MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 09 No 02
Tahun 2021

DEFINISI SEDERHANA DARI GENERALISASI RUANG BERNORMA DAN SIFAT-SIFATNYA

Nilatul Azizah
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: nilatul.17030214040@mhs.unesa.ac.id

Muhammad Jakfar
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: muhammadjakfar@unesa.ac.id

Abstrak

Penelitian tentang ruang bernorma telah banyak dilakukan oleh matematikawan. Banyak peneliti yang berupaya untuk menggeneralisasi konsep ruang bernorma, namun beberapa tahun kemudian diketahui konsep-konsep tersebut ternyata bukanlah generalisasinya. Hingga tibalah pada tahun 2019, seorang ahli matematika A. Kundu dkk mengenalkan generalisasi baru pada ruang bernorma yang dikenal dengan ruang G2NS (*Genelaization 2-Normed Space*). Akan tetapi, definisi yang disajikan oleh Kundu dkk kuranglah sederhana. Dalam tulisan ini, akan ditunjukkan definisi sederhana dari G2NS. Lebih jauh lagi, akan ditunjukkan pula sifat-sifat dari ruang G2NS. Dari hasil pembahasan, ternyata pada G2NS mempunyai sifat titik tetap tunggal.
Kata Kunci: ruang norm, Generalized 2-normed space (G2NS), titik tetap tunggal.

Abstract

Research on normed space has been carried out by many mathematicians. Many researchers had attempted to generalize the concept of normed space, but several years later it was discovered that these concepts were not generalization of it. Until 2019, a mathematician A. Kundu et al introduced a new generalization to a normalized space known as G2NS space (Genelaization 2-Normed Space). However, the definitions presented by Kundu et al. Are less simple. In this paper, shows a simple definition of G2NS. From the results of the discussion, it turns out that G2NS has a single fixed point property.
Keywords*: norm space, Generalized 2-normed space (G2NS), single fixed point.*

PENDAHULUAN

Matematika adalah ilmu yang mendasari akan perkembangan di berbagai sektor sehingga memberikan keuntungan dan kemudahan bagi semua penggunanya. Dan teori yang sangat berperan penting dalam perkembangan tersebut diantaranya adalah teori ruang metrik dan ruang bernorma. Banyak ilmuan yang tertarik untuk memperluas kedua konsep tersebut. Beberapa matematikawan yang mencoba mengeneralisasi ruang metrik antara lain adalah Gähler (1964), Dhage (2000), Mustafa & Sims (2006), Chaipunya & Kumam (2013), sehingga melahirkan konsep baru yakni ruang metrik-2 menjadi ruang metrik-n, kemudian ruang metrik-D, dan ruang metrik-G. Namun, semua konsep yang telah tersebut di atas ternyata bukan suatu generalisasi dari ruang metrik sebagaimana yang telah ditunjukkan dalam beberapa penelitian terakhir (K.A. Khan, 2014, p.3) (A. Kundu, dkk, 2019, p.166-167).

Konsep tentang ruang bernorma sejalan dengan ruang metrik. Dalam ruang bernorma, metrik selalu dapat diinduksi dari suatu norm. Pada 1964, S. Gähler memperkenalkan gagasan tentang norm-2 yang diinduksi oleh metrik-2 (S. Gähler, 1964, p.4-5). Pada tahun 1989, Misiak memperkenalkan gagasan tentang norm-n yang diinduksi oleh metrik-n (Misiak, 1989, p.317-318). Hingga, pada 2014 K.A. Khan memperkenalkan norm-G yang diinduksi oleh metrik-G (K. Khan, 2014, p.3). Ketiga konsep tersebut diklaim sebagai generalisasi dari ruang bernorma. Akan tetapi, klaim tersebut terbantahkan ketika muncul artikel-artikel yang menunjukkan bahwa ruang bernorma-2, ruang bernorma-n, ruang bernorma-G bukanlah generalisasi dari ruang bernorma (H. Gunawan & Mashadi, 2001, p.632) (K.A. Khan, 2014, p.3) (A. Kundu, dkk, 2019, p.166-

167). Sehingga, penelitian mengenai generalisasi ruang metrik dan ruang bernorma kembali dilanjutkan (S. Ekarini & H. Gunawan, 2012) (Manuharawati & M. Jakfar, 2017) (F.Y. Rumlawang, 2020).

Akhirnya, pada tahun 2013, P. Chaipunya dan P. Kumam memperkenalkan generalisasi dari ruang metrik yang baru yakni ruang g-3ps (*general distance between three arbitrary points*). Selanjutnya, pada tahun 2019, A. Kundu, T. Bag, dan Sk. Nazmul memperkenalkan generalisasi dari ruang bernorma yang baru yakni ruang G2NS (*Generalization 2-Normed Space*). Namun, definisi yang disajikan dalam tulisan tersebut masih kurang sederhana.

Dalam tulisan ini, pertama akan dijelaskan terlebih dahulu bahwa g-3ps diinduksi dari ruang G2NS. Selanjutnya, akan dikonstruksikan definisi sederhana dari ruang G2NS. Dengan definisi yang lebih sederhana tersebut, maka g-3ps pun dapat didefinisikan dengan lebih sederhana di ruang G2NS. Lebih jauh lagi, akan diperoleh sifat-sifat yang menarik dari ruang G2NS hingga termasuk sifat ketunggalan titik tetap. Dimana pada penelitian yang terdahulu, belum dilakukan penelitian yang membahas tentang teorema ketunggalan titik tetap di ruang G2NS tersebut.

KAJIAN TEORI

Sepanjang artikel ini, akan dibahas konsep-konsep yang disajikan dalam beberapa definisi berikut ini:

Definisi 2.1 (Kreyszig, 1989, p.4)

Asumsikan X adalah himpunan yang minimal memiliki satu anggota himpunan. Pemetaan $d: X^2 \to \mathbb{R}$ dinamakan metrik pada X, jika untuk setiap $\theta, \tau, \gamma \in X$ memenuhi:

(D1) $d(\theta,\tau) \in \mathbb{R},\ d(\theta,\tau) < \infty, d(\theta,\tau) \geq 0$.

(D2) $d(\theta,\tau) = 0 \Leftrightarrow \theta = \tau$.

