

ANALISIS DINAMIK MODEL MANGSA PEMANGSA HOLLING-TANNER DENGAN ADANYA MAKANAN TAMBAHAN PADA PEMANGSA

Qurrotul Aini

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : qurrotul.17030214042@mhs.unesa.ac.id

Dian Savitri

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : diansavitri@unesa.ac.id

Abstrak

Artikel ini mempelajari model mangsa pemangsa Holling-Tanner tipe II dengan mengasumsikan adanya makanan tambahan. Analisis pada sistem dengan menentukan titik tetap dan kestabilan lokal masing-masing solusi. Hasil analisis kestabilan diperoleh lima titik tetap yaitu titik kepunahan semua populasi yang tidak stabil, titik kepunahan populasi pemangsa yang tidak stabil, titik kepunahan mangsa dan titik interior kedua populasi eksis yang stabil dengan syarat tertentu. Simulasi numerik dilakukan untuk mengetahui kesesuaian hasil analisis. Hasil simulasi menggambarkan perubahan solusi sistem berupa potret fase. Diagram bifurkasi hasil kontinuitas numerik terhadap parameter makanan tambahan pada pemangsa, yaitu η menunjukkan adanya bifurkasi Hopf saat $\eta = 0.44333809$ dan bifurkasi Transkritikal saat $\eta = 0.48095$. Pada simulasi dengan nilai parameter tingkat pertumbuhan pemangsa, yaitu β berbeda terjadi bifurkasi Transkritikal dan bifurkasi Saddle Node pada saat $0.92047 < \eta < 0.941161$, serta adanya sistem yang memiliki dua titik tetap stabil yaitu titik kepunahan mangsa dan titik kedua populasi bertahan hidup.

Kata kunci: Holling-Tanner tipe II, Bifurkasi Hopf, Bifurkasi Saddle Node dan Bifurkasi Transkritikal.

Abstract

In this article studied the model of predator prey Holling-Tanner type II by assuming the presence of additional food. Analysis on the system by determining the fixed point and local stability of each solution. The results of the stability analysis obtained four fixed points, those was the extinction point of all unstable populations, the point of extinction of unstable predator populations, the point of extinction of prey and the interior point of both populations that were stable with certain conditions. Numerical simulations were performed to determine the suitability of the analysis results. The simulation results illustrate the changes in system solutions in the form of phase portraits. Diagram bifurcation of the numerical continuity result against additional food in predator, those are η indicates the appearance of Hopf bifurcation when $\eta = 0.44333809$ and transcritical bifurcation when $\eta = 0.48095$. In simulation with predator growth rate parameter values, namely β , there was transcritical bifurcation and Saddle Node bifurcation when $0.92047 < \eta < 0.941161$ and shown that the system has two stable fixed points namely the point of extinction of prey and the point of both populations survives.

Keywords: Holling-Tanner type II, Hopf Bifurcation, Saddle Node Bifurcation and Transcritical Bifurcation.

PENDAHULUAN

Sistem mangsa pemangsa merupakan suatu model matematika yang telah dipelajari oleh beberapa ilmuwan. Model mangsa pemangsa menggambarkan adanya interaksi antara dua populasi, yaitu mangsa yang dimakan populasi lain dan pemangsa yang memburu serta memakan populasi lain. Model tersebut sesuai dengan fenomena alam dan berbagai interaksi spesies yang ada di dalamnya. Beberapa peneliti telah mempelajari, mengembangkan, dan memodifikasi model agar sesuai dengan kondisi alam sebenarnya

(Panigoro, 2014, Ali Kusananto, dkk. 2017 dan B.S.R.V. Prasad, dkk. 2019).

Dalam perkembangannya terdapat berbagai modifikasi model mangsa pemangsa dan proses predasi pemangsa terhadap mangsa. Proses predasi atau laju pemangsaan dikenal sebagai fungsi respon. Robert May (May, 1973) mengembangkan model mangsa pemangsa dengan menggunakan fungsi respon Holling (Holling, 1965) untuk menggambarkan proses predasi (Hassell, 1978) dan model Leslie (Leslie dan Gower, 1960) untuk menggambarkan dinamika model pertumbuhan pemangsa.

Karakter beberapa pemangsa yang aktif menjadi salah satu alasan membutuhkan makanan lebih dari satu mangsa dan beralih ke sumber makanan lain saat populasi mangsa utama terbatas. Srinivasu, dkk (2013) telah mengenalkan model mangsa pemangsa Lotka - Volterra dengan makanan tambahan untuk predator menggunakan fungsi respon Beddington DeAngelis. Penelitian yang dilakukan (Ulfa, dkk. 2017) juga mempertimbangkan makanan tambahan pada pemangsa dengan menggunakan fungsi respon Holling tipe II mengikuti model Leslie-Gower. Pada model tersebut menunjukkan bahwa makanan tambahan pada pemangsa dapat mencegah kepunahan mangsa. Kemudian (Basheer, dkk. 2019) mengusulkan model mangsa pemangsa Holling-Tanner menggunakan fungsi respon rasio dependen terhadap mangsa dengan makanan tambahan pada pemangsa dan menghasilkan empat titik tetap.

Permasalahan menarik pada interaksi populasi mangsa dan pemangsa yang terjadi di bidang pertanian adalah pengendalian serangga yang merupakan hama pada tanaman. Adanya hama pada tanaman dapat menyebabkan kerusakan pada tanaman sehingga dapat mengganggu ekosistem di lingkungan sekitar. Selama ini usaha yang dilakukan manusia dalam membasmi populasi hama dengan pemberian bahan kimia berbahaya yang disebut pestisida. Efek penggunaan pestisida tersebut memiliki dampak negatif yang menyebabkan kerusakan pada tanaman dan lingkungan maupun organisme lainnya (Ali Kusnanto, dkk. 2017). Untuk mengatasi permasalahan tersebut mulai dipertimbangkan adanya pengendalian hayati atau *biological control* sebagai solusi pengendalian hama yang bersifat ramah terhadap lingkungan.

Pengendalian hayati merupakan pemanfaatan populasi pemangsa, pathogen, parasitoid, serta populasi pesaing untuk menekan pertumbuhan pada populasi hama sehingga dapat mengurangi kerusakan yang ditimbulkan (Ali Kusnanto, dkk. 2017). Upaya dalam hal menarik pemangsa agar memakan serangga ataupun gulma pada tanaman maka diberikan sumber makanan tambahan di sekitar lokasi hama. Sumber makanan tambahan yang diberikan bersifat tidak bereproduksi dan tidak berinteraksi dengan mangsa (hama) seperti nektar, serbuk sari atau lain sebagainya.

Adanya penyediaan makanan tambahan berupa spesies non-hama dapat meningkatkan pertumbuhan pemangsa, namun juga dapat mengakibatkan konsumsi pemangsa terhadap hama menurun (B.S.R.V. Prasad, dkk. 2019). Hal ini perlu dipertimbangkan kuantitas dan kualitas dari makanan tambahan yang menjadi peran penting dalam pengendalian hama. Oleh karena itu dalam proses predasi diperlukan pengendalian hama yang dimediasi makanan.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan (Basheer, dkk. 2019), kami mengkaji kembali model mangsa pemangsa yang dimodelkan melalui model Holling-Tanner dengan mempertimbangkan makanan tambahan pada pemangsa. Kemudian melakukan modifikasi pada fungsi respon pemangsa terhadap mangsa berdasarkan model (Ulfa, dkk. 2017) menggunakan fungsi respon Holling tipe II. Populasi mangsa bukanlah penyebab satu-satunya terjadinya laju pemangsaan, tetapi juga memodifikasi dengan memasukkan makanan tambahan untuk pemangsa dalam hal waktu penanganan. Perbedaan model yang dikonstruksi mengacu rujukan utama (Basheer, dkk. 2019) terletak pada penggunaan fungsi respon. Model mangsa pemangsa pada artikel tersebut menggunakan fungsi respon rasio dependen.

