

**MODEL SEIR PENYAKIT COVID-19 DENGAN ADANYA MIGRASI DAN PEMBERIAN VAKSIN**

**M. Shandy Prabowo Pramudito**

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya  
e-mail : shandy.17030214025@mhs.unesa.ac.id

**Budi Priyo Prawoto**

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya  
e-mail : budiprawoto@unesa.ac.id

**Abstrak**

Pada awal tahun 2020 dunia dikejutkan dengan adanya virus covid-19 yang terjadi dengan skala besar di Wuhan, Tiongkok dan menyebar ke seluruh dunia. Penyakit ini dapat dengan mudah menyebar jika seseorang yang terinfeksi melakukan kontak dengan orang lain atau meninggalkan *droplet* pada benda umum saat meninggalkan rumah. Salah satu cara untuk menekan tingkat penyebaran penyakit ini adalah dengan vaksinasi. Artikel ini bertujuan untuk menkonstruksi model penyakit covid-19 dengan adanya migrasi dan vaksinasi serta mengetahui kestabilan titik kesetimbangannya. Model berupa sistem persamaan didapat terlebih dahulu dengan melakukan studi literatur terkait penyebaran covid-19 yang kemudian dituangkan dalam batasan dan asumsi. Setelah sistem persamaan dikonstruksi berdasarkan asumsi yang ditentukan, selanjutnya mencari titik kesetimbangan dan menganalisa kestabilan disekitar titik setimbang yang dilakukan dengan menggunakan nilai eigen dari matrik Jacobi sistem persamaan. Simulasi dilakukan pada tahap akhir untuk melihat keselarasan dengan hasil analisa dan untuk melihat perilaku dinamikanya secara geometris. Dengan menggunakan parameter yang sudah ditentukan, maka didapat nilai titik kesetimbangan endemik dengan  $(s, e, i, r, v) = (0.01898441572, 0.001932407616, 0.2170504021, 0.6906149157, 0.09837379053)$  yang bersifat stabil.

**Kata Kunci:** Virus covid-19, model SEIR, migrasi, vaksinasi, titik kesetimbangan.

**Abstract**

*In early 2020 the world was shocked by the covid-19 virus that occurred on a large scale in Wuhan, China and spread throughout the world. The disease can easily be spread if an infected person comes into contact with other people or leaves droplets on common objects when leaving the house. One way to reduce the rate of spread of this disease is by vaccination. This article aims to construct a model for covid-19 with migration and vaccination. This article also aims to find out the equilibrium point. The model in the form of a equation system is obtained first by conducting literature studies related to the spread of covid-19 which are then outlined in terms and assumptions. After the equation systems is constructed based on the predetermined assumptions, then look for the equilibrium point and analyze stability around the equilibrium point which is done using the eigenvalues of Jacobian matrix of the equations systems. The simulation is carried out at the final stage to see the alignment with the analysis result and to see its dynamic geometric behavior. By using parameters that have been determined, value of the equilibrium point  $(s, e, i, r, v) = (0.01898441572, 0.001932407616, 0.2170504021, 0.6906149157, 0.09837379053)$  which is stable.*

**Keywords:** covid-19 virus, SEIR model, migration, vaccination, equilibrium point.

**PENDAHULUAN**

Dunia dikejutkan dengan munculnya penyakit pneumonia tipe baru yang terjadi di Wuhan, Tiongkok yaitu *coronavirus disease 2019* (covid-19) pada awal tahun 2020. Penyakit ini berlangsung dengan skala besar di Wuhan, Tiongkok dan menyebar ke lebih dari 190 negara. Menurut (Susilo, 2020) *droplet* yang keluar dari pasien covid-19 saat batuk atau bersin menjadi penyebab Transmisi atau

penyebaran penyakit ini. Virus covid-19 ini menginfeksi sel-sel pada saluran pernapasan

Vaksinasi merupakan salah satu metode untuk menekan penyebaran penyakit yang menular. Dikutip dari (Sanofi, 2021), menurut *World Health Organization* sedikitnya nyaris 10 juta angka kematian orang di dunia dapat diatasi dengan metode ini. Vaksinasi ini sendiri bekerja dengan cara memberikan antigen virus tertentu yang sebelumnya

sudah dimatikan yang kemudian memicu sistem imunitas badan agar dapat mengenali, menghancurkan dan mengingat benda asing yang masuk ke dalam badan. Sehingga badan bisa dengan mudah mengidentifikasi serta menolak benda asing yang masuk menyerang badan.

Migrasi atau perpindahan suatu penduduk dari daerah ke daerah yang lain merupakan fenomena yang kerap terjadi di suatu negara atau daerah. Di wilayah kota Surabaya sendiri, banyak pekerja yang berasal dari luar kota Surabaya yang bebas masuk ke wilayah kota Surabaya karena tidak adanya kebijakan *lockdown* dari pemerintah. Adanya fenomena ini dapat memungkinkan terjadinya penularan suatu penyakit. Penyakit bisa saja dibawa oleh seseorang yang masuk maupun keluar dari suatu daerah tertentu.