(D3) $d(\theta,\tau) = d(\tau = \theta)$.

(D4) $d(\theta,\tau) \leq d(\theta,\gamma) + d(\gamma,\tau)$.

Pasangan terurut (X, d) dinamakan **ruang metrik**.

Contoh 1

Asumsikan diketahui X adalah himpunan $\mathbb{R}$, $d': \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dengan $d'(k,l) = \frac{d(k,l)}{1+d(k,l)}$ adalah metrik di dalamnya.

Dapat dibuktikan bahwa pasangan $(\mathbb{R}, d')$ merupakan ruang metrik.

Contoh 2

Misalkan diketahui X adalah ruang barisan kompleks, $p = (p_m),\ q = (q_m),\ r = (r_m),\ \forall p,q,r \in X$ dengan metriknya yaitu $d(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{|p_m - q_m|}{1+|p_m - q_m|}$.

Dapat dibuktikan bahwa pasangan (X, d) merupakan ruang metrik.

Definisi 2.2 (S. Gähler, 1964, p.3)

Asumsikan X himpunan yang minimal memiliki satu anggota himpunan. Pemetaan $\sigma: X^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dinamakan sebagai metrik-2 pada X, jika memenuhi:

(M1) $\forall s, i \in X,\ dimana\ s \neq i\ \exists p \in X$ sedemikian rupa sehingga $\sigma(s,i,p) \neq 0$.

(M2) $\sigma(s,i,p) = 0$ jika setidaknya dua dari tiga elemen x, y, z adalah sama.

(M3) $\sigma(s,i,p) = \sigma(s,p,i) = \sigma(i,p,s)$ dimana $s,i,p \in X$.

(M4) $\sigma(s,i,p) \leq \sigma(s,i,a) + \sigma(s,a,i) + \sigma(a,i,p)$ $\forall s,i,p,a \in X$.

Pasangan (X, σ) dinamakan **ruang metrik-2**.

Contoh 3

Ambil $X = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ dan $\sigma: X^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dengan definisi berikut:

Jika $e, f, g \in X$ maka akan terbentuk Δefg yang didefinisikan dengan $\sigma(e,f,g) = luas\ \Delta efg$. Sehingga, dapat dibuktikan bahwa fungsi σ adalah sebuah metrik-2 dan pasangan terurut dari (X, σ) adalah ruang metrik-2.

Definisi 2.3 (Z. Mustafa & B. Sims, 2006, p.290)

Asumsikan X adalah himpunan yang minimal memiliki satu anggota himpunan. Sebuah fungsi $G: X^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dinamakan sebagai metrik-G pada X jika memenuhi:

(G1) $G(h,j,m) = 0\ \forall h,j,m \in X \Leftrightarrow h = j = m$.

(G2) $G(h,h,j) > 0\ \forall h,j \in X$ dengan $h \neq j$.

(G3) $G(h,h,j) \leq G(h,j,m)\ \forall h,j,m \in X$.

(G4) $G(h,j,m) = G(h,m,j) = G(j,h,m) = G(j,m,h) = G(m,h,j) = G(m,j,h)$.

(G5) $G(h,j,m) \leq G(h,\gamma,\gamma) + G(\gamma,j,m)\ \forall h,j,m,\gamma \in X$.

Pasangan dari (X, G) dinamakan **ruang metrik-G**.

Contoh 4

Misal diberikan himpunan $X = \mathbb{R}$, dan fungsi $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ didefinisikan sebagai $G(\mathfrak{f},\mathfrak{g},\mathfrak{m}) = |\mathfrak{f} - \mathfrak{g}| + |\mathfrak{g} - \mathfrak{m}| + |\mathfrak{m} - \mathfrak{f}|$, untuk setiap $\mathfrak{f},\mathfrak{g},\mathfrak{m} \in X$. Dapat dibuktikan bahwa pasangan (X, G) adalah ruang metrik-G.

Definisi 2.4 (A. Kundu dkk, 2019, p.162)

Asumsikan X adalah himpunan yang minimal memiliki satu anggota himpunan. Pemetaang $g: X^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dinamakan sebagai $g - 3ps$ jika:

(g1) $g(m,n,o) = 0 \Leftrightarrow m = n = o$.

(g2) Ada beberapa $r_0 > 0$ sedemikian rupa sehingga $\forall m \in X, B_g(m,r_0) := \{n \in X: g(m,m,n) < r_0\}$ terbatas, yaitu $\sup_{m,n,o \in B_g(m,r_0)} g(m,n,o) < \infty$.

Pasangan (X,g)dinamakan **ruang $\boldsymbol{g - 3ps}$**. Himpunan $B_g(m,r)$ dinamakan bola terbuka untuk ruang $g - 3ps$ (X,g).

Contoh 5 (P. Chaipunya & P. Kumam, 2013, p.1-2)
Setiap metrik-G, metrik-S, metrik-D*.

Definisi 2.5 (Kreyszig, 1989, p. 59)

Asumsikan X merupakan ruang vektor atas *field* $\mathbb{F}$. Sebuah pemetaan $||\cdot||: X \to \mathbb{R}$ dinamakan norm pada X, jika untuk setiap $\beta,\gamma \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$ memenuhi:

(n1) $||\beta|| \geq 0$.

(n2) $||\beta|| = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$.

(n3) $||\alpha\beta|| = |\alpha|||\beta||$.

(n4) $||\beta + \gamma|| \leq ||\beta|| + ||\gamma||$.

Pasangan terurut ($X, ||\cdot||$) dinamakan **ruang bernorma**.

Contoh 6

Asumsikan $\mathbb{R}^n$ adalah ruang vektor Euclid real dimana $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan norma $||.||: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dengan

$$||x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

untuk setiap vektor $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Pasangan terurut $(\mathbb{R}^n, ||.||)$ dinamakan sebagai ruang bernorma lengkap (ruang Banach). Norma ini dikenal sebagai norma Euclid pada $\mathbb{R}^n$.

Definisi 2.6 (J. Manuhutu dkk, 2014, p. 140)

Asumsikan X adalah ruang vektor atas *field* $\mathbb{F}$. Sebuah fungsi $||\cdot,\cdot||: X^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dinamakan norm-2 pada X jika memenuhi:

(N1) $||\alpha, z|| \geq 0, \forall \alpha, z \in X$, $||\alpha, z|| = 0 \Leftrightarrow \alpha$ dan z takbebas.