Tujuan penelitian ini untuk melakukan analisis dinamik yang meliputi analisis titik tetap, analisis kestabilan lokal di sekitar titik tetap, dan pada bagian akhir penelitian dilakukan simulasi numerik untuk mendukung hasil perhitungan analitik. Simulasi numerik dilakukan dengan merujuk nilai parameter yang digunakan Basheer, dkk (2019), kemudian membandingkan hasil simulasi tersebut dengan hasil yang diperoleh (Basheer, dkk. 2019).

KAJIAN TEORI

Sistem Persamaan Diferensial

Suatu persamaan yang memuat turunan-turunan dari fungsi yang tidak diketahui terhadap satu atau lebih variabel bebas merupakan persamaan diferensial. Contohnya:

$$\frac{d^4u}{dx^4} + \frac{d^2u}{dx^2} + u^2 = \cos x \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \quad (2.2)$$

Pada persamaan (2.1) merupakan persamaan diferensial terhadap suatu fungsi u serta bergantung pada variabel x . Sedangkan persamaan (2.2) merupakan persamaan diferensial terhadap suatu fungsi u terhadap tiga variabel yaitu t, x dan y (J. Olver, 2014).

Kumpulan dari n buah persamaan diferensial dimana $n \geq 2$, dengan g merupakan fungsi yang tidak diketahui adalah definisi dari sistem persamaan diferensial (Trench, 2013). Diberikan contoh n fungsi tidak diketahui pada sistem persamaan diferensial orde satu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= g_1(t, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ \dot{y}_2 &= g_2(t, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= g_n(t, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)\end{aligned}$$

Sistem Dinamik

Suatu keadaan yang dipengaruhi oleh perubahan waktu (t) biasa disebut dengan istilah sistem dinamik. Jika pada sistem dinamik perubahan pada t kontinu maka dapat dinyatakan sistem persamaan diferensial biasa dan merupakan sistem yang diketahui nilainya dimasa mendatang apabila diberikan kondisi pada masa sekarang ataupun pada masa lalu (Nagle, dkk. 2012).

Titik Tetap

Persamaan diferensial menurut pendapat (Olsder & Woude, 1998) sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.3)$$

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik tetap dari persamaan (2.3) jika $f(\bar{x}) = 0$.

Untuk sistem persamaan diferensial tak linear, analisis kestabilannya dilakukan melalui pelinearan. Misalkan terhadap persamaan (2.3) menggunakan ekspansi Taylor disekitar titik tetap sehingga diperoleh:

$$\dot{x} = Ax + \varphi(x) \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) merupakan persamaan diferensial tak linear dengan A matriks Jacobi

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

dan $\varphi(x)$ suku berorde tinggi yang bersifat,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0.$$

Pelinearan Persamaan

Pada persamaan (2.4) Ax disebut pelinearan sistem persamaan tak linear (Tu, 1994), yang dituliskan dalam bentuk

$$\dot{x} = Ax \quad (2.6)$$

Jika A berukuran $n \times n$, maka vektor tak nol $x \in \mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x , yakni (Anton & Rolles, 2014):

$$Ax = \lambda x \quad (2.7)$$

Vektor x disebut vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen λ . Nilai eigen dari matriks berukuran $n \times n$ pada persamaan (2.7) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$(A - \lambda I)x = 0. \quad (2.8)$$

Dengan I merupakan matriks identitas. Sehingga persamaan mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0. \quad (2.9)$$

Analisis Kestabilan Titik Tetap

Analisis kestabilan lokal solusi sistem untuk masing-masing titik tetap berdasarkan nilai eigen yang diperoleh, Nilai eigen disimbolkan dengan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Menurut Tu (1994) kestabilan titik tetap mempunyai sifat sebagai berikut:

1. Stabil, jika:
 - a. Setiap nilai eigen real bernilai tak positif ($\lambda_i \leq 0, \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n$) atau
 - b. Setiap komponen real dari nilai eigen kompleks bernilai tak positif ($Re(\lambda_i) \leq 0, \lambda_i \in \mathbb{C}, \forall i = 1, \dots, n$).
2. Stabil Asimtotik, jika:
 - a. Setiap nilai eigen bernilai real negatif ($\lambda_i < 0, \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n$) atau
 - b. Setiap komponen real dari nilai eigen kompleks bernilai negatif ($Re(\lambda_i) < 0, \lambda_i \in \mathbb{C}, \forall i = 1, \dots, n$).
3. Tidak stabil, jika:
 - a. Ada nilai eigen real bernilai positif ($\exists \lambda_i > 0, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$) atau

- b. Ada komponen real dari nilai eigen kompleks bernilai positif ($\exists \lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n, \text{Re}(\lambda_i) > 0$).

Sistem mangsa pemangsa

Sistem dua dimensi dari persamaan diferensial secara umum pada interaksi populasi mangsa dan pemangsa (Freedman, 1980), sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= xg(x) - p(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\delta y + p(x)y. \end{aligned}$$

Kepadatan populasi mangsa dan pemangsa masing-masing dinyatakan sebagai x dan y . Parameter δ adalah kematian alami populasi pemangsa. Fungsi $g(x)$ adalah tingkat pertumbuhan populasi mangsa dan $p(x)$ adalah fungsi respon. Fungsi respon merupakan laju pemangsaan pemangsa terhadap mangsa.

Model sederhana interaksi mangsa pemangsa dikemukakan oleh Lotka dan Volterra secara terpisah tetapi saat ini model tersebut dikenal dengan model Lotka - Volterra (Alfred J Lotka (1925) dan Vito Volterra (1926)). Sedangkan model interaksi mangsa pemangsa menurut Basheer (2019) mengikuti model Lotka Volterra dengan adanya makanan tambahan, dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1 - x) - f(x, y, \xi), \\ \frac{dy}{dt} &= -\delta y + \epsilon f(x, y, \xi) + f_1(x, y, \xi), \end{aligned}$$

dengan $f(x, y, \xi)$ mewakili proses predasi atau fungsi respon pada populasi mangsa. Bentuk $f_1(x, y, \xi)$ mewakili keuntungan dari adanya makanan tambahan.

Sistem Holling-Tanner dianggap sebagai salah satu model mangsa pemangsa (Murray, 1989). Pemangsa tumbuh secara logistik dengan laju pertumbuhan intrinsik dan daya dukung lingkungan sebanding dengan ukuran mangsanya. Sistem mangsa pemangsa Holling-Tanner (Basheer, dkk. 2019) dengan fungsi respon Holling tipe II dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1 - x) - \frac{sx y}{x+m}, \\ \frac{dy}{dt} &= \delta y \left(\beta - \frac{y}{x} \right). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Persamaan (2.10) merupakan hasil non-dimensi pada-(Banerje, 2012) dengan fungsi respon yang digunakan berbeda.

Model Holling-Tanner tergantung pada jenis fungsi respon yang dipilih. Holling (1965) mengusulkan tiga jenis fungsi respon yang mewakili predasi populasi pemangsa terhadap mangsa, yaitu fungsi respon Holling tipe I, fungsi respon Holling tipe II, dan fungsi respon Holling tipe III. Fungsi respon Holling tipe I adalah fungsi peningkatan linear, fungsi respon Holling tipe II berbentuk hiperbolik, dan fungsi respon Holling tipe III sigmoid.

