)$. Kemudian, irisan dari Γ_X dan Γ_Y dinotasikan $\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Y$, didefinisikan sebagai

$$\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Y = \left\{ \begin{array}{c} \left((e, \mu_{X\tilde{\cap}Y}(e)), \gamma_{X\tilde{\cap}Y}(e)\right): \\ e \in E, \gamma_{X\tilde{\cap}Y}(e) = \gamma_X(e) \cap \gamma_Y(e) \\ , \mu_{X\tilde{\cap}X}(e) = \min\{\mu_X(e), \mu_Y(e)\} \end{array} \right\}$$

CONTOH 3.10: Misalkan $\Gamma_X, \Gamma_Y \in FPFS(U)$

$$\Gamma_X = \left\{ \begin{array}{c} ((e_1, 0.7), \{(u_1, 0.9), (u_5, 0.7)\}), \\ ((e_2, 0.2), \{(u_2, 0.5), (u_4, 0.9)\}), \\ ((e_3, 0.4), \{(u_4, 0.4)\}) \end{array} \right\}$$

$$\Gamma_Y = \left\{ \begin{array}{c} ((e_1, 0.1), \{(u_1, 0.5), (u_5, 0.4)\}), \\ ((e_2, 0.9), \{(u_2, 0.8), (u_4, 0.7)\}), \\ ((e_3, 0.8), \{(u_4, 0.7)\}) \end{array} \right\}$$

Menurut definisi 3.8, didapatkan irisan dari Γ_X dan Γ_Y yaitu,

$$\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_Y = \left\{ \begin{array}{c} ((e_1, 0.1), \{(u_1, 0.5), (u_5, 0.4)\}), \\ ((e_2, 0.2), \{(u_2, 0.5), (u_4, 0.7)\}), \\ ((e_3, 0.4), \{(u_4, 0.4)\}) \end{array} \right\}$$

Teorema berikut menunjukkan operasi irisan dari himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy.

TEOREMA 3.5:

i. $\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_X = \Gamma_X$
ii. $\Gamma_{\Phi_X} \tilde{\cap} \Gamma_X = \Gamma_{\Phi_X}$
iii. $\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_\Phi = \Gamma_\Phi$
iv. $\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_{\tilde{E}} = \Gamma_X$
v. $\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Y = \Gamma_Y \tilde{\cap} \Gamma_X$
vi. $(\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Y) \tilde{\cap} \Gamma_Z = \Gamma_X \tilde{\cap} (\Gamma_Y \tilde{\cap} \Gamma_Z)$

Bukti: Misalkan $\Gamma_X, \Gamma_{\Phi_X}, \Gamma_\Phi, \Gamma_{\tilde{E}}, \Gamma_Y, \Gamma_Z \in FPFS(U)$. Maka,

i. $$\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_X = \left\{ \begin{array}{c} \left((e, \mu_{X\tilde{\cap}X}(e)), \gamma_{X\tilde{\cap}X}(e)\right): \\ e \in E, \gamma_{X\tilde{\cap}X}(e) = \gamma_X(e) \cap \gamma_X(e) \\ , \mu_{X\tilde{\cap}X}(e) = \min\{\mu_X(e), \mu_X(e)\} \end{array} \right\}$$

$\mu_{X\tilde{\cap}X}(e) = \min\{\mu_X(e), \mu_X(e)\}$

$= \mu_X(e)$

$\gamma_{X\tilde{\cap}X}(e) = \gamma_X(e) \cap \gamma_X(e)$

$= \gamma_X(e)$

$$\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_X = \left\{ \begin{array}{c} \left((e, \mu_X(e)), \gamma_X(e)\right): \\ e \in E, \gamma_X(e) \in F(U), \mu_X(e) \in [0,1] \end{array} \right\}$$