(N2) $||\alpha, z|| = ||z, \alpha||, \forall \alpha, z \in X$.

(N3) $||\rho\alpha, z|| = |\rho|||\alpha, z||, \forall \alpha, z \in X$ dan $\rho \in \mathbb{F}$.

(N4) $||\alpha, z + n|| \leq ||\alpha, z|| + ||\alpha, n|| \ \forall \alpha, z, n \in X$.

Pasangan terurut dari $(X, ||\cdot,\cdot||)$ dinamakan **ruang bernorma-2**.

Contoh 7

Asumsikan $X = \mathbb{R}^2$ dan didefinisikan $||x,y|| = |x_1y_2 - x_2y_1|$ adalah luas jajar genjang yang dibangun oleh vektor $x = (x_1, x_2)$ & $y = (y_1, y_2)$. Maka, dapat dibuktikan bahwa $||x,y||$ adalah norm-2 pada $X = \mathbb{R}^2$.

Definisi 2.7 (K.A. Khan, 2014, p.158)

Asumsikan X adalah ruang vektor atas *field* $\mathbb{R}$. Sebuah fungsi $||\cdot,\cdot,\cdot||_G: X^3 \to \mathbb{R}$ dinamakan norm-G atas X jika memenuhi:

$||d,g,n||_G \geq 0 \ \forall d,g,n \in X, ||d,g,n||_G = 0 \Leftrightarrow d,g,nX$ memenuhi $d = g = n$.

$||d,g,n||_G = ||d,n,g||_G = ||g,d,n||_G = ||g,n,d||_G = ||n,d,g||_G = ||n,g,d||_G \ d,g,n \in X$.

$||\alpha d, \alpha g, \alpha n||_G = |\alpha|||d,g,n||_G$.

$||d + d', g + g', n + n'||_G \leq ||d,g,n||_G + ||d',g',n'||_G \ \forall d,g,n,d',g',n' \in X$.

$||d,g,n||_G \geq ||d + g, 0, z||_G \ \forall d,g,n \in X$.

Kemudian, pasangan terurut ($X, ||\cdot,\cdot,\cdot||_G$) dinamakan **ruang bernorma-G**.

Contoh 8

Asumsikan $X = \mathbb{R}^2$. Didefinisikan $||a,e,o||_G = ||a||_2 + ||e||_2 + ||o||_2$ untuk semua $a,e,o \in \mathbb{R}^2$ dimana $||\cdot||_2$ dinotasikan sebagai norm biasa atau norm Euclid pada $\mathbb{R}^2$. Maka $(\mathbb{R}^2, ||\cdot,\cdot,\cdot||_G)$ adalah ruang norm-G.

Proposisi 2.8 (K. A. Khan, 2014, p.159)

Asumsikan $(X, ||\cdot,\cdot,\cdot||_G)$ adalah ruang bernorma-G. Didefinisikan fungsi $G: X^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dengan $G(j,o,s) = ||j - o, o - s, s - j||_G \ \forall j,o,s \in X$. Maka, (X,G) adalah ruang metrik-G.

PEMBAHASAN

G2N DIINDUKSI OLEH G-3PS

Pada bagian ini, akan dijelaskan dahulu tentang ruang G2NS yng diperkenalkan Kundu dkk (2019). Sepanjang bagian ini *field* $\mathbb{K}$ adalah bidang pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ atau himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$.

Definisi 3.1 (A. Kundu dkk, 2019, p.167)

Asumsikan X adalah ruang vektor atas *field* $\mathbb{K}$. Pemetan $N: X^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dinamakan sebagai *Generalized norm-2* atau G2N jika memenuhi:

(GN1) $N(a,k) = 0 \Leftrightarrow a = k = \mathbf{0}$.

(GN2) $N(\rho a, \rho k) = |\rho| N(a,k) \ \forall a,k \in X, \rho \in \mathbb{K}$.

(GN3) Ada $r,s > 0$ sedemikian rupa sehigga

$N(a-\omega, k-\omega) < s \ \forall a, k, \omega \in X$ memenuhi $N(a,a), N(k,k), N(\omega,\omega) < r$.

Pasangan (X, N) dinamakan *Generalized 2-normed space* atau G2NS.

Contoh 9

Asumsikan $X = \mathbb{R}$. Didefinisikan sebuah fungsi $N: X^2 \to \mathbb{R}$

$$N(\beta,\theta) = \begin{cases} \dfrac{|\beta|^2 + |\theta|^2}{|\beta| + |\theta|} & jika\ (\beta,\theta) \neq (0,0) \\ 0 & jika\ (\beta,\theta) = (0,0) \end{cases}$$

(GN1) dan (GN2) jelas dipenuhi. Untuk (GN3), ambil $r = \frac{1}{2}, s = 2$

Maka, $N(\beta,\beta) < \frac{1}{2}, N(\theta,\theta) < \frac{1}{2}, N(\gamma,\gamma) < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 0 \leq |\beta-\gamma|, |\theta-\gamma| < 1$$
$$\Rightarrow 0 \leq |\beta-\gamma|^2 + |\theta-\gamma|^2 \leq |\beta-\gamma| + |\theta-\gamma|$$
$$\Rightarrow N(\beta-\gamma, \theta-\gamma) \leq 1 < 2.$$

Jadi, N adalah G2N pada X.

Teorema 3.1 (Membentuk g−$3ps$ dari G2N).

Asumsikan G2NS (X, N). Pemetaan $g: X^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ didefinisikan $g(a,k,u) := N(a-u, k-u)$ $\forall a, k, u \in X$ adalah $g-3ps$ pada X.