Bifurkasi

Misalkan sebuah sistem berbentuk:

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

dimana $x \in \mathbb{R}^2$ dan $\mu \in \mathbb{R}$. Sebuah nilai μ_0 yang membuat bidang vektor $f(x, \mu)$ menjadi tidak stabil secara struktur disebut nilai bifurkasi.

Secara umum menurut Lynch (2010), definisi bifurkasi dinyatakan sebagai sebuah bidang vektor $f \in \mathbb{R}^2$ yang terdiferensialkan secara kontinu, disebut stabil secara struktur (*structurally stable*) jika terdapat gangguan kecil pada sistem $\dot{x} = f(x)$ menyebabkan perilaku tidak merubah secara kualitatif. Perubahan kecil dalam suatu sistem menyebabkan perubahan perilaku, maka f disebut tidak stabil secara struktur (Panigoro, 2014).

Gejala bifurkasi ditandai dengan adanya perubahan kestabilan atau perilaku dari suatu sistem ketika nilai parameter dari sistem tersebut diubah-ubah (Puspita, 2016). Bifurkasi lokal terjadi jika perubahan perilaku dinamik dari sistem terjadi di sekitar titik tetap. Bifurkasi global terjadi secara tiba-tiba dalam skala yang besar pada sistem dinamik (Sa'adah, dkk. 2016).

Bifurkasi lokal terdiri dari 4 jenis diantaranya:

1. Bifurkasi *Saddle-Node*

Bifurkasi *saddle-node* diwakili persamaan berikut

$$\dot{x} = \mu - x^2, \quad \dot{y} = -y \tag{2.10a}$$

Titik tetap didapatkan dengan menyelesaikan persamaan $\dot{x} = 0$ dan $\dot{y} = 0$. Diperoleh dua kondisi yaitu kondisi nol, satu atau dua titik tetap yang bergantung pada nilai μ . Ketika $\mu < 0$, tidak ada titik tetap. Ketika $\mu = 0$ memiliki satu titik tetap nonhiperbolik di titik

asal. Sedangkan ketika $\mu > 0$ memiliki dua titik tetap yang diperoleh dengan mengenklik ruas kanan persamaan (2.10a), sehingga diperoleh titik tetap $A = (\sqrt{\mu}, 0)$ dan $B = (-\sqrt{\mu}, 0)$, dengan A bersifat *node* stabil dan B bersifat *saddle* (Lynch, 2010).

2. Bifurkasi Transkritikal

Bifurkasi transkritikal diwakili persamaan berikut

$$\dot{x} = \mu x - x^2, \quad \dot{y} = -y \quad (2.10b)$$

Pada sistem (2.10b) diperoleh dua kondisi yaitu kondisi satu atau dua titik tetap yang bergantung pada nilai μ . Ketika $\mu < 0$, memiliki dua titik tetap yang diperoleh dengan mengenklik ruas kanan persamaan (2.10b), sehingga diperoleh titik tetap yaitu di $O = (0,0)$ dan $A = (\mu, 0)$. Di titik asal O bersifat stabil *node* dan titik A bersifat *saddle*. Ketika $\mu = 0$ memiliki satu titik tetap nonhiperbolik. Ketika $\mu > 0$ memiliki dua titik tetap, sehingga diperoleh titik tetap $O = (0,0)$ dan $B = (\mu, 0)$ dengan titik asal bersifat *saddle* dan B bersifat *node* stabil (Lynch, 2010).

3. Bifurkasi Pitchfork

Bifurkasi *Pitchfork* diwakili persamaan berikut

$$\dot{x} = \mu x - x^3, \quad \dot{y} = -y \quad (2.10c)$$

Sistem (2.10c) memiliki tiga titik tetap yaitu $O = (0,0)$, $A = (\sqrt{\mu}, 0)$ dan $B = (-\sqrt{\mu}, 0)$ dengan titik asal bersifat *saddle* dan titik A, B keduanya bersifat *node* stabil, (Lynch, 2010). Nilai bifurkasi adalah $\mu_0 = 0$, dengan μ parameter bifurkasi *Pitchfork*.

4. Bifurkasi Hopf

Adanya nilai eigen imajiner pada pelinieran system merupakan salah satu tanda terjadinya Bifurkasi *Hopf* (2.10d). Bifurkasi *Hopf* diwakili dengan persamaan berikut.

$$\dot{r} = r(\mu - r^2), \quad \dot{\theta} = -1 \quad (2.10d)$$

Di titik asal hanya satu titik tetap karena $\dot{\theta} \neq 0$. Tidak ada limit cycle jika $\mu \leq 0$, dan ada satu limit cycle jika $\mu > 0$. Kondisi pertama ketika $\mu \leq 0$, titik asal stabil fokus, dengan $\dot{\theta} < 0$ searah jarum jam. Kondisi kedua ketika $\mu > 0$, dititik asal fokus tidak stabil dan limit cycle stabil di $r = \sqrt{\mu}$ karena $\dot{r} > 0$, jika $r < 0 < \sqrt{\mu}$ dan $\dot{r} < 0$, jika $r > \sqrt{\mu}$, (Lynch, 2010).

METODE PENELITIAN

Model interaksi mangsa pemangsa yang dikaji adalah model matematika Holling-Tanner pada interaksi dua spesies dengan menggunakan fungsi respon Holling tipe II dengan mempertimbangkan makanan tambahan pada pemangsa. Berikut ini adalah tahapan dalam rancangan penelitian:

1. Analisis Titik Tetap

Analisis titik tetap menggunakan solusi ekuilibrium dengan membuat ruas kanan masing-masing persamaan sama dengan 0.

2. Analisis Kestabilan Lokal Titik Tetap

Analisis kestabilan lokal dilakukan berdasarkan kriteria nilai eigen dari matriks Jacobian. Setelah sistem linear, kemudian substitusikan titik tetap pada matriks Jacobi. Setelah disubstitusikan maka diperoleh matriks baru dan mencari nilai eigen sistem tersebut.

3. Simulasi Numerik

Simulasi numerik sistem mangsa pemangsa menggunakan aplikasi P-plane dan Matcont. Simulasi numerik dilakukan untuk mengkonfirmasi hasil perhitungan analisis kestabilan lokal masing-masing solusi sistem. Hasil simulasi numerik ditampilkan dalam potret fase. Kontinuasi numerik melalui diagram bifurkasi mengilustrasikan perilaku solusi sistem ketika nilai parameter makanan tambahan diubah-ubah.

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Model Matematika

Sifat pemangsa yang aktif bergerak menjadi alasan kemungkinan mendapatkan target mangsa lebih dari satu atau beralih kesumber makanan lainnya. Hal ini mempertimbangkan populasi mangsa terbatas dan membutuhkan makanan tambahan (Ulfa, dkk. 2017).

Berdasarkan kajian Ulfa, dkk (2017) dan Basheer, dkk (2019), maka dikonstruksi model mangsa pemangsa Holling-Tanner. Fungsi respon yang digunakan merupakan Holling tipe II.

Model mangsa pemangsa Holling-Tanner pada persamaan (2.10), mempertimbangkan makanan tambahan. Dengan $x(t)$ dan $y(t)$ mewakili jumlah kepadatan populasi mangsa dan pemangsa pada

satuan waktu t . Dimana $a, \eta, s, \delta, \beta$, dan m merupakan parameter positif. Istilah $a\eta$ mewakili kuantitas makanan tambahan yang terlihat oleh pemangsa relatif terhadap hama. Parameter s merupakan tingkat serangan pemangsa terhadap mangsa sedangkan β mewakili tingkat pertumbuhan instrinsik dari pemangsa serta m merupakan waktu yang dibutuhkan pemangsa dalam mencari dan mencerna mangsa. Asumsi adanya makanan tambahan dalam model ini adalah:

- Makanan tambahan harus membantu meningkatkan daya dukung pemangsa,
- Makanan tambahan harus membantu meningkatkan angka kelahiran pemangsa,
- Bila terjadi kepadatan hama yang rendah, pemangsa membutuhkan makanan tambahan untuk bertahan hidup.