Terbukti bahwa $\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_X = \Gamma_X$ ■

ii. $$\Gamma_{\Phi_X} \tilde{\cap} \Gamma_X = \left\{ \begin{array}{c} \left(\left(e, \mu_{\Phi_X\tilde{\cap}X}(e)\right), \gamma_{\Phi_X\tilde{\cap}X}(e)\right): \\ e \in E, \gamma_{\Phi_X\tilde{\cap}X}(e) = \gamma_{\Phi_X}(e) \cap \gamma_X(e) \\ , \mu_{\Phi_X\tilde{\cap}X}(e) = \min\{\mu_{\Phi_X}(e), \mu_X(e)\} \end{array} \right\}$$

$\mu_{\Phi_X\tilde{\cap}X}(e) = \min\{\mu_{\Phi_X}(e), \mu_{\Phi_X}(e)\}$

$= \mu_{\Phi_X}(e)$

$\gamma_{\Phi_X\tilde{\cap}X}(e) = \gamma_{\Phi_X}(e) \cap \gamma_X(e)$

$= \Phi \cap \gamma_X(e)$

$= \Phi = \gamma_{\Phi_X}(e)$

$$\Gamma_{\Phi_X} \tilde{\cap} \Gamma_X = \left\{ \begin{array}{c} \left(\left(e, \mu_{\Phi_X}(e)\right), \gamma_{\Phi_X}(e)\right): \\ e \in E, \gamma_{\Phi_X}(e) = \emptyset, \mu_{\Phi_X}(e) \in [0,1] \end{array} \right\}$$

Terbukti bahwa $\Gamma_{\Phi_X} \tilde{\cap} \Gamma_X = \Gamma_{\Phi_X}$ ■

iii. $$\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_\Phi = \left\{ \begin{array}{c} \left((e, \mu_{X\tilde{\cap}\Phi}(e)), \gamma_{X\tilde{\cap}\Phi}(e)\right): \\ e \in E, \gamma_{X\tilde{\cap}\Phi}(e) = \gamma_X(e) \cap \gamma_\Phi(e) \\ , \mu_{X\tilde{\cap}\Phi}(e) = \min\{\mu_X(e), \mu_\Phi(e)\} \end{array} \right\}$$

$\mu_{X\tilde{\cap}\Phi}(e) = \min\{\mu_X(e), \mu_\Phi(e)\}$

$= \min\{\mu_X(e), 0\}$

$= 0 = \mu_\Phi(e)$

$\gamma_{X\tilde{\cap}\Phi}(e) = \gamma_X(e) \cap \gamma_\Phi(e)$

$= \gamma_X(e) \cap \Phi$

$= \Phi = \gamma_\Phi(e)$

$$\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_\Phi = \left\{ \begin{array}{c} \left((e, \mu_\Phi(e)), \gamma_\Phi(e)\right): \\ e \in E, \gamma_\Phi(e) = \emptyset, \mu_\Phi(e) = 0 \end{array} \right\}$$

Terbukti bahwa $\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_\Phi = \Gamma_\Phi$ ■

iv. $$\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_{\tilde{E}} = \left\{ \begin{array}{c} \left((e, \mu_{X\tilde{\cap}\tilde{E}}(e)), \gamma_{X\tilde{\cap}\tilde{E}}(e)\right): \\ e \in E, \gamma_{X\tilde{\cap}\tilde{E}}(e) = \gamma_X(e) \cap \gamma_{\tilde{E}}(e) \\ , \mu_{X\tilde{\cap}\tilde{E}}(e) = \min\{\mu_X(e), \mu_{\tilde{E}}(e)\} \end{array} \right\}$$

$\mu_{X\tilde{\cap}\tilde{E}}(e) = \min\{\mu_X(e), \mu_{\tilde{E}}(e)\}$

$= \min\{\mu_X(e), 1\}$

$= \mu_X(e)$

$\gamma_{X\tilde{\cap}\tilde{E}}(e) = \gamma_X(e) \cap \gamma_{\tilde{E}}(e)$

$= \gamma_X(e) \cap U$

$= \gamma_X(e)$

$$\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_{\tilde{E}} = \left\{ \begin{matrix} \big((e, \mu_X(e)), \gamma_X(e)\big): \\ e \in E, \gamma_X(e) \in F(U), \mu_X(e) \in [0,1] \end{matrix} \right\}$$