Bukti:

(g1) $\forall a, k, u \in X$ kita mempunyai:

$$g(a,k,u) = N(a-u, k-u) \geq 0$$
$$g(a,k,u) = 0 \Leftrightarrow N(a-u, k-u) = 0$$
$$\Leftrightarrow a-u = 0 = k-u$$
$$\Leftrightarrow a = k = u.$$

(g2) Karena N adalah G2N, maka terdapat $r, s > 0$ sedemikian sehingga $N(a-u, k-u) < s \ \forall a, k, u \in X$ yang memenuhi $B_g(a,r) = \{k \in X: g(a,a,k) < r\}$

$$= \{k \in X: N(a-k, a-k) < r\}.$$

Ambil sebarang $j, \tau, w \in B_g(s,r)$. Maka,

$$N(s-j, s-j), N(s-\tau, s-\tau), N(s-w, s-w) < r.$$
$$g(j,\tau,w) = N(j-\tau, \tau-w)$$
$$= N(\tau-j, \tau-w)$$
$$= N\big((s-j)-(s-w), (s-\tau)-(s-w)\big)$$
$$< s.$$

Akibatnya, g adalah $g-3ps$. ■

Definisi 3.2 (A. Kundu dkk, 2019, p.168)

($g-3ps$ diinduksi oleh G2N) g $g-3ps$ pada X dikatakan diinduksi oleh G2N jika terdapat N G2N pada X sedemikian rupa sehingga:

$$g(y,e,s) := N(y-s, e-s) \ \forall y, e, s \in X.$$

Chaipunya dan Kumam meneliti beberapa sifat dari $g-3ps$.

Proposisi 3.1

Asumsikan X adalah ruang vektor atas *field* $\mathbb{K}$. g $g-3ps$ pada X diinduksi oleh G2N jika dan hanya jika $\forall s, i, p, a \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{K}$, g memenuhi $g(\alpha s + a, \alpha i + a, \alpha p + a) = |\alpha| g(s,i,p)$.

Bukti:

Asumsikan g diinduksi oleh N G2N. Maka,

$g(\alpha s + a, \alpha i + a, \alpha p + a)$
$= N(\alpha s + a - \alpha p - a, \alpha i + a - \alpha p - a)$
$= N(\alpha(s-p), \alpha(i-p))$
$= |\alpha| N(s-p, i-p)$
$= |\alpha| g(s,i,p).$

Sebaliknya, Asumsikan g memenuhi:
$g(\alpha s + a, \alpha i + a, \alpha p + a)$
$= |\alpha| g(s,i,p) \ \forall s, i, p, a \in X, \alpha \in \mathbb{K}.$
Didefinisikan $N: X^2 \to \mathbb{R}$ dengan
$N(s,i) := g(s,i,0) \ \forall s, i \in X$. Maka,
(GN1) $\forall s, i \in X$ didapatkan,

$$N(s,i) = g(s,i,0) \geq 0$$
$$N(s,i) = 0 \Leftrightarrow g(s,i,0) = 0$$
$$\Leftrightarrow s = i = 0.$$

(GN2) $\forall s, i \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$N(\alpha s, \alpha i) = g(\alpha s, \alpha i, 0)$$
$$= |\alpha| g(s,i,0)$$
$$= |\alpha| N(s,i).$$

(GN3) Karena g adalah $g-3ps$, maka terdapat $r_0 > 0$ sedemikian rupa sehingga $B_g(0, r_0)$ terbatas. Sekarang,

$$B_g(0,r_0) = \{s \in X: g(0,0,s) < r_0\}$$
$$= \{d \in X: g(-s,-s,0) < r_0\}$$
$$= \{d \in X: g(s,s,0) < r_0\}$$
$$= \{d \in X: N(s,s) < r_0\}.$$

Ambil sebarang $s, i, p \in X$ yang memenuhi $N(s,s), N(i,i), N(p,p) < r_0$. Maka $s, i, p \in B_g(0, r_0)$, meskipun $B(0, r_0)$ terbatas.

Oleh karena itu, ada $M > 0$ sedemikian rupa sehingga $g(s,i,p) < M$ yaitu $N(s-p, i-p) < M$. Karena itu, N adalah G2N sedemikian rupa sehingga $g(s,i,p) = N(s-p, i-p)$ dan g diinduksi oleh N. ■

Teorema 3.2

Ditunjukkan bahwa setiap G2N dapat menginduksi $g - 3ps$. Bola buka $B_g(x,r)$ didefinisikan untuk ruang $g - 3ps$. Jadi, kita dapat mendefinisikan bola buka di ruang G2N menggunakan konsep bola buka di ruang $g - 3ps$ seperti berikut:

$B_N(d,r) \coloneqq B_g(d,r)$

(Dimana g adalah $g - 3ps$ yang diinduksi oleh N)

$= \{e \in X : g(d,d,e) < r\}$

$= \{e \in X : N(d-e, d-e) < r\}$

Untuk semua $d \in X$ dan $r > 0$.

DEFINISI SEDERHANA DARI G2NS

Dalam bab ini, kita akan mengkronstruksi definisi ruang G2NS yang sederhana. Untuk mengkonstruksinya, diperlukan beberapa teorema berikut:

Teorema 4.1 (Ekuivalensi Definisi G2NS 1)

Asumsikan X adalah ruang vektor atas *field* $\mathbb{K}$. Pemetaan $N: X^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ adalah *Generalized norm-2* atau G2N $\Leftrightarrow$ memenuhi:

(K1) $N(\rho, m) = 0 \Leftrightarrow \rho = m = \mathbf{0}$.

(K2) $N(\rho m, \alpha m) = |\alpha| N(\rho, m)\ \forall \rho, m \in X, \alpha \in \mathbb{K}$.

(K3) Ada $r, s > 0$ sedemikian sehingga jika $\forall \rho, m, q \in X$ memenuhi $N(\rho,\rho), N(m,m), N(q,q) < r$ maka $N(\rho - q, m - q) < s(N(\rho,\rho) + N(m,m) + N(q,q))$.

Bukti:

Berdasarkan Definisi G2N, kondisi (K1) dan (K2) berlaku jika dan hanya jika N adalah G2N.

Selanjutnya, jika N adalah G2N maka ada $r, s > 0$ sedemikian rupa sehigga jika $\forall \rho, m, q \in X$ memenuhi $N(\rho,\rho), N(m,m), N(q,q) < r$ maka berlaku $N(\rho - q, m - q) < s$.

Karena $N(\rho,\rho) < r, N(m,m) < r,\ dan\ N(q,q) < r$ maka

$0 \leq N(\rho,\rho) + N(m,m) + N(q,q) < 3r < \infty$.