Berdasarkan asumsi tersebut, hasil konstruksi model mangsa pemangsa Holling-Tanner dengan mempertimbangkan makanan tambahan pada pemangsa menggunakan fungsi respon Holling-tipe II sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{sxy}{x+a\eta+m} \tag{2.11}$$

$$\frac{dy}{dt} = \delta y \left(\beta - \frac{y}{x+a\eta} \right) + \delta y \left(\frac{\eta}{x+a\eta} \right).$$

Persamaan Holling-Tanner tipe II (2.11) disederhanakan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{sxy}{x+a\eta+m} \tag{2.12}$$

$$\frac{dy}{dt} = \delta y \left(\beta + \frac{\eta-y}{x+a\eta} \right).$$

ANALISIS

1. Eksistensi Solusi (Titik Tetap)

Langkah termudah dalam mempelajari dinamik dari suatu persamaan diferensial yaitu dengan mengidentifikasi titik tetap yang dilanjutkan dengan analisis dinamik disekitar titik tetap tersebut. Titik tetap pada persamaan (2.12) didapatkan dari $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$, sehingga diperoleh:

$$\left(1 - x^* - \frac{sy^*}{x^*+a\eta+m} \right) = 0, \tag{2.13}$$

$$x^* = 0,$$

$$\left(\delta\beta + \frac{\delta\eta}{x^*+a\eta} - \frac{\delta y^*}{x^*+a\eta} \right) = 0, \tag{2.14}$$

$$y^* = 0.$$

Persamaan (2.14) dapat disederhanakan menjadi

$$\delta\beta + \frac{\delta\eta}{x^*+a\eta} = \frac{\delta y^*}{x^*+a\eta}$$

$$\left(\delta\beta + \frac{\delta\eta}{x^*+a\eta} \right) (x^*+a\eta) = \delta y^*,$$

$$\left(\beta + \frac{\eta}{x^*+a\eta} \right) (x^*+a\eta) = y^*,$$

$$(\beta x^* + \beta a\eta) + \eta = y^*. \tag{2.15}$$

Persamaan (2.13) dapat ditulis kembali sebagai:

$$(1-x^*) = \frac{sy^*}{x+a\eta+m}$$

$$(1-x^*)(x^*+a\eta+m) = sy^*. \tag{2.16}$$

- Substitusi $x^* = 0, y^* = 0$ ke persamaan (2.13) dan persamaan (2.14) diperoleh titik tetap $E_1 = (0,0)$.
- Substitusikan $x^* = k, y^* = 0$ ke persamaan (2.13) dan persamaan (2.14) diperoleh titik tetap $E_2 = (1,0)$,
- Substitusi $x^* = 0, y^* = k$ ke persamaan (2.13) dan persamaan (2.14) sehingga diperoleh titik tetap $E_3 = (0, a\beta\eta + \eta)$.

Substitusikan persamaan (2.15) ke persamaan (2.16), menghasilkan

$$(1-x^*)(x^*+a\eta+m) = s((\beta x^* + \beta a\eta) + \eta),$$

$$x^* + a\eta + m - x^{*2} - a\eta x^* - mx^* = s\beta x^* + s\beta a\eta + s\eta,$$

$$s\beta x^* + s\beta a\eta + s\eta + x^{*2} + a\eta x^* + mx^* - x^* - a\eta - m = 0,$$

$$x^{*2} + (s\beta + a\eta + m - 1)x^* + (s\beta a\eta + s\eta - a\eta - m) = 0.$$

Berdasarkan uraian yang telah dipaparkan sebelumnya, diperoleh persamaan kuadrat

$$Ax^{*2} + Bx^* + C = 0, \tag{2.17}$$

dengan $A = 1, B = (s\beta + a\eta + m - 1)$, dan $C = (s\beta a\eta + s\eta - a\eta - m)$. Akar-akar persamaan (2.17) adalah

$$x_{1,2}^* = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Titik tetap harus bernilai real positif, jika $B^2 - 4AC > 0, B < 0$, dan $C > 0$. Koefisien B bernilai negatif jika $s\beta + a\eta + m < 1$, maka persamaan (2.17) memiliki dua akar positif, akibatnya ada dua titik tetap interior, yaitu $E_{4a} = (x_1^*, y_1^*)$ dan $E_{4b} = (x_2^*, y_2^*)$.

Titik tetap interior, yaitu titik ketika kedua populasi mangsa dan pemangsa hidup berdampingan, dengan

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, & x_2^* &= \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \\ y_1^* &= (\beta a \eta + \beta x_1^*) + \eta, & y_2^* &= (\beta a \eta + \beta x_2^*) + \eta. \end{aligned}$$

Hasil analisis titik tetap diperoleh empat titik tetap yaitu $E_1 = (0,0), E_2 = (1,0), E_3 = (0, a\beta\eta + \eta)$ dan titik tetap interior $E_{4ab} = (x_{1,2}^*, y_{1,2}^*)$

Titik tetap $E_1 = (0,0)$ merepresentasikan kepunahan kedua populasi, yaitu mangsa dan pemangsa. Titik tetap $E_2 = (1,0)$ merepresentasikan punahnya pemangsa. Titik tetap $E_3 = (0, a\beta\eta + \eta)$ merepresentasikan kepunahan populasi mangsa. Koeksistensi populasi mangsa dan populasi pemangsa direpresentasikan oleh titik tetap interior $E_{4ab} = (x_{1,2}^*, y_{1,2}^*)$, yaitu ketika kedua populasi tersebut eksis.

2. Analisis Kestabilan Titik Tetap

Analisis kestabilan lokal titik tetap yang dihasilkan dapat ditentukan dengan melakukan linearisasi terhadap model (2.12) di sekitar titik tetap. Matriks Jacobi model (2.12) adalah

$$J = \begin{pmatrix} x \left(-1 + \frac{sy}{(x+a\eta+m)^2} \right) & -\frac{sx}{x+a\eta+m} \\ \frac{\delta y(-\eta+y)}{(x+a\eta)^2} & -\frac{\delta y}{x+a\eta} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

diperoleh kestabilan titik tetap dari nilai eigen yang dihasilkan oleh persamaan karakteristik matriks (2.17) yang dievaluasi pada masing-masing titik tetap tersebut.

1. Kestabilan Titik Tetap $E_1 = (0,0)$

Substitusikan titik tetap E_1 ke dalam matriks Jacobi,

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \left(\beta + \frac{1}{a} \right) \end{pmatrix}.$$

Kemudian mencari nilai eigen menggunakan persamaan karakteristik $\det(J(0,0) - \lambda I) = 0$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} (J(0,0) - \lambda I) &= 0, \\ \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & \delta \left(\beta + \frac{1}{a} \right) - \lambda \end{pmatrix} &= 0, \\ -(\lambda - 1)(a\delta\beta - a\lambda + \delta) &= 0. \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = \frac{\delta(a\beta+1)}{a}.$$

Parameter bernilai positif, diperoleh $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 > 0$. Dari nilai eigen yang dihasilkan, dapat disimpulkan bahwa kestabilan E_1 bersifat tidak stabil karena kedua nilai eigen positif (Strogatz, 1994).