Model matematika yang sering digunakan untuk menganalisis dinamika penyebaran penyakit adalah model SEIR. Didalam model SEIR ini, populasi dikelompokkan ke dalam empat kelas yang berbeda yaitu *Susceptible (S)*, *Exposed (E)*, *Infected (I)* dan *Recovered (R)*. Ada beberapa penyakit yang memiliki waktu inkubasi, maka dari itu Model SEIR ini dapat diterapkan pada penyakit yang memiliki waktu inkubasi panjang. Hal ini bertujuan supaya pengaruh inkubasi terhadap penyebaran penyakit bisa dianalisis.

Model penyebaran penyakit banyak dibahas di berbagai artikel atau jurnal, salah satu artikel yang membahasnya adalah artikel yang berjudul *Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia* oleh (Annas, 2020). Artikel ini membahas model penyebaran COVID-19 menggunakan model SEIR di Indonesia . Artikel lain yang membahas tentang penyebaran penyakit adalah *Dynamic of re-infection Rubella transmission model with vaccination* oleh (Prawoto, Abadi, & Artiono, 2020). Artikel ini membahas tentang penyebaran penyakit rubella dengan menggunakan model SVEIR. Berdasarkan pembahasan dari kedua artikel diatas penulis tertarik untuk mengulasnya lebih dalam dan ingin menambahkan asumsi adanya pengaruh migrasi. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui model matematika dan kestabilan titik kesetimbangan model penyebaran penyakit covid-19.

## KAJIAN TEORI

### Persamaan Differensial

Suatu persamaan yang memuat turunan dari satu ataupun lebih variabel terikat ke satu ataupun lebih variabel bebas disebut persamaan diferensial namun jika sistem persamaan diferensial berisi atau memuat dari beberapa persamaan diferensial (Rahma, 2012).

Sistem persamaan differensial diberikan seperti dibawah ini:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

Dengan  $E \subset R^n$  dan  $f: R \rightarrow R^n$  fungsi kontinu pada  $E$

$$\dot{x} = f(x) \tag{2}$$

Persamaan (2) disebut sistem persamaan differensial linear jika  $f_1, f_2, \dots, f_n$  masing-masing linear dalam  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{3}$$

Bentuk  $\dot{x} = Ax$  dapat menyatakan dari sistem (3) dengan  $x \in E$ ,  $E \subseteq R^n$  dan  $A$  matriks  $n \times n$  . Dinamakan sistem non linear apabila tidak bisa dinyatakan ke dalam bentuk sistem (3).

### Titik Kesetimbangan

Dikutip dari (Panfilov, 2004) titik kesetimbangan sistem adalah titik dimana sistem tersebut tidak berubah seiring berjalannya waktu. Definisi dari titik kesetimbangan dapat dituliskan secara matematis seperti yang ada dibawah ini:

Definisi 1 (Perko, 1991) Titik  $x^* \in R^n$  dinamakan titik kesetimbangan dari sistem (2) apabila  $f(x^*) = 0$

Model matematika penyebaran penyakit memiliki dua titik kesetimbangan, antara lain titik kesetimbangan endemik penyakit dan titik kesetimbangan bebas penyakit. Di dalam populasi jika selalu ada penyakit atau selalu terserang penyakit dinamakan titik kesetimbangan endemik penyakit tetapi jika di dalam populasi tidak ada penyakit atau tidak adanya individu atau seseorang yang terserang penyakit disebut titik kesetimbangan bebas penyakit.

**Matriks Jacobi**

Diberikan  $f = f_1, f_2, \dots, f_n$  pada sistem persamaan (1) dengan  $f_1 \in C^1(E), i = 1, 2, \dots, n$  matriks

$$J(f(x^*)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^*) \end{bmatrix}$$

$J(f(x^*))$  dinamakan matriks Jacobi dari  $f$  di titik  $x^*$  (Hale & Kocak, 1991).

Definisi 2 (Anton, 1998) Vektor tak nol  $x$  didalam  $R^n$  disebut vektor eigen dari  $A$  jika  $A$  adalah matriks  $n \times n$ , sedangkan nilai eigen dari  $A$  diperoleh  $Ax = \lambda x$  jika untuk suatu skalar  $\lambda$ .

Definisi 3 (Anton, 1998) Vektor eigen yang sesuai dengan nilai eigen  $x$  dinamakan vektor  $x$ . Untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan sistem (2) bisa menggunakan nilai eigen matriks Jacobi dengan metode linearisasi. Melalui persamaan karakteristik dari matriks Jacobi di titik  $x^*$  nilai eigen dapat ditentukan. Sistem (2) memiliki kriteria kestabilan titik kesetimbangan seperti yang ada dibawah ini:

Teorema 1 (Wiggins, 1990) Titik kesetimbangan  $x^*$  dari sistem (2) akan stabil asimtotik lokal apabila semua nilai eigen matriks Jacobi memiliki bagian real negatif.

**Model SEIR**

Populasi total pada model penyebaran penyakit terbagi menjadi tiga kelas, antara lain jumlah seseorang yang sehat namun rentan terserang penyakit disebut *Susceptible* ( $S$ ), jumlah seseorang yang terkena penyakit serta bisa saja menularkan penyakit kepada orang yang sehat disebut *Infected* ( $I$ ), dan jumlah seseorang yang telah sembuh dari penyakit dan akan kebal dari penyakit disebut *Recovered* ( $R$ ). Seiring berjalannya waktu terdapat penambahan kelas pada model ini dikarenakan ada beberapa penyakit yang memiliki periode laten atau jeda waktu individu terinfeksi hingga muncul penyakit. Jangka waktu laten ini dinamakan atau masuk pada kelas *Exposed* ( $E$ ). Hasilnya Penambahan kelas yaitu kelas laten ini akan membentuk model SEIR.