Asumsikan $j = N(\rho,\rho) + N(m,m) + N(q,q)$.

$$\text{Karena } N\left(\frac{\rho}{j}, \frac{\rho}{j}\right) = \frac{1}{j} N(\rho,\rho) = \frac{N(\rho,\rho)}{N(\rho,\rho)+N(m,m)+N(q,q)} \leq N(\rho,\rho) < r,$$

$$N\left(\frac{m}{j}, \frac{m}{j}\right) = \frac{1}{j} N(m,m) = \frac{N(m,m)}{N(\rho,\rho)+N(m,m)+N(q,q)} \leq N(m,m) < r,$$

$$\text{dan } N\left(\frac{q}{j}, \frac{q}{j}\right) = \frac{1}{j} N(q,q) = \frac{N(q,q)}{N(\rho,\rho)+N(m,m)+N(q,q)} \leq N(q,q) < r,$$

maka $N\left(\frac{\rho}{j} - \frac{q}{j}, \frac{m}{j} - \frac{q}{j}\right) < s$.

Sehingga $N(\rho - q, m - q) < s$ atau

$N(\rho - q, m - q) < s(N(\rho,\rho) + N(m,m) + N(q,q)$

Sebaliknya, jika (K3) terpenuhi maka $\exists r, s > 0$ sedemikian rupa sehigga jika $\forall m, t, k \in X$ memenuhi $N(\rho,\rho), N(m,m), N(q,q) < r$ maka berlaku

$N(\rho - q, m - q) < s(N(\rho,\rho) + N(m,m) + N(q,q))$.

Kita tahu bahwa $N(\rho,\rho) + N(m,m) + N(q,q) < 3r$, maka $N(\rho - q, m - q) < 3rs$.

Jika kita Asumsikan $s' = 3rs$ maka terbukti bahwa $\exists r, s' > 0$ sedemikian rupa sehigga jika $\forall \rho, m, qX$ memenuhi $N(\rho,\rho), N(m,m), N(q,q) < r$ maka berlaku $N(\rho - q, m - q) < s'$.

Jadi, N adalah G2N. ■

Teorema 4.2 (Ekuivalensi Definisi G2NS2)

Asumsikan X adalah ruang vektor atas *field* $\mathbb{K}$. Pemetaan $N: X^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ adalah *Generalized norm-2* atau G2N$\Leftrightarrow$ memenuhi:

(K4) $N(\rho, m) = 0 \Leftrightarrow \rho = m = \mathbf{0}$.

(K5) $N(\rho m, \alpha m) = |\alpha| N(\rho, m)\ \forall \rho, m \in X, \alpha \in \mathbb{K}$.

(K6) Ada $s > 0$ sedemikian sehingga jika $\forall \rho, m, q \in X$ memenuhi $0 < N(\rho,\rho), N(m,m), N(q,q) < \infty$ maka berlaku $N(\rho - q, m - q) < s\big(N(\rho,\rho) + N(m,m) + N(q,q)\big)$.

Bukti:

Berdasarkan Definisi G2N, kondisi (K1) dan (K2) berlaku jika dan hanya jika N adalah G2N. Sedangkan, untuk (K6) juga ekuivalen dengan (K3) **Teorema 4.1** Karena $0 < N(\rho,\rho), N(m,m), N(q,q) < \infty$ jika dan hanya jika ada $r > 0$ sehingga $N(\rho,\rho), N(m,m), N(q,q) < r$.

Teorema 4.3 (Ekuivalensi Definisi G2NS 3)

Asumsikan X adalah ruang vektor atas *field* $\mathbb{K}$. Pemetaan $N: X^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ adalah *Generalized norm-2* atau G2N jika dan hanya jika memenuhi:

(K7) $N(\rho, m) = 0 \Leftrightarrow \rho = m = \mathbf{0}$.

(K8) $N(\rho m, \alpha m) = |\alpha| N(\rho, m)\ \forall \rho, m \in X, \alpha \in \mathbb{K}$.

(K9) Ada $s > 0$ sehingga $\forall \rho, m, q \in X$ berlaku

$N(\rho - q, m - q) < s\big(N(\rho,\rho) + N(m,m) + N(q,q)\big)$.

Bukti:

Berdasarkan Definisi G2N, kondisi (K7) dan (K8) berlaku jika dan hanya jika N adalah G2N.

Sekarang, Jika N adalah G2N berdasarkan **Teorema 4.2**, Ada $s > 0$ sehingga jika untuk setiap $\rho, m, q \in X$ memenuhi $0 < N(\rho,\rho), N(m,m), N(q,q) < \infty$

maka berlaku

$N(\rho - q, m - q) < s\big(N(\rho,\rho) + N(m,m) + N(q,q)\big)$.

Perhatikan bahwa jika $N(\rho,\rho), N(m,m), N(q,q)$Maka ketaksamaan berlaku

$N(\rho - q, m - q) < s\big(N(\rho,\rho) + N(m,m) + N(q,q)\big)$ juga akan terpenuhi, karena ruas kanan bernilai takhingga.

Jadi, kondisi (K9) terpenuhi.

Sebaliknya, jika kondisi (K9) terpenuhi, yakni Ada $s > 0$ sehingga untuk setiap $\rho, m, q \in X$ berlaku $N(\rho - q, m - q) < s\big(N(\rho,\rho) + N(m,m) + N(q,q)\big)$. Artinya, ketaksamaan berlaku untuk setiap ρ, m, q pada X , termasuk untuk ρ, m, q pada X yang memenuhi $0 < N(\rho,\rho), N(m,m), N(q,q) < \infty$

karena$N(\rho - q, m - q) \leq 0$.

Jadi, berdasarkan teorema sebelumnya, N adalah G2N.

Teorema 4.4 (Ekuivalensi Definisi G2NS 4)

Asumsikan X adalah ruang vektor atas *field* $\mathbb{K}$. Pemetaan $N: X^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ adalah *Generalized norm-2* atau G2N $\Leftrightarrow \forall \rho, m, q \in X$ memenuhi:

(K10) $N(\rho, m) = 0 \Leftrightarrow \rho = m = \mathbf{0}$.