2. Kestabilan Titik Tetap $E_2 = (1,0)$

Matriks Jacobi di titik tetap E_2 adalah

$$J_2 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{s}{a\eta+m+1} \\ 0 & \delta \left(\beta + \frac{\eta}{a\eta+1} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Persamaan karakteristik matriks (2.18) dapat diuraikan menjadi

$$-(\lambda + 1)(\delta\beta a\eta - a\eta\lambda + \delta\beta + \delta\eta - \lambda) = 0,$$

sehingga nilai-nilai eigen matriks (2.18) adalah

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = \frac{\delta(\beta a\eta + \beta + \eta)}{a\eta + 1}$$

Parameter bernilai positif, diperoleh $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 > 0$. Dari nilai eigen yang dihasilkan, dapat disimpulkan bahwa kestabilan E_2 bersifat tidak stabil karena salah satu nilai eigen yaitu $\lambda_2 > 0$ (Strogatz, 1994).

3. Kestabilan Titik Tetap $E_3 = (0, a\beta\eta + \eta)$

Matriks Jacobi di titik tetap E_3 adalah

$$J_3 = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{s(a\beta\eta + \eta)}{a\eta + m} \right) & 0 \\ \frac{\delta(a\beta\eta + \eta)\beta}{a\eta} & \left(-\frac{\delta(a\beta\eta + \eta)}{a\eta} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Persamaan karakteristik matriks (2.19) dapat diuraikan menjadi

$$(sa\beta\eta + a\eta\lambda - a\eta + s\eta + \lambda m - m)(\delta a\beta\eta + a\eta\lambda + \delta\eta) = 0,$$

sehingga nilai-nilai eigen matriks (2.19) adalah

$$\lambda_1 = -\frac{sa\beta\eta - a\eta + s\eta - m}{a\eta + m} \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = -\frac{\delta(a\beta+1)}{a},$$

karena parameter bernilai positif, diperoleh $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$. Dengan demikian kestabilan titik tetap E_3 bersifat stabil karena kedua nilai eigen bernilai negatif, dengan syarat $sa\beta\eta + s\eta > m + a\eta$.

4. Kestabilan Titik Tetap $E_4 = (x^*, y^*)$

Proses linearisasi persamaan (2.12) di titik tetap interior (x^*, y^*) diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut:

$$J_4 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

dengan

$$a_{11} = x^* \left(-1 + \frac{sy^*}{(x^* + a\eta + m)^2} \right),$$

$$a_{12} = -\frac{sx^*}{x^* + a\eta + m},$$

$$a_{21} = \frac{\delta y^* (-\eta + y^*)}{(x^* + a\eta)^2},$$

$$a_{22} = -\frac{\delta y^*}{(x^* + a\eta)},$$

Kemudian persamaan karakteristik yang berasal dari

$$\det(J_4(x^*, y^*) - \lambda I) = 0,$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & -a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

dapat diuraikan menjadi

$$(a_{11} - \lambda)(-a_{22} - \lambda) - (-a_{12}a_{21}) = 0,$$

Sehingga diperoleh persamaan kuadrat

$$\lambda^2 - (a_{11} - a_{22})\lambda + ((a_{12} - a_{21}) - a_{11}a_{22}) = 0,$$

menghasilkan nilai eigen berikut

$$\lambda_1 = \frac{(a_{11} - a_{22}) + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 - 4((a_{12} - a_{21}) - a_{11}a_{22})}}{2} \text{ dan}$$

$$\lambda_2 = \frac{(a_{11} - a_{22}) - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 - 4((a_{12} - a_{21}) - a_{11}a_{22})}}{2}.$$

Karena semua nilai parameter bernilai positif, berdasarkan sifat kestabilan nilai eigen λ_1 dan λ_2 , diperoleh sifat kestabilan titik tetap interior E_4 yang dapat dilihat pada tabel 1 berikut.

Tabel.1. Kestabilan titik tetap interior $E_4 = (x^*, y^*)$

| Syarat | Sifat |
|---|-------------------------|
| $\begin{pmatrix} -a_{11} \\ + a_{22} \end{pmatrix}^2 - 4((a_{12} - a_{21}) - a_{11}a_{22}) > 0$ | Node Tidak stabil |
| $\begin{pmatrix} -a_{11} \\ + a_{22} \end{pmatrix}^2 - 4((a_{12} - a_{21}) - a_{11}a_{22}) < 0$ | Saddle atau Node stabil |
| $\in \mathbb{R}$ | Saddle |

| | | |
|---|-------------------------|---------------------|
| $\begin{pmatrix} -a_{11} \\ + a_{22} \end{pmatrix}^2 - 4((a_{12} - a_{21}) - a_{11}a_{22}) > 0$ | $(a_{11} - a_{22}) > 0$ | Spiral tidak stabil |
| $\begin{pmatrix} -a_{11} \\ + a_{22} \end{pmatrix}^2 - 4((a_{12} - a_{21}) - a_{11}a_{22}) < 0$ | $(a_{11} - a_{22}) < 0$ | Spiral stabil |
| $\in \mathbb{C}$ | $(a_{11} - a_{22}) = 0$ | Center |

3. SIMULASI NUMERIK

Simulasi numerik dilakukan untuk melihat kesesuaian dengan hasil analisis. Simulasi numerik pertama menggunakan nilai parameter yang diambil dari artikel (Basheer dkk, 2019) dan simulasi numerik kedua berdasarkan asumsi hanya untuk parameter β . Nilai-nilai parameter tersebut disajikan pada Tabel 2 berikut:

Tabel 2. Notasi dan Nilai Parameter

| Notasi | Nilai | Keterangan |
|----------|----------|-------------------|
| s | 0.22 | Basheer dkk, 2019 |
| m | 0.070577 | Basheer dkk, 2019 |
| a | 0.3185 | Basheer dkk, 2019 |
| δ | 0.0322 | Basheer dkk, 2019 |
| β | 3.5 | Basheer dkk, 2019 |
| | 2.5 | asumsi simulasi 2 |
| η | 0.443 | asumsi simulasi 1 |
| | 0.92 | asumsi simulasi 2 |

Untuk tahap simulasi numerik ada dua, yaitu simulasi pertama menggunakan nilai parameter yang sama dengan yang dilakukan (Basheer, dkk. 2019) untuk $\beta = 3.5$ dan simulasi kedua mengasumsikan $\beta = 2.5$ berbeda dengan yang dilakukan (Basheer, dkk. 2019). Hasil simulasi numerik masing-masing titik tetap ditampilkan melalui potret fase menggunakan *software* Pplane.

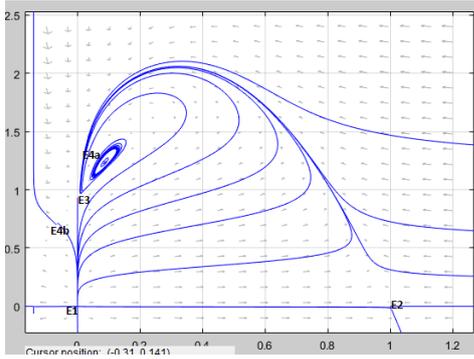
Simulasi berikutnya untuk mengetahui perubahan solusi sistem dengan melakukan kontinuitas numerik yang digambarkan dalam diagram bifurkasi menggunakan MatCont. Kontinuitas numerik dilakukan terhadap parameter makanan tambahan yaitu η .

4.2.1 Simulasi Numerik melalui Potret Fase

Simulasi 1

Simulasi numerik berdasarkan parameter pada Tabel 2 dengan $\beta = 3.5$, diilustrasikan melalui potret fase menggunakan *software* Pplane, dengan asumsi

untuk nilai parameter makanan tambahan η berbeda, yaitu $\eta = 0.441$, $\eta = 44333809$, dan $\eta = 0.48095$.