Terbukti bahwa $\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_{\tilde{E}} = \Gamma_X$ ■

v. $$\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Y = \left\{ \begin{matrix} \big((e, \mu_{X\tilde{\cap}Y}(e)), \gamma_{X\tilde{\cap}Y}(e)\big): \\ e \in E, \gamma_{X\tilde{\cap}Y}(e) = \gamma_X(e) \cap \gamma_Y(e) \\ , \mu_{X\tilde{\cap}Y}(e) = \min\{\mu_X(e), \mu_Y(e)\} \end{matrix} \right\}$$

$\mu_{X\tilde{\cap}Y}(e) = \min\{\mu_X(e), \mu_Y(e)\}$

$= \min\{\mu_Y(e), \mu_X(e)\}$

$\gamma_{X\tilde{\cap}Y}(e) = \gamma_X(e) \cap \gamma_Y(e)$

$= \gamma_Y(e) \cap \gamma_X(e)$

$$\Gamma_Y \tilde{\cap} \Gamma_X = \left\{ \begin{matrix} \big((e, \mu_{Y\tilde{\cap}X}(e)), \gamma_{Y\tilde{\cap}X}(e)\big): \\ e \in E, \gamma_{Y\tilde{\cap}X}(e) = \gamma_Y(e) \cap \gamma_X(e) \\ , \mu_{Y\tilde{\cap}X}(e) = \min\{\mu_Y(e), \mu_X(e)\} \end{matrix} \right\}$$

Pada teorema ini berlaku sifat komutatif terhadap operasi irisan, jadi terbukti $\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Y = \Gamma_Y \tilde{\cap} \Gamma_X$ ■

vi. $(\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Y) \tilde{\cap} \Gamma_Z =$

$$\left\{ \begin{matrix} \Big(\big(e, \mu_{(X\tilde{\cap}Y)\tilde{\cap}Z}(e)\big), \gamma_{(X\tilde{\cap}Y)\tilde{\cap}Z}(e)\Big): \\ e \in E, \gamma_{(X\tilde{\cap}Y)\tilde{\cap}Z}(e) = \big(\gamma_X(e) \cap \gamma_Y(e)\big) \cap \gamma_Z(e) \\ , \mu_{(X\tilde{\cap}Y)\tilde{\cap}Z}(e) = \min\{\min\{\mu_X(e), \mu_Y(e)\}, \mu_z(e)\} \end{matrix} \right\}$$

$\mu_{(X\tilde{\cap}Y)\tilde{\cap}Z}(e) = \min\{\min\{\mu_X(e), \mu_Y(e)\}, \mu_z(e)\}$

$= \min\{\mu_X(e), \min\{\mu_Y(e), \mu_z(e)\}\}$

$\gamma_{(X\tilde{\cap}Y)\tilde{\cap}Z}(e) = \big(\gamma_X(e) \cap \gamma_Y(e)\big) \cap \gamma_Z(e)$

$= \gamma_X(e) \cap \big(\gamma_Y(e) \cap \gamma_Z(e)\big)$

$\Gamma_X \tilde{\cap} (\Gamma_Y \tilde{\cap} \Gamma_Z)$

$$= \left\{ \begin{matrix} \Big(\big(e, \mu_{(X\tilde{\cap}Y)\tilde{\cap}Z}(e)\big), \gamma_{(X\tilde{\cap}Y)\tilde{\cap}Z}(e)\Big): \\ e \in E, \gamma_{(X\tilde{\cap}Y)\tilde{\cap}Z}(e) = \gamma_X(e) \cup \big(\gamma_Y(e) \cup \gamma_Z(e)\big) \\ , \mu_{(X\tilde{\cap}Y)\tilde{\cap}Z}(e) = \min\{\mu_X(e), \min\{\mu_Y(e), \mu_z(e)\}\} \end{matrix} \right\}$$

Pada teorema ini berlaku sifat asosiatif terhadap operasi irisan, jadi terbukti $(\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Y) \tilde{\cap} \Gamma_Z = \Gamma_X \tilde{\cap} (\Gamma_Y \tilde{\cap} \Gamma_Z)$ ■

Berikut ini salah satu contoh dari teorema 3.5.