(K11) $N(\rho m, \alpha m) = |\alpha| N(\rho, m)\ \forall \rho, m \in X, \alpha \in \mathbb{K}$.

(K12) Ada $s > 0$ sehingga berlaku $N(\rho + q, m + q) < s\big(N(\rho,\rho) + N(m,m) + N(q,q)\big)$.

Bukti:

Teorema ini diperoleh langsung dari **Teorema 4.3** dengan mengganti q menjadi $-q$ pada (K9) dan kita tahu bahwa $N(-q, -q) = N(q,q)$.

Lemma 4.1

Asumsikan X adalah ruang vektor atas *field* $\mathbb{K}$. Pemetaan $N: X^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ adalah Generalized norm-2 atau G2N yang memenuhi ada $s > 0$ sehingga untuk setiap $\rho, m, q \in X$ berlaku $N(\rho + q, m + q) < s\big(N(\rho,\rho) + N(m,m) + N(q,q)\big)$. Maka, untuk setiap $\rho, m, q \in X$ berlaku

a) $N(\rho, m) < s\big(N(\rho,\rho) + N(m,m)\big)$.
b) $N(\rho + q, q) < s(N(\rho,\rho) + N(q,q))$.
c) $N(\rho + q, m + q) < s(2N(\rho,\rho) + N(q,q))$.
d) $N(\rho + k, 0) < s\big(N(\rho,\rho) + 2\,N(m,m)\big)$.
e) $N(\rho, 0) < sN(\rho,\rho)$.
f) $s > 1$.

Bukti:

a) Asumsikan $\rho = n + i$ dan $m = f + i$; dimana $k = \mathbf{0}$ maka
$N(n + i, f + i)$
$< s(N(n,n) + N(f,f) + N(i,i)$
$= s(N(n,n) + N(f,f) + N(\mathbf{0},\mathbf{0}))$
$= s(N(n,n) + N(f,f) + 0)$
$= s(N(n,n) + N(f,f))$.
Karena$\rho = n + i$ dan $m = f + i$; dimana $k = \mathbf{0}$ sehingga diperoleh
$N(\rho, m) < s\big(N(\rho,\rho) + N(m,m)\big)$.

b) Berdasarkan (K12) **Teorema 4.4** dan menyubtitusi q dengan $0 + q$ maka
$N(\rho + q, 0 + q)$
$< s\big(N(\rho,\rho) + N(0,0) + N(q,q)\big)$
$= s\big(N(\rho,\rho) + 0 + N(q,q)\big)$
$= s\big(N(\rho,\rho) + N(q,q)\big)$.

c) Berdasarkan (K12) **Teorema 4.4** maka
$N(\rho + q, \rho + q)$
$< s(N(\rho,\rho) + N(\rho,\rho) + N(q,q))$
$= s(2N(\rho,\rho) + N(q,q))$.

d) Berdasarkan (K12) **Teorema 4.4** dan menyubtitusi 0 dengan $-q + q$ maka
$N(\rho + q, -q + q)$
$< s(N(\rho,\rho) + N(q,q) + N(-q,-q))$
$= s(N(\rho,\rho) + N(q,q) + N(q,q))$
$= s(N(\rho,\rho) + 2\ N(q,q)$.

e) Asumsikan $\rho = j + k$ dan $0 = -k + k$; dimana $k = \mathbf{0}$
maka
$N(j + k\,, -k + k)$
$< s(N(j,j) + N(-b,-b) + N(k,k))$
$= s(N(j,j) + N(k,k) + N(k,k))$
$= s(N(j,j) + 0 + 0)$
$= s\big(N(j,j)\big)$.
Karena $\rho = j + k$ dan $k = \mathbf{0}$ sehingga diperoleh $s\big(N(j,j)\big) = s(N(\rho,\rho)$. Oleh karena itu, $N(d, 0) < sN(\rho,\rho)$.

f) Berdasarkan (K12) **Teorema 4.4** dan menyubtitusi $\rho = 0, q = 0$ maka
$N(0 + q, 0 + q)$
$< s(N(0,0) + N(0,0) + N(q,q))$
$= s(0 + 0 + N(q,q))$

$= s(N(q,q))$.

Karena $N(q,q) < s(N(q,q))$ sehingga diperoleh $s > 1$.

Berdasarkan **Teorema 4.4** dan **Lemma 4.1** f), dapat kita definisikan G2N lebih sederhana, yakni sebagai berikut:

Definisi 4.1. (Definisi sederhana dari G2NS)

Asumsikan X adalah ruang vektor atas *field* $\mathbb{K}$. Pemetaan $N: X^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ adalah Generalized norm-2 atau G2N jika $\forall m, t, k \in X$ memenuhi:

(D1) $N(m,t) = 0 \Leftrightarrow m = t = \mathbf{0}$.
(D2) $N(\alpha m, \alpha t) = |\alpha| N(m,t)\ \forall m, t \in X, \alpha \in \mathbb{K}$.
(D3) Ada $s > 1$ sehingga berlaku $N(m+k, t+k) < s\big(N(m,m) + N(t,t) + N(k,k)\big)$.

Dan pasangan (X, N) tersebut dinamakan *Generalized 2-normed space* atau G2NS.

Catatan:

Dari **Definisi 4.1.** dan **Teorema 3.7**, kita memperoleh sifat dari g-3ps di G2NS. Karena g pada **Teorema 3.7** didefinisikan $g(m,t,k) = N(m-k, m-k)$ maka $g(m,t,k)$ dalam ruang G2NS memiliki sifat ada $s > 1$ sehingga memenuhi

$$\begin{aligned} g(m,t,k) &= N(m-k, m-k)\,) \\ &< s\big(N(m,m) + N(t,t) + N(k,k)\big) \\ &= s(g(m,m,0) + g(t,t,0) + g(0,0,k)). \end{aligned}$$

Sekarang kita sederhanakan definisi g-3ps.

TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG G2NS

Sekarang kita akan menuju pada pembahasan Teorema Titik Tetap di ruang G2NS. Sebelumnya akan dibahas konsep-konsep di ruang G2NS $(X, N(\cdot,\cdot))$ yang dibutuhkan.