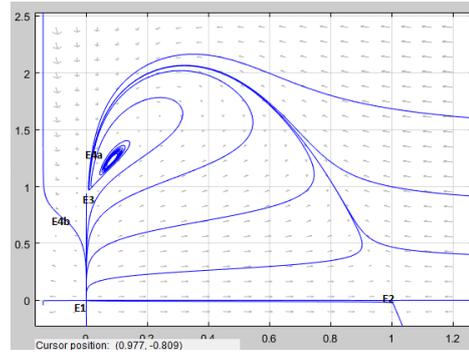
Gambar 1. Potret fase dengan $\beta = 3.5$ dan $\eta = 0.441$.

Berdasarkan nilai parameter untuk $\beta = 3.5$ dan $\eta = 0.441$ diperoleh titik tetap yang eksis adalah E_1 , E_2 , E_3 , dan E_{4a} sedangkan E_{4b} tidak eksis karena bernilai negatif. Secara lengkap ditampilkan dalam Tabel 3 berikut.

Tabel 3. Nilai Eigen dan Kestabilan saat $\eta = 0.441$.

| Titik Tetap Eksis | Nilai Eigen | Sifat Kestabilan |
|--------------------------|--|---------------------|
| $E_1 (0,0)$ | $\lambda_1 = 0.21379$ $\lambda_2 = 1$ | simpul tidak stabil |
| $E_2 (1,0)$ | $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 0.12515$ | pelana tidak stabil |
| $E_3 (0, 0.9326)$ | $\lambda_1 = 0.21379$ $\lambda_2 = 0.02778$ | simpul tidak stabil |
| $E_{4a}(0.0866, 1.2358)$ | $\lambda_1 = 0.00119 + 0.08868i$ $\lambda_2 = 0.00119 - 0.08868i$ | spiral tidak stabil |

Potret fase untuk $\beta = 3.5$ dan $\eta = 0.44333809$ terlihat perubahan pada salah satu solusi sistem (2.12) menjadi center yang ditampilkan pada Gambar 2.



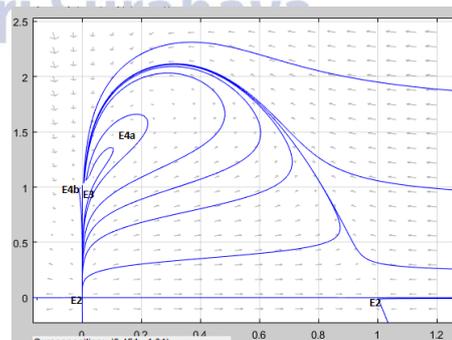
Gambar 2. Potret fase dengan $\beta = 3.5$ dan $\eta = 0.44333809$.

Berdasarkan nilai parameter untuk $\beta = 3.5$ dan nilai parameter untuk $\eta = 0.44333809$ diperoleh titik tetap eksis dan jenis kestabilan yang ditampilkan dalam Tabel 4 berikut.

Tabel 4. Sifat Kestabilan saat $\eta = 0.44333809$

| Titik Tetap Eksis | Nilai Eigen | Sifat Kestabilan |
|--------------------------|--|---------------------|
| $E_1 (0,0)$ | $\lambda_1 = 0.21379$ $\lambda_2 = 1$ | simpul tidak stabil |
| $E_2 (1,0)$ | $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 0.12521$ | pelana tidak stabil |
| $E_3 (0, 0.9375)$ | $\lambda_1 = -0.21379$ $\lambda_2 = 0.02606$ | pelana tidak stabil |
| $E_{4a}(0.0839, 1.2314)$ | $\lambda_1 = +0.0865i$ $\lambda_2 = -0.0865i$ | center stabil |

Pada potret fase hasil simulasi numerik untuk $\beta = 3.5$ dan $\eta = 0.48095$, terjadi perubahan salah satu solusi sistem (2.12) yang ditampilkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Potret fase pada $\beta = 3.5$ dan $\eta = 0.48095$

Berdasarkan nilai parameter untuk $\beta = 3.5$ dan nilai parameter untuk $\eta = 0.48095$ diperoleh titik tetap eksis dan jenis kestabilan seperti pada Tabel 5 berikut.

Tabel 5. Nilai Eigen dan Kestabilan saat $\eta = 0.48095$

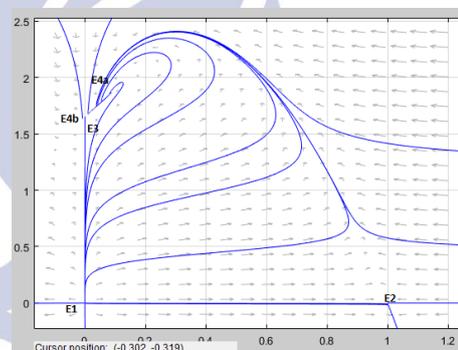
| Titik Tetap Eksis | Nilai Eigen | Sifat Kestabilan |
|------------------------------|---|---------------------|
| $E_1 (0,0)$ | $\lambda_1 = 0.21379$ $\lambda_2 = 1$ | simpul tidak stabil |
| $E_2 (1,0)$ | $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 0.12613$ | pelana |
| $E_3 (0, 1.01708)$ | $\lambda_1 = -0.21379$ $\lambda_2 = -0.000034$ | simpul stabil |
| $E_{4a} (0.000001, 1.01709)$ | $\lambda_1 = 0.0000034$ $\lambda_2 = -0.21379$ | spiral tidak stabil |
| $E_{4b} (0.00624, 1.03892)$ | $\lambda_1 = -0.00018$ $\lambda_2 = -0.18893$ | simpul stabil |

| Titik Tetap Eksis | Nilai Eigen | Sifat Kestabilan |
|---------------------------|--|---------------------|
| $E_1 (0,0)$ | $\lambda_1 = 0.181598$ $\lambda_2 = 1$ | simpul tidak stabil |
| $E_2 (1,0)$ | $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 0.0931735$ | pelana tidak stabil |
| $E_3 (0, 0.80831)$ | $\lambda_1 = -0.181598$ $\lambda_2 = 0.1686438$ | pelana tidak stabil |
| $E_{4a} (0.3417, 1.6625)$ | $\lambda_1 = -0.02359 + 0.17267i$ $\lambda_2 = -0.02359 - 0.17267i$ | spiral stabil |

Potret fase untuk nilai parameter yang diasumsikan adalah $\beta = 2.5$ dan $\eta = 0.92047$ terlihat perubahan pada salah satu solusi sistem (2.12), yaitu pada titik tetap E_3 menjadi stabil yang ditampilkan pada Gambar 5.

Simulasi 2

Simulasi numerik 2 dilakukan dengan mengasumsikan nilai parameter $\beta = 2.5$ dan memilih nilai parameter makanan tambahan η yang berbeda-beda, yaitu $\eta = 0.45$, $\eta = 0.92047$, dan $\eta = 0.941161$. Hasil simulasi ditampilkan melalui potret fase pada Gambar 4 - 6 berikut.

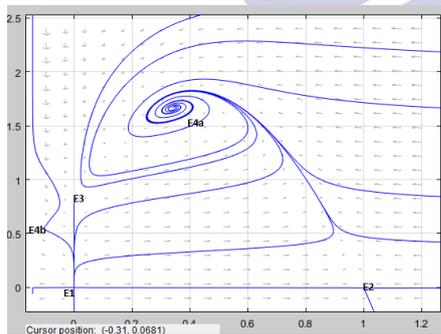


Gambar 5 Potret fase pada $\beta = 2.5$ dan $\eta = 0.92047$.

Berdasarkan asumsi untuk nilai parameter $\beta = 2.5$ dan nilai parameter $\eta = 0.92047$ diperoleh titik tetap E_1, E_2, E_3 , dan E_{4a} eksis dan terdapat dua titik tetap yang stabil dengan jenis kestabilan secara lengkap ditampilkan dalam Tabel 7 berikut.