CONTOH 3.11:

Misalkan $\Gamma_X \in FPFS(U)$,

$\Gamma_X = \{((e_2, 0.2), \{(u_1, 0.5)\})\}$

$\mu_{X\tilde{\cap}X}(e_2) = \min\{\mu_X(e_2), \mu_X(e_2)\}$

$= \min\{0.2, 0.2\}$

$= 0.2$

$\gamma_{X\tilde{\cap}X}(e_2) = \gamma_X(e_2) \cap \gamma_X(e_2)$

$= 0.5 \cap 0.5$

$= 0.5$

$\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_X = \{((e_2, 0.2), \{(u_1, 0.5)\})\}$

Teorema berikut membuktikan pada himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy berlaku sifat De Morgan's Laws.

TEOREMA 3.6: Misalkan $\Gamma_X, \Gamma_Y \in FPFS(U)$.

i. $(\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_Y)^{\tilde{c}} = \Gamma_X^{\tilde{c}} \tilde{\cap} \Gamma_Y^{\tilde{c}}$

ii. $(\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Y)^{\tilde{c}} = \Gamma_X^{\tilde{c}} \tilde{\cup} \Gamma_Y^{\tilde{c}}$

Bukti: Untuk setiap $e \in E$,

i. $$(\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_Y)^{\tilde{c}} = \left\{ \begin{matrix} \Big(\big(e, \mu_{(X\tilde{\cup}Y)^c}(e)\big), \gamma_{(X\tilde{\cup}Y)^{\tilde{c}}}(e)\Big): \\ e \in E, \gamma_{(X\tilde{\cup}Y)^{\tilde{c}}}(e) = \big(\gamma_X(e) \cup \gamma_Y(e)\big)^c \\ , \mu_{(X\tilde{\cup}Y)^c}(e) = 1 - \mu_{X\tilde{\cup}Y}(e) \end{matrix} \right\}$$

$\mu_{(X\tilde{\cup}Y)^c}(e) = 1 - \mu_{X\tilde{\cup}Y}(e)$

$= 1 - \max\{\mu_X(e), \mu_Y(e)\}$

$= \min\{1 - \mu_X(e), 1 - \mu_Y(e)\}$

$= \min\{\mu_{X^c}(e), \mu_{Y^c}(e)\}$

$= \mu_{X^c\tilde{\cap}Y^c}(e)$

$\gamma_{(X\tilde{\cup}Y)^{\tilde{c}}}(e) = \gamma^c_{X\tilde{\cup}Y}(e)$

$= \big(\gamma_X(e) \cup \gamma_Y(e)\big)^c$

$= \big(\gamma_X(e)\big)^c \cap \big(\gamma_Y(e)\big)^c$

$= \gamma_{X^{\tilde{c}}}(e) \cap \gamma_{Y^{\tilde{c}}}(e)$

$= \gamma_{X^{\tilde{c}}\tilde{\cap}Y^{\tilde{c}}}(e)$

$$\Gamma_X^{\tilde{c}} \tilde{\cap} \Gamma_Y^{\tilde{c}} = \left\{ \begin{matrix} \big((e, \mu_{X^c\tilde{\cap}Y^c}(e)), \gamma_{X^{\tilde{c}}\tilde{\cap}Y^{\tilde{c}}}(e)\big): \\ e \in E, \gamma_{X^{\tilde{c}}\tilde{\cap}Y^{\tilde{c}}}(e) = \gamma_{X^{\tilde{c}}}(e) \cap \gamma_{Y^{\tilde{c}}}(e) \\ , \mu_{X^c\tilde{\cap}Y^c}(e) = \min\{\mu_{X^c}(e), \mu_{Y^c}(e)\} \end{matrix} \right\}$$