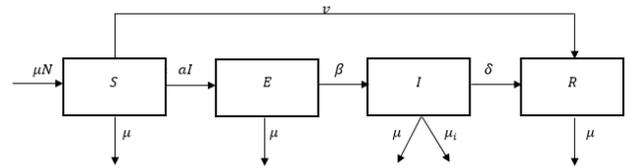


Diagram 1. Diagram SEIR (Annas, 2020)

Berdasarkan diagram 2.1 diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu N - (\alpha I + \mu + v)S \\ \frac{dE}{dt} &= \alpha I S - (\beta + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} &= \beta E - (\mu_i + \delta + \mu)I \\ \frac{dR}{dt} &= \delta I + vS - \mu R \end{aligned}$$

**Model SVEIR**

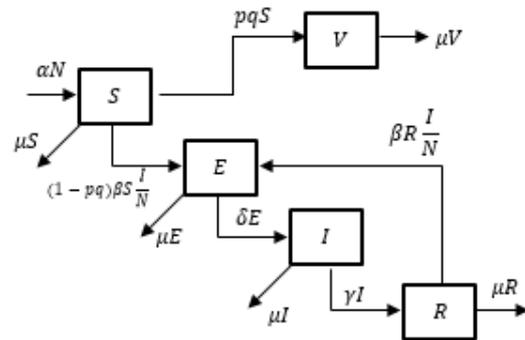


Diagram 2. Diagram SVEIR (Prawoto, Abadi, & Artiono, 2020)

(Prawoto, Abadi, & Artiono, 2020) telah melakukan penelitian mengenai model SVEIR penyebaran penyakit rubella hasil pengembangan model SEIR dengan menambahkan kelompok populasi  $V$  (*Vaccinated*), yaitu kelompok individu yang telah mendapatkan vaksin dan berhasil membentuk imunitas dalam tubuhnya. Pada penelitian tersebut dilakukan penentuan titik ekuilibrium model, menganalisa sifat kestabilan titik kesetimbangan, menentukan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) serta mensimulasikan model dengan mendefinisikan parameter.

Berdasarkan diagram diatas diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \alpha N - pqS - (1 - pq)\beta S \frac{I}{N} - \mu S , \\ \frac{dE}{dt} &= (1 - pq)\beta S \frac{I}{N} + \beta R \frac{I}{N} - \delta E - \mu E , \\ \frac{dI}{dt} &= \delta E - \gamma I - \mu I , \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \beta R \frac{I}{N} - \mu R , \\ \frac{dV}{dt} &= pqS - \mu V . \end{aligned}$$

**METODE**

Artikel yang diambil pada penelitian ini yaitu artikel penelitian yang dilakukan oleh (Annas, 2020) dan (Prawoto, Abadi, & Artiono, 2020) dengan batasan masalah sebagai berikut:

1. Model SEIR adalah model penyebaran penyakit yang digunakan dalam penulisan artikel ini yang disertai dengan adanya migrasi dan pemberian vaksin.
2. Dalam penelitian digunakan data sekunder yang diperoleh dari website dan jurnal ilmiah sebagai penentuan parameter.

Untuk mengkonstruksi model penyebaran virus covid-19 model SEIR dengan adanya migrasi dan pemberian vaksin digunakan asumsi antara lain:

1. Seorang atau individu yang baru saja dilahirkan akan masuk ke dalam kelas *Susceptible* (*S*), hal itu dikarenakan seseorang atau individu yang baru lahir dinyatakan sehat namun rentan terserang penyakit covid-19.
2. Vaksin yang diberikan kepada individu rentan memiliki tingkat efektifitas *q* dan proporsi *p*.
3. Jika terjadi kontak antara individu *Susceptible* dengan individu *Infected* maka bisa terjadi penyebaran penyakit antar individu yang artinya individu *Susceptible* akan masuk ke kelas *Exposed* (*E*) dengan laju penularan  $\beta$ , setelah selang beberapa waktu dan terdeteksi terkena penyakit individu *Exposed* akan masuk ke kelas *Infected* (*I*) dengan laju infeksi  $\delta$ . Setelah sembuh dari penyakit, individu *infected* akan masuk ke kelas *Recovered* (*R*) dengan laju kesembuhan  $\gamma$ .
4. Imigrasi hanya ada pada kelas *Infected* (*I*) sedangkan Emigrasi keluar ke semua kelas.
5. Orang yang masuk (imigrasi) hanya difokuskan ke orang yang terinfeksi, karena untuk orang yang rentan maka tidak berpengaruh signifikan terhadap penyebaran penyakit di dalam populasi.
6. Orang yang masuk (imigrasi) bermukim beberapa hari sehingga ketika orang tersebut keluar maka bisa jadi sudah masuk ke sub populasi yang lain.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

Dibawah ini merupakan diagram model SEIR dengan adanya migrasi dan pemberian vaksin yang telah dibuat berdasarkan asumsi yang sudah disebutkan:

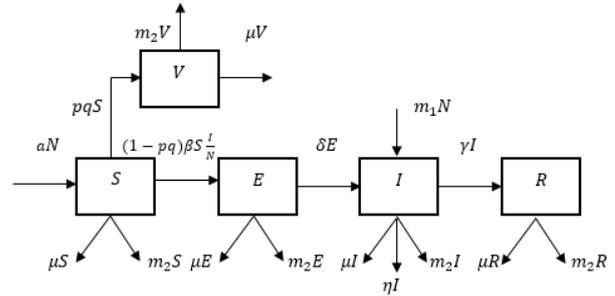


Diagram 3. Model SEIR dengan Migrasi dan Vaksinasi

Maka diperoleh sistem persamaan diferensial dari diagram diatas sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= aN - pqS - (1 - pq)\beta S \frac{I}{N} - m_2S - \mu S, & (4) \\ \frac{dE}{dt} &= (1 - pq)\beta S \frac{I}{N} - \delta E - m_2E - \mu E, & (5) \\ \frac{dI}{dt} &= \delta E - \gamma I + m_1N - m_2I - \mu I - \eta I, & (6) \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - m_2R - \mu R, & (7) \\ \frac{dV}{dt} &= pqS - m_2V - \mu V. & (8) \end{aligned}$$

Tabel 1. Deskripsi Variabel

Variabel	Deskripsi
<i>S</i>	Jumlah individu yang rentan
<i>E</i>	Jumlah individu yang laten
<i>I</i>	Jumlah individu yang terinfeksi
<i>R</i>	Jumlah individu yang sembuh
<i>V</i>	Jumlah individu yang divaksinasi
<i>N</i>	Total Populasi

Selanjutnya dilakukan *scaling* untuk setiap kelas subpopulasi dengan total populasi. Hal itu dapat dilakukan dengan menggunakan transformasi berikut:

$$s = \frac{S}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N}, v = \frac{V}{N}$$

Sistem menjadi

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= a - pqs - (1 - pq)\beta si - m_2s - \mu s, & (9) \\ \frac{de}{dt} &= (1 - pq)\beta si - \delta e - m_2e - \mu e, & (10) \\ \frac{di}{dt} &= \delta e - \gamma i + m_1 - m_2i - \mu i - \eta i, & (11) \\ \frac{dr}{dt} &= \gamma i - m_2r - \mu r, & (12) \\ \frac{dv}{dt} &= pqs - m_2v - \mu v. & (13) \end{aligned}$$

Tabel 2. Deskripsi Parameter

Parameter	Deskripsi
$a$	Laju kelahiran
$\beta$	Laju kontak
$\delta$	Laju infeksi kelas <i>Susceptible</i> ke kelas <i>Exposed</i>
$\gamma$	Laju kesembuhan
$\mu$	Laju kematian alami
$\eta$	Laju Kematian karena covid-19
$p$	Proporsi individu rentan yang divaksinasi
$q$	Efektivitas vaksinasi
$m_1$	Laju imigrasi
$m_2$	Laju emigrasi

**Titik Kesetimbangan**

Pada model diasumsikan  $m_1$  masuk ke kelas *infected* atau populasi yang melakukan migrasi adalah populasi terinfeksi saja maka  $i$  tidak mungkin bernilai 0 dalam artian penyakit akan selalu ada atau endemik serta titik kesetimbangan bebas penyakit tidak ada.

Titik kesetimbangan endemik penyakit artinya didalam populasi selalu ada penyakit atau terdapat individu terserang penyakit,  $i > 0$ . Dari persamaan (11) didapat

$$\begin{aligned} \delta e - \gamma i + m_1 - m_2 i - \mu i - \eta i &= 0 \\ \delta e + m_1 - (\gamma + \mu + m_2 + \eta) i &= 0 \\ \delta e &= -m_1 + (\gamma + m_2 + \mu + \eta) i \\ e &= \frac{-m_1 + (\gamma + m_2 + \mu + \eta) i}{\delta} \end{aligned}$$

Dari persamaan (10) diperoleh

$$\begin{aligned} (1 - pq)\beta si - \delta e - m_2 e - \mu e &= 0 \\ (1 - pq)\beta si - (\delta + m_2 + \mu) e &= 0 \end{aligned}$$

substitusikan nilai  $e = \frac{-m_1 + (\gamma + m_2 + \mu + \eta) i}{\delta}$

$$\begin{aligned} (1 - pq)\beta si - (\delta + m_2 + \mu) \left( \frac{-m_1 + (\gamma + m_2 + \mu + \eta) i}{\delta} \right) &= 0 \\ \left( (1 - pq)\beta s - \frac{(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)}{\delta} \right) i &= 0, \end{aligned}$$

karena  $i > 0$  maka  $i \neq 0$

$$\begin{aligned} (1 - pq)\beta s - \frac{(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)}{\delta} &= 0 \\ s &= \frac{(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)}{(1 - pq)\beta \delta} \end{aligned}$$