Tabel 7. Nilai Eigen dan Kestabilan saat $\eta = 0.92047$

| Titik Tetap Eksis | Nilai Eigen | Sifat Kestabilan |
|-------------------|---|---------------------|
| $E_1 (0,0)$ | $\lambda_1 = 0.181598$ $\lambda_2 = 1$ | Simpul tidak stabil |
| $E_2 (1,0)$ | $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 0.1034107$ | pelana tidak stabil |



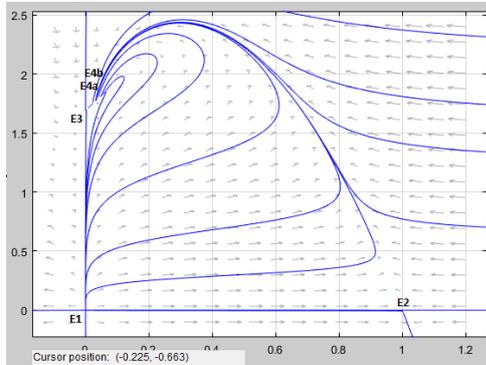
Gambar 4 Potret fase pada $\beta = 2.5$ dan $\eta = 0.45$.

Berdasarkan asumsi untuk $\beta = 2.5$ dan $\eta = 0.45$ diperoleh titik tetap eksis adalah E_1, E_2, E_3 , dan E_{4a} sedangkan E_{4b} tidak eksis karena bernilai negatif dan jenis kestabilan yang ditampilkan dalam Tabel 6 berikut.

Tabel 6. Nilai Eigen dan Kestabilan saat $\eta = 0.45$

| | | |
|---------------------------|--|---------------|
| $E_3 (0, 1.65255)$ | $\lambda_1 = -0.1815989$ $\lambda_2 = -0.00009901$ | Simpul stabil |
| $E_{4a}(0.0868, 1.86959)$ | $\lambda_1 = -0.03464 + 0.03827i$ $\lambda_2 = -0.03464 - 0.03827i$ | Spiral Stabil |

Potret fase untuk $\beta = 2.5$ dan $\eta = 0.9411161$ terlihat perubahan pada salah satu solusi sistem (2.12) yang ditampilkan pada Gambar 6.



Gambar 6 Potret fase pada $\beta = 2.5$ dan $\eta = 0.9411161$

Berdasarkan asumsi untuk nilai parameter $\beta = 2.5$ dan nilai parameter $\eta = 0.9411161$ diperoleh semua titik tetap eksis dan terdapat dua titik tetap yang stabil dengan jenis kestabilan ditampilkan dalam Tabel 8 berikut.

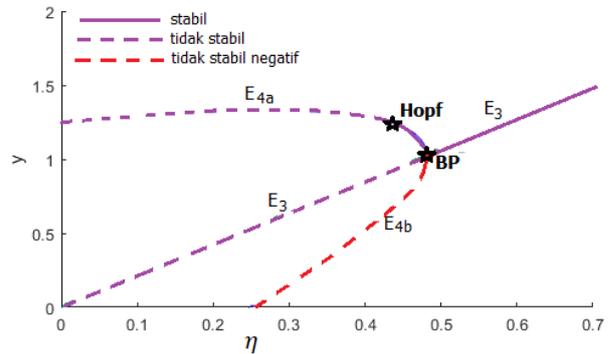
Tabel 8. Nilai Eigen dan Kestabilan saat $\eta = 0.9411161$

| Titik Tetap Eksis | Nilai Eigen | Sifat Kestabilan |
|----------------------------|---|---------------------|
| $E_1 (0,0)$ | $\lambda_1 = 0.181598$ $\lambda_2 = 1$ | Simpul tidak stabil |
| $E_2 (1,0)$ | $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 0.103813$ | Pelana tidak stabil |
| $E_3 (0, 1.69027)$ | $\lambda_1 = -0.18116$ $\lambda_2 = -0.00425$ | Stabil |
| $E_{4a}(0.03606, 1.78042)$ | $\lambda_1 = 0.000941$ $\lambda_2 = -0.12221$ | Spiral tidak stabil |
| $E_{4b}(0.0436, 1.7994)$ | $\lambda_1 = -0.00123$ $\lambda_2 = -0.110316$ | Stabil |

4.2.2. Kontinuasi Numerik terhadap parameter η

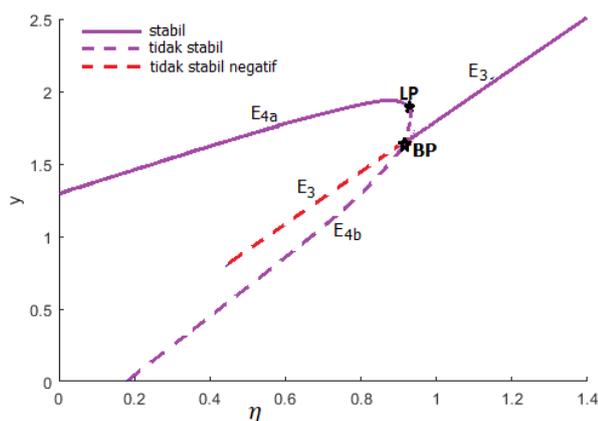
Kontinuasi numerik dilakukan pada sistem (2.12) dengan menjalankan nilai η yaitu parameter makanan tambahan. Hasil kontinuasi numerik

terhadap parameter η menyebabkan terjadinya perubahan kestabilan titik tetap E_3, E_{4a} , dan E_{4b} yang diilustrasikan dengan *software* matlab 2016b menggunakan MatCont berupa diagram bifurkasi seperti Gambar 7 dan Gambar 8.



Gambar 7. Diagram bifurkasi saat $\beta = 3.5$

Hasil kontinuasi numerik untuk $\beta = 3.5$ pada Gambar 7 menunjukkan diagram bifurkasi terhadap titik tetap dari sistem akibat adanya perubahan pada nilai η . Kontinuasi diawali saat $\eta = 0.2$ menunjukkan bahwa di sekitar titik tetap E_{4a}, E_1, E_2 dan E_3 bersifat tidak stabil. Kemudian η digerakkan maju dan terjadi di titik H (Hopf) pada $\eta = 0.44333809$. Jenis kestabilan E_{4a} berubah dari yang semula tidak stabil menjadi stabil berupa center setelah melewati titik bifurkasi yang disebut bifurkasi Hopf di $\eta = 0.44333809$. Hasil Kontinuasi numerik juga sesuai dengan hasil simulasi yang ditampilkan dalam potret fase. Setelah melewati titik bifurkasi η digerakkan maju bertemu BP (Branch Point) di $\eta = 0.480950$. Fenomena BP disebut dengan bifurkasi Transkritikal yang ditandai dengan adanya persilangan dari dua cabang titik tetap dalam diagram bifurkasi yaitu titik tetap E_3 dan E_{4a} . Artinya terjadi perubahan kestabilan dari dua titik tetap setelah melewati BP, yaitu titik tetap E_{4a} yang semula stabil menjadi tidak stabil dan titik tetap E_3 yang semula tidak stabil menjadi stabil ketika melewati nilai parameter adanya makanan tambahan $\eta = 0.480950$.