Terbukti bahwa $(\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_Y)^{\tilde{c}} = \Gamma_X^{\tilde{c}} \tilde{\cap} \Gamma_Y^{\tilde{c}}$ ■

ii. $$(\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Y)^{\tilde{c}} = \left\{ \begin{matrix} \Big(\big(e, \mu_{(X\tilde{\cap}Y)^c}(e)\big), \gamma_{(X\tilde{\cap}Y)^{\tilde{c}}}(e)\Big): \\ e \in E, \gamma_{(X\tilde{\cap}Y)^{\tilde{c}}}(e) = \big(\gamma_X(e) \cap \gamma_Y(e)\big)^c \\ , \mu_{(X\tilde{\cap}Y)^c}(e) = 1 - \mu_{X\tilde{\cap}Y}(e) \end{matrix} \right\}$$

$\mu_{(X\tilde{\cap}Y)^c}(e) = 1 - \mu_{X\tilde{\cap}Y}(e)$

$= 1 - \min\{\mu_X(e), \mu_Y(e)\}$

$= \max\{1 - \mu_X(e), 1 - \mu_Y(e)\}$

$= \max\{\mu_{X^c}(e), \mu_{Y^c}(e)\}$

$= \mu_{X^c\tilde{\cup}Y^c}(e)$

$\gamma_{(X\tilde{\cap}Y)^{\tilde{c}}}(e) = \gamma^c_{X\tilde{\cap}Y}(e)$

$= \big(\gamma_X(e) \cap \gamma_Y(e)\big)^c$

$= \big(\gamma_X(e)\big)^c \cup \big(\gamma_Y(e)\big)^c$

$= \gamma_{X^{\tilde{c}}}(e) \cup \gamma_{Y^{\tilde{c}}}(e)$

$= \gamma_{X^{\tilde{c}}\tilde{\cup}Y^{\tilde{c}}}(e)$

$$\Gamma_X^{\tilde{c}} \tilde{\cup} \Gamma_Y^{\tilde{c}} = \left\{ \begin{matrix} \big((e, \mu_{X^c\tilde{\cup}Y^c}(e)), \gamma_{X^{\tilde{c}}\tilde{\cup}Y^{\tilde{c}}}(e)\big): \\ e \in E, \gamma_{X^{\tilde{c}}\tilde{\cup}Y^{\tilde{c}}}(e) = \gamma_{X^{\tilde{c}}}(e) \cup \gamma_{Y^{\tilde{c}}}(e) \\ , \mu_{X^c\tilde{\cup}Y^c}(e) = \max\{\mu_{X^c}(e), \mu_{Y^c}(e)\} \end{matrix} \right\}$$

Terbukti bahwa $(\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Y)^{\tilde{c}} = \Gamma_X^{\tilde{c}} \tilde{\cup} \Gamma_Y^{\tilde{c}}$ ■

Teorema berikut membuktikan pada himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy berlaku sifat distributif terhadap operasi gabungan dan irisan.

TEOREMA 3.7: Misalkan $\Gamma_X, \Gamma_Y, \Gamma_Z \in FPFS(U)$.

i. $\Gamma_X \tilde{\cup} (\Gamma_Y \tilde{\cap} \Gamma_Z) = (\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_Y) \tilde{\cap} (\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_Z)$

ii. $\Gamma_X \tilde{\cap} (\Gamma_Y \tilde{\cup} \Gamma_Z) = (\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Y) \tilde{\cup} (\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Z)$