Dari titik  $s$  yang sudah diperoleh, maka bisa mencari titik  $i$  dengan menggunakan persamaan (9) berikut

$$a - pqs - (1 - pq)\beta si - m_2 s - \mu s = 0$$

$$(1 - pq)\beta si = a - pqs - m_2 s - \mu s$$

$$i = \frac{a - (pq + m_2 + \mu) s}{(1 - pq)\beta s},$$

substitusikan  $s = \frac{(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)}{(1 - pq)\beta \delta}$  sehingga

diperoleh

$$\begin{aligned} i &= \frac{a - (pq + m_2 + \mu) \frac{(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)}{(1 - pq)\beta \delta}}{(1 - pq)\beta \frac{(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)}{(1 - pq)\beta \delta}} \\ i &= \frac{a - \frac{(pq + m_2 + \mu)(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)}{(1 - pq)\beta \delta}}{\frac{(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)}{\delta}} \\ i &= \frac{(1 - pq)a\beta \delta - (pq + m_2 + \mu)(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)}{(1 - pq)(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)\beta} \end{aligned}$$

Setelah nilai  $i$  diperoleh, selanjutnya mencari titik kesetimbangan  $e$

$$e = \frac{-m_1 + (\gamma + m_2 + \mu + \eta) i}{\delta},$$

substitusikan nilai  $i$  sehingga diperoleh:

$$e = \frac{-m_1 + (\gamma + m_2 + \mu + \eta) \frac{(1 - pq)a\beta \delta - (pq + m_2 + \mu)(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)}{(1 - pq)(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)\beta}}{\delta}$$

Selanjutnya mencari titik kesetimbangan  $r$  dengan menyelesaikan persamaan (12) berikut

$$\begin{aligned} \gamma i - m_2 r - \mu r &= 0 \\ \gamma i - (m_2 r + \mu) r &= 0 \\ (m_2 + \mu) r &= \gamma i, \end{aligned}$$

substitusikan nilai  $i$  sehingga diperoleh:

$$r = \frac{\left( \frac{(1 - pq)a\beta \delta - (pq + m_2 + \mu)(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)}{(1 - pq)(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)\beta} \right) \gamma}{(m_2 + \mu)}$$

Titik kesetimbangan  $v$  dapat diperoleh dari persamaan (13) berikut

$$\begin{aligned} pqs - m_2 v - \mu v &= 0 \\ pqs - (m_2 + \mu) v &= 0 \\ (m_2 + \mu) v &= pqs, \end{aligned}$$

substitusikan nilai  $s$  sehingga diperoleh:

$$v = \frac{pq \left( \frac{(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)}{(1 - pq)\beta \delta} \right)}{(m_2 + \mu)}$$

Sehingga titik kesetimbangan endemik penyakit  $s, e, i, r, v$

$$\begin{aligned} &\left( \begin{aligned} &\frac{(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)}{(1 - pq)\beta \delta}, \\ &\frac{-m_1 + (\gamma + m_2 + \mu + \eta) \frac{(1 - pq)a\beta \delta - (pq + m_2 + \mu)(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)}{(1 - pq)(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)\beta}}{\delta}, \\ &\frac{(1 - pq)a\beta \delta - (pq + m_2 + \mu)(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)}{(1 - pq)(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)\beta}, \\ &\frac{\left( \frac{(1 - pq)a\beta \delta - (pq + m_2 + \mu)(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)}{(1 - pq)(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)\beta} \right) \gamma}{(m_2 + \mu)}, \\ &\frac{pq \left( \frac{(\delta + m_2 + \mu)(-m_1 + \gamma + m_2 + \mu + \eta)}{(1 - pq)\beta \delta} \right)}{(m_2 + \mu)} \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

**Kestabilan Titik Kesetimbangan**

Pada persamaan (9), (10), (11), (12), (13) dapat dilihat pada ruas kanan, variable  $v$  tidak mempengaruhi variabel yang lain, maka dari itu persamaan (13) bisa diabaikan terlebih dahulu.

Matriks Jacobi digunakan untuk menentukan sifat kestabilan sistem. Matriks Jacobinya adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial e} & \frac{\partial f_1}{\partial i} & \frac{\partial f_1}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial e} & \frac{\partial f_2}{\partial i} & \frac{\partial f_2}{\partial r} \\ \frac{\partial f_3}{\partial s} & \frac{\partial f_3}{\partial e} & \frac{\partial f_3}{\partial i} & \frac{\partial f_3}{\partial r} \\ \frac{\partial f_4}{\partial s} & \frac{\partial f_4}{\partial e} & \frac{\partial f_4}{\partial i} & \frac{\partial f_4}{\partial r} \end{bmatrix}$$

dengan  $f_1(s, e, i, r), f_2(s, e, i, r), f_3(s, e, i, r), f_4(s, e, i, r)$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(s, e, i, r) &= a - pqs - (1 - pq)\beta si - m_2s - \mu s. \\ f_2(s, e, i, r) &= (1 - pq)\beta si - \delta e - m_2e - \mu e, \\ f_3(s, e, i, r) &= \delta e - \gamma i + m_1 - m_2i - \mu i - \eta i, \\ f_4(s, e, i, r) &= \gamma i - m_2r - \mu r. \end{aligned}$$

Selanjutnya fungsi  $f_1, f_2, f_3, f_4$  diturunkan terhadap parameternya sebagai berikut:

- Fungsi  $f_1(s, e, i, r)$  diturunkan terhadap variabel  $s$   
 $\frac{\partial f_1}{\partial s} = \frac{\partial(a - pqs - (1 - pq)\beta si - m_2s - \mu s)}{\partial s} = -pq - (1 - pq)\beta i - m_2 - \mu$
- Fungsi  $f_1(s, e, i, r)$  diturunkan terhadap variabel  $e$   
 $\frac{\partial f_1}{\partial e} = \frac{\partial(a - pqs - (1 - pq)\beta si - m_2s - \mu s)}{\partial e} = 0$
- Fungsi  $f_1(s, e, i, r)$  diturunkan terhadap variabel  $i$   
 $\frac{\partial f_1}{\partial i} = \frac{\partial(a - pqs - (1 - pq)\beta si - m_2s - \mu s)}{\partial i} = -(1 - pq)\beta s$
- Fungsi  $f_1(s, e, i, r)$  diturunkan terhadap variabel  $r$   
 $\frac{\partial f_1}{\partial r} = \frac{\partial(a - pqs - (1 - pq)\beta si - m_2s - \mu s)}{\partial r} = 0$
- Fungsi  $f_2(s, e, i, r)$  diturunkan terhadap variabel  $s$   
 $\frac{\partial f_2}{\partial s} = \frac{\partial((1 - pq)\beta si - \delta e - m_2e - \mu e)}{\partial s} = (1 - pq)\beta i$
- Fungsi  $f_2(s, e, i, r)$  diturunkan terhadap variabel  $e$   
 $\frac{\partial f_2}{\partial e} = \frac{\partial((1 - pq)\beta si - \delta e - m_2e - \mu e)}{\partial e} = -\delta - m_2 - \mu$
- Fungsi  $f_2(s, e, i, r)$  diturunkan terhadap variabel  $i$   
 $\frac{\partial f_2}{\partial i} = \frac{\partial((1 - pq)\beta si - \delta e - m_2e - \mu e)}{\partial i} = (1 - pq)\beta s$
- Fungsi  $f_2(s, e, i, r)$  diturunkan terhadap variabel  $r$   
 $\frac{\partial f_2}{\partial r} = \frac{\partial((1 - pq)\beta si - \delta e - m_2e - \mu e)}{\partial r} = 0$
- Fungsi  $f_3(s, e, i, r)$  diturunkan terhadap variabel  $s$   
 $\frac{\partial f_3}{\partial s} = \frac{\partial(\delta e - \gamma i + m_1 - m_2i - \mu i - \eta i)}{\partial s} = 0$
- Fungsi  $f_3(s, e, i, r)$  diturunkan terhadap variabel  $e$   
 $\frac{\partial f_3}{\partial e} = \frac{\partial(\delta e - \gamma i + m_1 - m_2i - \mu i - \eta i)}{\partial e} = \delta$
- Fungsi  $f_3(s, e, i, r)$  diturunkan terhadap variabel  $i$

$$\frac{\partial f_3}{\partial i} = \frac{\partial(\delta e - \gamma i + m_1 - m_2i - \mu i - \eta i)}{\partial i} = -\gamma - m_2 - \mu - \eta$$

Fungsi  $f_3(s, e, i, r)$  diturunkan terhadap variabel  $r$

$$\frac{\partial f_3}{\partial r} = \frac{\partial(\delta e - \gamma i + m_1 - m_2i - \mu i - \eta i)}{\partial r} = 0$$

Fungsi  $f_4(s, e, i, r)$  diturunkan terhadap variabel  $s$

$$\frac{\partial f_4}{\partial s} = \frac{\partial(\gamma i - m_2r - \mu r)}{\partial s} = 0$$

Fungsi  $f_4(s, e, i, r)$  diturunkan terhadap variabel  $e$

$$\frac{\partial f_4}{\partial e} = \frac{\partial(\gamma i - m_2r - \mu r)}{\partial e} = 0$$

Fungsi  $f_4(s, e, i, r)$  diturunkan terhadap variabel  $i$

$$\frac{\partial f_4}{\partial i} = \frac{\partial(\gamma i - m_2r - \mu r)}{\partial i} = \gamma$$

Fungsi  $f_4(s, e, i, r)$  diturunkan terhadap variabel  $r$

$$\frac{\partial f_4}{\partial r} = \frac{\partial(\gamma i - m_2r - \mu r)}{\partial r} = -m_2 - \mu$$

Matrik Jacobi dapat dibentuk setelah diperoleh hasil turunan seperti yang dituliskan diatas, Matriks Jacobinya sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -pq - (1 - pq)\beta i - m_2 - \mu & 0 & -(1 - pq)\beta s & 0 \\ (1 - pq)\beta i & -\delta - m_2 - \mu & (1 - pq)\beta s & 0 \\ 0 & \delta & -\gamma - m_2 - \mu - \eta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -m_2 - \mu \end{bmatrix}$$

Tabel 3. Nilai Parameter

Parameter	Nilai	Sumber
$a$	0.011	(BPS Kota Surabaya, 2021)
$\beta$	0.3	Asumsi
$\delta$	0.26	(Pemerintah Kota Surabaya, 2021)
$\gamma$	0.28	(Pemerintah Kota Surabaya, 2021)
$\mu$	0.007	(BPS Kota Surabaya, 2021)
$\eta$	0.0075	(Pemerintah Kota Surabaya, 2021)
$p$	0.6	Asumsi
$q$	0.76	(Azanella, 2021)
$m_1$	0.081	(Zumrotul, 2021)