Gambar 8. Diagram Bifurkasi saat $\beta = 2.5$

Hasil kontinuitas numerik untuk $\beta = 2.5$ pada Gambar 8 menunjukkan keseluruhan perubahan kestabilan dari sistem akibat adanya perubahan terhadap nilai η . Kontinuitas diawali saat $\eta = 0.45$ menunjukkan bahwa di sekitar titik tetap E_{4a} bersifat stabil, E_3 dan E_{4b} bersifat tidak stabil. Kemudian η digerakkan maju dan terjadi LP (*Limit Point*). Fenomena ini menunjukkan terjadi bifurkasi *Saddle Node* dimana ada dua titik tetap pada sistem yang saling bersinggungan yaitu E_{4a} dan E_{4a} dan menghilang saat $\eta > 0.941161$ disertai munculnya titik tetap yang lain yang stabil yaitu E_3 . Bifurkasi *Saddle Node* menggambarkan bahwa saat $0.92047 < \eta < 0.941161$ sistem memiliki dua titik tetap yang stabil yaitu E_3 dan E_{4a} . Sifat kestabilan pada sistem ini berubah ketika melewati BP (*Branch Point*) yaitu pada $\eta = 0.92047$. Perubahan kestabilan yang terjadi pada saat titik BP (*Branch Point*) jenis bifurkasinya termasuk bifurkasi transkritikal yang ditandai dengan adanya persilangan dari dua cabang titik tetap dalam diagram bifurkasi yaitu E_3 dan E_{4a} . Pada titik tetap E_3 dan E_{4a} terjadi perubahan kestabilan ketika melewati nilai parameter adanya makanan tambahan $\eta = 0.941161$. Ketika melewati $\eta = 0.941161$ titik tetap E_3 bersifat stabil.

Hasil simulasi numerik pada sistem (2.12) menunjukkan munculnya fenomena bifurkasi Hopf saat $\eta = 0.44333809$ kemudian terjadi bifurkasi Transkritikal saat $\eta = 0.480950$. Sedangkan pada artikel Basheer dkk (2019) hanya menunjukkan terjadi bifurkasi Hopf pada saat $\beta = 3.5$ dan $\eta = 0.31951$ tanpa adanya bifurkasi Transkritikal, serta bifurkasi *Saddle Node* terjadi ketika $\beta = 5.29$ dan $\eta = 0.05$. Pada artikel ini, hasil simulasi kedua menunjukkan dinamika yang lebih lengkap dengan

munculnya bifurkasi Transkritikal dan bifurkasi *Saddle Node* serta sistem (2.12) memiliki dua titik tetap yang stabil yaitu E_3 dan E_{4a} saat $0.92047 < \eta < 0.941161$.

PENUTUP

SIMPULAN

Pada model interaksi mangsa pemangsa dengan menggunakan fungsi respon Holling-Tanner tipe II serta pemberian makanan tambahan untuk pemangsa. Berdasarkan hasil analisis penentuan solusi setimbang diperoleh lima titik tetap dengan jenis kestabilan yang berbeda pada setiap kasus dengan kondisi yang diberikan. Pemilihan parameter η sebagai parameter makanan tambahan yang dikontinuasi secara numerik memiliki pengaruh terhadap kestabilan masing-masing solusi sistem.

Hasil analisis numerik menunjukkan kesesuaian dengan hasil analisis untuk jenis kestabilan masing-masing solusi setimbang. Ketika dilakukan kontinuitas numerik pada parameter makanan tambahan terjadi perubahan kestabilan pada sistem dari stabil menjadi tidak stabil, begitu juga sebaliknya dari tidak stabil menjadi stabil. Perubahan jenis kestabilan titik tetap E_{4a} ditandai dengan munculnya bifurkasi Hopf saat $\eta = 0.44333809$, dan terjadi bifurkasi Transkritikal saat $\eta = 0.480950$. Dengan asumsi yang berbeda dan memilih $\beta = 2.5$ terjadi bifurkasi *Saddle Node* disertai dengan kemunculan bifurkasi Transkritikal (*Limit Point*) saat $0.92047 < \eta < 0.941161$, serta ditunjukkan bahwa sistem memiliki dua titik tetap yang stabil yaitu E_3 dan E_{4a} .

SARAN

Fungsi respon yang digunakan dapat dimodifikasi untuk dilanjutkan peneliti lainnya. Selain itu peneliti yang lain juga dapat melanjutkan dengan memberikan asumsi nilai parameter yang berbeda dan analisis bifurkasi yang lain sehingga menghasilkan analisis numerik yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

- Ali Kusnanto, Hani Ammariah, Elis Khatizah. (2017). *Pengaruh Makanan Tambahan Dalam Model Mangsa-Pemangsa Beddington De-Angelis*. Seminar Nasional Matematika dan Aplikasinya. UNAIR.Surabaya.
- Anton H & Rorres C. (2004). *Aljabar Linear Elementer*. Ed ke-8. Indriasari R, Harmein I, Penerjemah. Jakarta (ID): Erlangga.
- Banerjee M, Banerjee S. (2012). *Turing Instabilities and Spatiotemporal Chaos in Ratio-Dependent Holling-Tanner Model*. *Math Biosci* 236(1):64-76.
- Basheer A, Quansah E, Parshad RD. (2019). *The Effect of Additional Food in Holling Tanner Type Model*. *Int J of Dyn and Cont*. 7:1195-1212.
- B.S.R.V. Prasad, K. Durga Prasad. (2019). *Qualitative Analysis of Additional Food Provided Predator-Prey System with Anti-Predator Behaviour in Prey*. *NonLinear Dyn*. 96:1765-1793.
- J. Olver, P. (2014). *Introduction to Partial Differential Equations*. Switzerland (Vol.24). NewYork: Spinger. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-02099-0>.
- Lynch, S. (2010). *Dynamical System with Applications using Maple (Second Edi)*. Berlin. <https://doi.org/10.1107/978-0-8176-4605-9>.
- Nagle, R.K., Saff, E. B., & Sinder, A.D. (2012). *Fundamentals of Differential Equatons and Boundary Value Problems*. USA: Pearson Education, inc.
- Olsder, G.J., & Woude, J. W. Van. der. (1998). *Mathematical Systems Theory (Second Edi)*. Netherlands: Delf University Press.
- Panigoro, Hasan S. (2014). *Analisis Dinamik Sistem Predator-Prey Model Leslie-Gower Dengan Pemanenan Secara Konstan Terhadap Predator*. *Jurnal Euler*, ISSN:2087-9393. Vol 2(1):1-12.
- P.H. Leslie, J.C. Gower. (1960). *The Properties of a Stochastic Model for The Predator- Prey Type of Interaction Between Two Species*. *Biometrika* 47: 219.
- Puspita, M. (2016). *Bentuk Normal Bifurkasi Hopf pada Sistem Umum Dua Dimensi*. *Jurnal Matematika UNAND*, 5(3), 15-23.
- R.M. May. (1973). *Stability and Complexity in Model Ecosystems*. Princeton University Press, Princeton.
- Sa'adah, S, Abadi, & Dian S. (2020). *Bifurkasi Pada Model Interaksi Mangsa-Pemangsa Dengan Perilaku Anti Pemangsa*. *Prosiding Seminar Nasional Matematika*. Vol.3:95-103. <https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/pri/sma/>.
- Srinivasu PDN, Prasad BSRV, Banerjee M. (2013). *Dynamics of additional food provided predator-prey system with mutually interfering predators*. *Math Biosci* 246(1):176-190.
- Strogatz SH. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos with Application to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Massachusetts (US): Addison-Wesley Publishing Company.
- Trench, W.F. (2013). *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*. Cole Thomson Learning. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-75402-459>.
- Tu PNV. (1994). *Dynamical System, an Introduction with Application in Economics and Biology*. Heidelberg (DE): Springer-Verlag.
- Ulfa HM, Suryanto A, Darti I. (2017). *Dynamics of Leslie-Gower Predator-Prey Model with Additional Food for Predators*. *Int J Pure Appl Math* 115(2):199-209.