Definisi 5.1

Sebuah subset terbuka G dikatakan buka apabila $\forall x \in G\ \exists r > 0$ sedemikian hingga berlaku $B_N(x,r) \subset G$.

Definisi 5.2

Suatu barisan (x_n) di X dikatakan konvergen jika terdapat $\xi \in X$ sedemikian hingga $\forall \varepsilon > 0$, ada bilangan bulat positif $\mathbb{N}$ sehingga $\forall n \geq N$ berlaku

$$N(x_n - \xi, x_n - \xi) < \varepsilon.$$

Definisi 5.3

Suatu barisan (x_n) di X dikatakan barisan Cauchy jika $\forall \varepsilon > 0$, ada bilangan bulat positif $\mathbb{N}$ sehingga $\forall n, m \geq N$ berlaku

$$N(x_n - x_m, x_n - x_m) < \varepsilon.$$

Definisi 5.4

Ruang G2NS X dinyatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy di X selalu konvergen di X.

Definisi 5.5

Ruang G2NS X yang lengkap dinamakan ruang G2BS (Generalized 2-Banach Space).

Proposisi 5.1

Setiap barisan konvergen yang ada dalam ruang G2NS X mempunyai titik limit tunggal.

Bukti:

Andaikan tidak tunggal, misal ξ dan ξ' adalah limit dari x_n dimana $\xi \neq \xi'$.
$\forall \varepsilon > 0$ pilih $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga

$N(x_n - \xi, x_n - \xi) < \varepsilon$ dan
$N(x_n - \xi', x_n - \xi') < \varepsilon; \forall n \geq n_0$.

Pilih $\varepsilon = \frac{1}{2} N(\xi - \xi', \xi - \xi')$, maka

$$\begin{aligned} N(\xi - \xi', \xi - \xi') &\leq N(\xi - \xi', \xi - \xi') + N(\xi - \xi', \xi - \xi') < \tfrac{1}{2} N(\xi - \xi', \xi - \xi') + \tfrac{1}{2} N(\xi - \xi', \xi - \xi') \\ &= N(\xi - \xi', \xi - \xi'). \end{aligned}$$

Ini tidak mungkin terjadi, sehingga didapatkanlah limitnya tunggal.

Proposisi 5.2

Setiap barisan konvergen dalam ruang G2NS adalah barisan Cauchy.

Bukti:

Asumsikan (x_n) merupakan barisan dalam ruang G2NS yang konvergen ke ξ.
Maka $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq N$ berlaku
$N(x_n - \xi, x_n - \xi) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ambil $m, n \geq N$, maka berlaku $N(x_n - \xi, x_n - \xi) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, untuk $j, k \geq N$ berlaku

$$\begin{aligned} &N(x_j - x_k, x_j - x_k) \\ &\leq N(x_j - \xi, x_n - \xi) + N(\xi - x_k, \xi - x_k) \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi, barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy.

Definisi 5.6

Himpunan $K \subset X$ terbatas apabila terdapat bilangan real $M > 0$ sedemikian rupa sehingga $N(x,x) < M$ untuk sebarang $x \in K$.

Definisi 5.7
Fungsi $P: X \to X$ di ruang G2NS X dikatakan fungsi kontraktif jika ada $C \in (0,1)$ sehingga $N\big(P(m) - P(t), P(m) - P(t)\big) \leq C \cdot N(m - t, dm - t)$ untuk setiap $m, t \in X$.

Sekarang, kita akan mulai membahas teorema ketunggalan titik tetap di ruang G2NS.

Teorema 5.1.
Asumsikan $\big(X, N(\cdot,\cdot)\big)$ ruang G2NS yang lengkap, $K \subset X$ adalah himpunan tertutup dan terbatas. Jika $P: B \to B$ adalah fungsi kontraktif, maka B memiliki suatu titik tetap yang tunggal.

Bukti:
Asumsikan $x_0 \in B$ dan (x_k) adalah barisan di B sedemikian rupa sehingga

$$x_k = P(x_{k-1}) = P^k(x_0), \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

Untuk $x_0, x_1 \in B$ kita mempunyai

$$N\big(P^2(x_0) - P^2(x_1), P^2(x_0) - P^2(x_1)\big)$$
$$= N\Big(P\big(P(x_0)\big) - P\big(P(x_1)\big), P\big(P(x_0)\big) - P\big(P(x_1)\big)\Big),$$

P fungsi kontraktif, jadi terdapat $C \in (0,1)$ sedemikian rupa sehingga

$$N\big(P(x_0) - P(x_1), P(x_0) - P(x_1)\big)$$
$$= C \cdot N(x_0 - x_1, x_0 - x_1).$$

Kemudian, karena P adalah fungsi kontraktif maka kita mempunyai

$$N\big(P^2(x_0) - P^2(x_1), P^2(x_0) - P(x_1)\big)$$
$$= C^2 \cdot N(x_0 - x_1, x_0 - x_1).$$

Dengan mengunakan induksi kita memperoleh

$$N\big(P^k(x_0) - P(x_1), P^k(x_0) - P^k(x_1)\big)$$
$$= C^k \cdot N(x_0 - x_1, x_0 - x_1).$$

Selanjutnya, kita tunjukkan bahwa barisan (x_k) adalah barisan Cauchy. Asumsikan $m, t \in \mathbb{N}$ tanpa mengurangi keumuman asumsikan bahwa $m > \mathrm{t}$ dan $t = m + p$, dengan $p \in \mathbb{N}$. Dengan menggunakan pertidaksamaan segitiga, kita mempunyai

$$N(x_m - x_t, x_m - x_t) = N\big(x_m - x_{m+p}, x_m - x_{m+p}\big) \leq \mathrm{s}\Big(N(x_m - x_{m+1}, x_m - x_{m+1}) + \cdots + N\big(x_{m+p-1} - x_{m+p}, x_{m+p-1} - x_{m+p}\big)\Big)$$

untuk suatu $s > 1$.