$m_2$	0.081	(Zumrotul, 2021)
-------	-------	------------------

Dari nilai parameter diatas didapat titik kesetimbangan endemik:

$$\begin{aligned}
 s &= 0.01898441572 \\
 e &= 0.001932407616 \\
 i &= 0.2170504021 \\
 r &= 0.6906149157 \\
 v &= 0.09837379053
 \end{aligned}$$

Masukkan nilai parameter dan hitung  $\det(\lambda I - J(s, e, i, r)) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -0.5794226256 & 0 & -0.003098256646 & 0 \\ 0.03542262562 & -0.348 & 0.003098256646 & 0 \\ 0 & 0.26 & -0.3755 & 0 \\ 0 & 0 & 0.28 & -0.088 \end{pmatrix}$$

Diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 &0.006624398420 + 0.1235963584 \lambda \\
 &+ 0.66637379140 \lambda^2 \\
 &+ 1.390922626 \lambda^3 + \lambda^4 = 0
 \end{aligned}$$

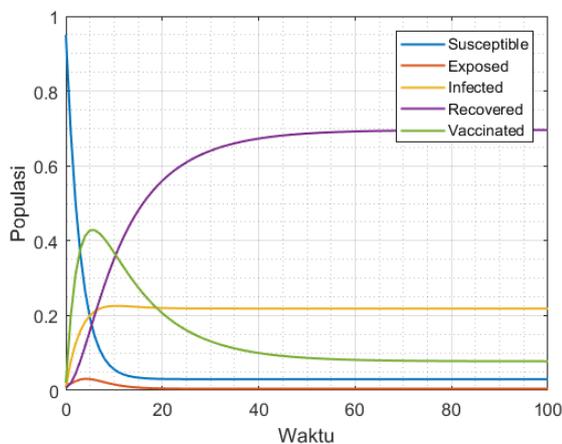
Nilai eigen dari persamaan karakteristik diatas:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= -0.088 \\
 \lambda_2 &= -0.332098082607464 \\
 \lambda_3 &= -0.390790288312574 \\
 \lambda_4 &= -0.580034254679962
 \end{aligned}$$

Karena semua nilai  $\lambda < 0$ , maka titik kesetimbangan endemik penyakit stabil.

**Simulasi**

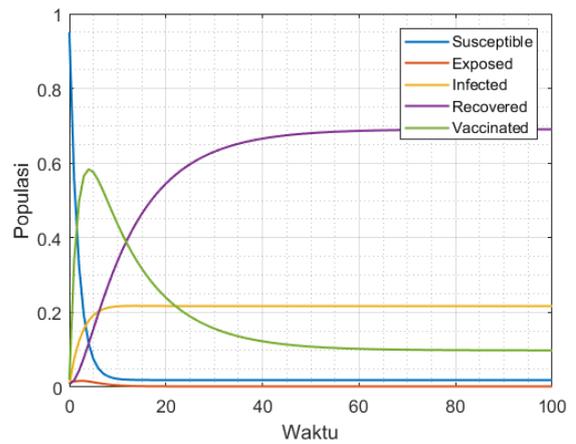
Pada simulasi ini menggunakan nilai awal yaitu  $s = 0.95, e = 0.0155, i = 0.0075, r = 0.007, v = 0.02$



Gambar 1. Simulasi 1

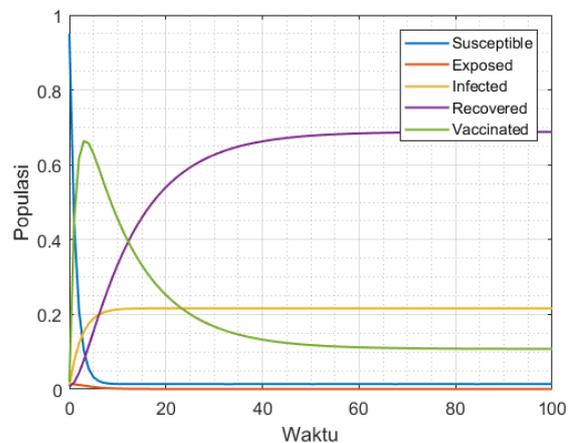
Pada gambar 1 dapat dilihat jika  $p = 0.3$  maka titik kesetimbangan  $i$  akan stabil ke 0.2187363263. Artinya penyakit covid-19 selalu ada di dalam

populasi.



Gambar 2. Simulasi 2

Pada gambar 2 dapat dilihat jika  $p = 0.6$  maka titik kesetimbangan  $i$  akan stabil ke 0.2170504021. Artinya penyakit covid-19 tidak akan hilang dan selalu ada di dalam populasi.



Gambar 3. Simulasi 3

Pada gambar 3 dapat dilihat jika  $p = 0.9$  maka titik kesetimbangan  $i$  akan stabil ke 0.2162786198. Artinya penyakit covid-19 tidak akan hilang dan selalu ada di dalam populasi.

Dari ketiga simulasi diatas maka dapat disimpulkan bahwa jika semakin tinggi nilai  $p$  atau proporsi cakupan vaksinasi maka dapat menekan populasi yang terinfeksi penyakit covid-19 dan penyakit selalu ada di dalam populasi karena adanya migrasi individu terinfeksi.