Bukti: Untuk setiap $e \in E$,

i. $\Gamma_X \tilde{\cup} (\Gamma_Y \tilde{\cap} \Gamma_Z) =$

$$\left\{\begin{matrix} \left(\left(e,\mu_{X\tilde{\cup}(Y\tilde{\cap}Z)}(e)\right),\gamma_{X\tilde{\cup}(Y\tilde{\cap}Z)}(e)\right): \\ e \in E, \gamma_{X\tilde{\cup}(Y\tilde{\cap}Z)}(e) = \gamma_X(e) \cup \left(\gamma_Y(e) \cap \gamma_Z(e)\right) \\ ,\mu_{X\tilde{\cup}(Y\tilde{\cap}Z)}(e) = \max\{\mu_X(e), \min\{\mu_Y(e),\mu_Z(e)\}\} \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{aligned} \mu_{X\tilde{\cup}(Y\tilde{\cap}Z)}(e) &= \max\{\mu_X(e), \mu_{Y\tilde{\cap}Z}(e)\} \\ &= \max\{\mu_X(e), \min\{\mu_Y(e),\mu_Z(e)\}\} \\ &= \min\{\max\{\mu_X(e),\mu_Y(e)\}\}, \\ &\quad \max\{\mu_X(e),\mu_Z(e)\} \\ &= \min\{\mu_{X\tilde{\cup}Y}(e), \mu_{X\tilde{\cup}Z}(e)\} \\ &= \mu_{(X\tilde{\cup}Y)\tilde{\cap}(X\tilde{\cup}Z)}(e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{X\tilde{\cup}(Y\tilde{\cap}Z)}(e) &= \gamma_X(e) \cup \gamma_{Y\tilde{\cap}Z}(e) \\ &= \gamma_X(e) \cup \left(\gamma_Y(e) \cap \gamma_Z(e)\right) \\ &= \left(\gamma_X(e) \cup \gamma_Y(e)\right) \cap \left(\gamma_X(e) \cup \gamma_Z(e)\right) \\ &= \gamma_{X\tilde{\cup}Y}(e) \cap \gamma_{X\tilde{\cup}Z}(e) \\ &= \gamma_{(X\tilde{\cup}Y)\tilde{\cap}(X\tilde{\cup}Z)}(e) \end{aligned}$$

$(\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_Y) \tilde{\cap} (\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_Z)$

$$= \left\{\begin{matrix} \left(\left(e,\mu_{(X\tilde{\cup}Y)\tilde{\cap}(X\tilde{\cup}Z)}(e)\right),\gamma_{(X\tilde{\cup}Y)\tilde{\cap}(X\tilde{\cup}Z)}(e)\right): \\ e \in E, \gamma_{(X\tilde{\cup}Y)\tilde{\cap}(X\tilde{\cup}Z)}(e) = \gamma_{X\tilde{\cup}Y}(e) \cap \gamma_{X\tilde{\cup}Z}(e) \\ ,\mu_{(X\tilde{\cup}Y)\tilde{\cap}(X\tilde{\cup}Z)}(e) = \min\{\mu_{X\tilde{\cup}Y}(e), \mu_{X\tilde{\cup}Z}(e)\} \end{matrix}\right\}$$

Terbukti bahwa $\Gamma_X \tilde{\cup} (\Gamma_Y \tilde{\cap} \Gamma_Z) = (\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_Y) \tilde{\cap} (\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_Z)$ ■

ii. $\Gamma_X \tilde{\cap} (\Gamma_Y \tilde{\cup} \Gamma_Z) =$

$$\left\{\begin{matrix} \left(\left(e,\mu_{X\tilde{\cap}(Y\tilde{\cup}Z)}(e)\right),\gamma_{X\tilde{\cap}(Y\tilde{\cup}Z)}(e)\right): \\ e \in E, \gamma_{X\tilde{\cap}(Y\tilde{\cup}Z)}(e) = \gamma_X(e) \cap \left(\gamma_Y(e) \cup \gamma_Z(e)\right) \\ ,\mu_{X\tilde{\cap}(Y\tilde{\cup}Z)}(e) = \min\{\mu_X(e), \max\{\mu_Y(e),\mu_Z(e)\}\} \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{aligned} \mu_{X\tilde{\cap}(Y\tilde{\cup}Z)}(e) &= \min\{\mu_X(e), \mu_{Y\tilde{\cup}Z}(e)\} \\ &= \min\{\mu_X(e), \max\{\mu_Y(e),\mu_Z(e)\}\} \\ &= \max\{\min\{\mu_X(e),\mu_Y(e)\}\}, \\ &\quad \min\{\mu_X(e),\mu_Z(e)\} \\ &= \max\{\mu_{X\tilde{\cap}Y}(e), \mu_{X\tilde{\cap}Z}(e)\} \\ &= \mu_{(X\tilde{\cap}Y)\tilde{\cup}(X\tilde{\cap}Z)}(e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{X\tilde{\cap}(Y\tilde{\cup}Z)}(e) &= \gamma_X(e) \cap \gamma_{Y\tilde{\cup}Z}(e) \\ &= \gamma_X(e) \cap \left(\gamma_Y(e) \cup \gamma_Z(e)\right) \\ &= \left(\gamma_X(e) \cap \gamma_Y(e)\right) \cup \left(\gamma_X(e) \cap \gamma_Z(e)\right) \\ &= \gamma_{X\tilde{\cap}Y}(e) \cup \gamma_{X\tilde{\cap}Z}(e) \\ &= \gamma_{(X\tilde{\cap}Y)\tilde{\cup}(X\tilde{\cap}Z)}(e) \end{aligned}$$