Menggunakan sifat barisan (x_k) di atas dan fakta bahwa P adalah fungsi kontraktif, kita dapatkan

$$N(x_m - x_t, x_m - x_t) \leq \mathrm{s}\Big(N\big(P^m(x_0) - P^m(x_1)\, , P^m(x_0) - P^m(x_1)\big) + \cdots + N\big(P^{m+p-1}(x_0) - P^{m+p-1}(x_1), P^{m+p-1}(x_0) - P^{m+p-1}(x_1)\big)\Big) \leq \mathrm{s}(C^m + \cdots + C^{m+p-1})\, N(x_0 - x_1, x_0 - x_1).$$

Karena K terbatas, $x_0, x_1 \in K$, maka terdapat $M > 0$ sehingga $N(x_0 - x_1, x_0 - x_1) \leq M$. Kita mempunyai

$$N(x_m - x_t, x_m - x_t) \leq \mathrm{s}(C^m + \cdots + C^{\mathrm{m}+p-1})M,$$

atau dapat kita tulis dengan

$$N(x_m - x_t, x_m - x_t) \leq (C^m + \cdots + C^{t-1})sM.$$

Karena $C \in (0,1)$ maka

$$\lim_{m,t\to\infty} N(x_m - x_t, x_m - x_t) \leq \lim_{m,t\to\infty} (C^m + \cdots + C^{t-1})sM = 0.$$

Ini menunjukkan bahwa (x_k) adalah barisan Cauchy. Lebih lanjut, karena $\big(X, N(\cdot,\cdot)\big)$ adalah ruang lengkap maka (x_k) adalah barisan konvergen.

Asumsikan $x_k \to \xi$, karena $x_k \subset K$ dan K adalah himpunan tertutup, maka $\xi \in K$. Selanjutnya, P adalah fungsi kontraktif, dengan menggunanakan sifat pada barisan (x_k) kata mempunyai

$$P(\xi) = \lim_{\xi\to\infty} P(x_k) = \lim_{\xi\to\infty} x_{k+1} = \xi.$$

Oleh karena itu, P mempunyai satu titik tetap di K. Selanjutnya, kita tunjukkan bahwa titik tetap adalah tunggal.

Asumsikan bahwa terdapat titik tetap lainnya dari P di K, yaitu ξ'. Fungsi P adalah fungsi kontraktif jadi terdapat $C \in (0,1)$ sedemikian rupa sehingga

$$N(\xi - \xi', \xi - \xi') = N\big(P(\xi) - P(\xi'), P(\xi) - P(\xi')\big)$$
$$\leq C \cdot N(\xi - \xi', \xi - \xi').$$

Kondisi ini terpenuhi jika dan hanya jika $N(\xi - \xi', \xi - \xi') = 0$ ($(N(\xi - \xi', \xi - \xi') \neq 0 \to C = 0$ atau $C = 1)$.
Sehingga, kita dapatkan $\xi = \xi'$, ini menunjukkan arti bahwa titik tetap adalah tunggal. ■

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas diperoleh definisi sederhana dari G2NS yaitu sebagai berikut

Asumsikan X adalah ruang vektor atas *field* $\mathbb{K}$. Pemetaan $N: X^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ adalah Generalized norm-2 atau G2N jika $\forall m, t, k \in X$ memenuhi:

(D1) $N(m, t) = 0 \Leftrightarrow m = t = \mathbf{0}$.
(D2) $N(\alpha m, \alpha t) = |\alpha| N(m, t)\ \forall m, t \in X, \alpha \in \mathbb{K}$.
(D3) Ada $s > 1$ sehingga berlaku $N(m + k, t + k) < s\big(N(m, m) + N(t, t) + N(k, k)\big)$.

Dan pasangan (X, N) tersebut dinamakan *Generalized 2-normed space* atau G2NS.

Selain itu, beberapa konsep dan sifat juga berhasil dideskripsikan. Dan dari pembahasan pula, diperoleh bahwa G2NS mempunyai sifat titik tetap tunggal.

SARAN

Pada tulisan ini pembahasan terbatas mengenai generalisasi baru pada ruang bernorma yang diperkenalkan dengan G2NS dan hanya ada satu sifat yang dibuktikan yaitu tentang sifat ketunggalan titik tetap dalam G2NS. Oleh sebab itu, penelitian lebih lanjut dapat dilakukan mengenai sifat-sifat lain yang dimiliki oleh G2NS.

DAFTAR PUSTAKA

A. Kundu , T. Bag, Sk. Nazmul. (2019). A new generalization of normed linear space. Topology and its Applications. 256 159–176. https://doi.org/10.1016/j.topol.2019.02.003

Dhage, B. C. (2000). On some fixed point theorems for contractive mapping in d -metric spaces. 1–8.

F.Y. Rumlawang. (2020). Fixed Point Theorem in 2-Normed Spaces. Pure and Applied Mathematics Journal. 41-46

H. Gunawan, Mashadi. (2001). On n-normed spaces. International Journal of Mathematics and Mathematical Science. 27 631-639. https://doi.org/10.1155/S0161171201010675

K. A. Khan. (2014). Generalized normed spaces and fixed point theorems. Journal of Mathematics and Computer Science. 157-167

Kreyszig E. (1989). Introductory Functional Analysis with Applications. New York: John Wiley and Sons.

M.J.I. Burhan. (2017). Ruang Norm-n Berdimensi Hingga. 95-104. http://doi:10.24198/jmi.v13.n2.11986.95-104

Manuharawati, M. Jakfar. (2017). Thy-angle in an n-Normed Space Far East. Journal of Mathematical Sciences (FJMS). 102(5) 979-994

Misiak, A. (1989): n-Inner Product Spaces, Mathematische Nachrichten, 140(1), 299–319

P. Chaipunya, P. Kumam. (2013). On the distance between three arbitrary points. Journal of Function Spaces and Aplications. 194631. http://dx.doi.org/10.1155/2013/194631

S. Ekarini dan H. Gunawan. (2012). Teorema Titik Tetap pada Ruang Norm-n Standar. Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika. 4(1), 69-77

S. Gähler. (1964). Lineare 2-normierte raüme. Mathematische Nachrichten 28 (1-2) 1-43.

S. Gähler. (1963). 2-metriche raüme und ihre topologische struktur. Mathematische Nachrichten. 26 (1-4) 115-148.

Z. Mustafa, B. Sims. (2006). A New Approach to Generalized Metric Spaces. Journal of Nonlinear and Convex Analysis. 7(2), 289–297