Pada hasil artikel dari (Annas, 2020) dan (Prawoto, Abadi, & Artiono, 2020) memiliki titik kesetimbangan endemik penyakit dan titik

kesetimbangan bebas penyakit, sedangkan pada artikel ini hanya ada titik kesetimbangan endemik penyakit. Hal itu dikarenakan adanya migrasi individu terinfeksi ke dalam suatu populasi sehingga tidak mungkin bernilai 0.

## PENUTUP

## SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas diperoleh model matematika penyebaran penyakit covid-19 dengan adanya migrasi dan pemberian vaksin sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = aN - pqS - (1 - pq)\beta S \frac{I}{N} - m_2S - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = (1 - pq)\beta S \frac{I}{N} - \delta E - m_2E - \mu E$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \gamma I + m_1N - m_2I - \mu I - \eta I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - m_2R - \mu R$$

$$\frac{dV}{dt} = pqS - m_2V - \mu V$$

Karena pada model diasumsikan  $m_1$  masuk ke kelas *infected* atau populasi yang melakukan migrasi adalah populasi terinfeksi saja maka  $i$  tidak mungkin bernilai 0 dalam artian penyakit akan selalu ada dan titik kesetimbangan bebas penyakit tidak ada serta titik kesetimbangan endemik stabil.

Semakin tinggi nilai  $p$  atau proporsi cakupan vaksinasi maka dapat menekan populasi yang terinfeksi penyakit covid-19. Jika nilai  $p$  naik sebesar 1% maka jumlah orang yang terinfeksi akan ditekan sebanyak 0.012%.

## SARAN

Artikel ini membahas tentang model SEIR penyebaran penyakit covid-19 dengan adanya migrasi dan pemberian vaksin. Peneliti bisa menambahkan variabel atau asumsi-asumsi baru jika ingin melanjutkan atau mengulas lebih dalam. Peneliti juga bisa mensimulasikan model dengan mengambil parameter-parameter baru.

## DAFTAR PUSTAKA

Annas, S. (2020). Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia. *Chaos, Solitons and Fractals*, 139.

Anton, H. (1998). *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Azanella, L. A. (2021, March 28). *PT. Kompas Cyber Media*. Retrieved from KOMPAS.com:

<https://www.kompas.com/tren/read/2021/03/13/152500165/perbandingan-efektivitas-vaksin-pfizer-moderna-dan-astrazeneca?amp=1&page=2>

BPS Kota Surabaya. (2021, March 8). Retrieved from BPS Kota Surabaya: [surabayakota.bps.go.id](http://surabayakota.bps.go.id)

Hale, J. K., & Kocak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. New York: Springer-Verlag.

Jia, Z.-W., Tang, G.-Y., Jin, Z., Dye, C., Vlas, S. J., Li, X.-W., ... Cao, W.-C. (2008). Modelling the impact of immigration on the epidemiology of tuberculosis. *Theoretical Population Biology*, 437-448.

Khan, M. A., Islam, S., Arif, M., & Haq, Z. U. (2013). Transmission model of Hepatitis B Virus with the Migration Effect. *BioMed Research International*, 1-10.

Panfilov, A. (2004). *Qualitative Analysis Of Differential Equation*. Utrecht: Utrecht University.

Pemerintah Kota Surabaya. (2021, March 8). Retrieved from Surabaya Lawan COVID-19: [lawancovid-19.surabaya.go.id](http://lawancovid-19.surabaya.go.id)

Perko, L. (1991). *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: Springer-Verlag.

Prawoto, B. P., Abadi, & Artiono, R. (2020). Dynamic of re-Infection Rubella Transmission Model with Vaccination. *AIP Conference Proceedings*, 1-7.

Rahma, S. (2012). MODEL SEIR PENYAKIT CAMPAK DENGAN VAKSINASI DAN MIGRASI. *Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*.

Rokom. (2021, March 8). *Biro Komunikasi & Pelayanan Publik KemKes RI*. Retrieved from [sehatNegeriku: http://sehatnegeriku.kemkes.go.id/baca/berita-utama/20210227/183707/5-ribu-lansia-surabaya-divaksinasi-dalam-dua-hari](http://sehatnegeriku.kemkes.go.id/baca/berita-utama/20210227/183707/5-ribu-lansia-surabaya-divaksinasi-dalam-dua-hari)

Sanofi. (2021, March 8). Retrieved from Sanofi: [www.sanofi.co.id/id/kesehatan-anda/obat-resep/Vaksinasi](http://www.sanofi.co.id/id/kesehatan-anda/obat-resep/Vaksinasi)

Susilo, d. (2020). Coronavirus Disease 2019: Review of Current Literatures. *Jurnal Penyakit Dalam Indonesia*, 45.

Wiggins, S. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear System and Chaos*. New York: Springer-Verlag.

Xing, G.-R., Li, M.-T., Li, L., & Sun, G.-Q. (2020). The Impact of Population Migration on the Spread of COVID-19: A Case Study of Guangdong Province and Hunan Province in China. *frontiers in Physics*, 8:587483.

Zumrotul, A. (2021, March 8). *suarasurabaya.net*. Retrieved from [suarasurabaya.net: https://www.suarasurabaya.net/kelanakota/2020/psbb-surabaya-masih-dipadati-pengendara/](https://www.suarasurabaya.net/kelanakota/2020/psbb-surabaya-masih-dipadati-pengendara/)