$(\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Y) \tilde{\cup} (\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Z)$

$$= \left\{\begin{matrix} \left(\left(e,\mu_{(X\tilde{\cap}Y)\tilde{\cup}(X\tilde{\cap}Z)}(e)\right),\gamma_{(X\tilde{\cap}Y)\tilde{\cup}(X\tilde{\cap}Z)}(e)\right): \\ e \in E, \gamma_{(X\tilde{\cap}Y)\tilde{\cup}(X\tilde{\cap}Z)}(e) = \gamma_{X\tilde{\cap}Y}(e) \cup \gamma_{X\tilde{\cap}Z}(e) \\ ,\mu_{(X\tilde{\cap}Y)\tilde{\cup}(X\tilde{\cap}Z)}(e) = \mu_{(X\tilde{\cap}Y)\tilde{\cup}(X\tilde{\cap}Z)}(e) \end{matrix}\right\}$$

Terbukti bahwa $\Gamma_X \tilde{\cap} (\Gamma_Y \tilde{\cup} \Gamma_Z) = (\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Y) \tilde{\cup} (\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Z)$ ■

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan diperoleh simpulan, himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy mendefinisikan fungsi dari himpunan parameter fuzzy ke himpunan fuzzy atas himpunan semestanya. Operasi yang digunakan pada himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy adalah komplemen, gabungan, dan irisan. Menurut operasi yang digunakan, berlaku sifat-sifat operasi yaitu: sifat transitif, sifat komutatif terhadap operasi gabungan, irisan, sifat asosiatif terhadap operasi gabungan, irisan, sifat De Morgan's, serta sifat distributif terhadap operasi gabungan dan irisan.

SARAN

Adapun saran untuk penelitian selanjutnya adalah menambahkan sifat-sifat operasi pada himpunan lunak fuzzy berparameter fuzzy yang masih belum dikaji pada artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

Acar, U., Koyuncu, F., & Tanay, B. (2010). Soft Set and Soft Rings. *Computers and Mathematics with Applications*, 3458-3463.

Cagman, N., & Enginoglu, S. (2010). Soft Matrix Theory and Its Decision Making. *Computer and Mathematics with Application*(59), 3308-3314.

Cagman, N., Citak, F., & Enginoglu, S. (2010). Fuzzy Parameterized Fuzzy Soft Set Theory and Its Applications. *Turkish Journal of Fuzzy Systems*, 21-35.

Cagman, N., Citak, F., & Enginoglu, S. (2011). Fuzzy Parameterized Soft Sets and Its Decision Making. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 219-226.

Cagman, N., Enginoglu, S., & Citak, F. (2011). Fuzzy Soft Set Theory and Its Applications. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 137-147.

F, F., Jun, Y., Liu, X., & Li, L. (2010). An Adjustable Approach to Fuzzy Soft Set Based Decision Making. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 10-20.

Maji, P., Biswas, R., & Roy, A. (2003). Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 555-562.

Mehta, A., & Yadav, V. (2014). Application of Sets. *International Journal of Innovative Research in Technology*, 892-893.

Molodtsov, D. (1999). Soft Set Theory - First result. *Computer and Mathematics with Applications 37*, 19-31.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*(8), 338-353.

Zhan, J., & Jun, Y. (2010). Soft BL-Algebras Based on Fuzzy Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 2037-2046.