MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika **Volume 09 No 02**
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115 **Tahun 2021**

SIFAT-SIFAT HIMPUNAN LUNAK

Arini Alfa Hasanah
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
email: arini.17030214017@mhs.unesa.ac.id

Dwi Nur Yunianti
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
email: dwiyunianti@unesa.ac.id

Abstrak

Teori himpunan lunak diperkenalkan pertama kali oleh Molodtsov. Teori ini sebagai penyelesaian dari masalah ketidakpastian yang melibatkan himpunan parameter. Pada artikel ini, akan diuraikan definisi himpunan lunak, kesamaan dua himpunan lunak, himpunan kuasa, komplemen himpunan lunak, himpunan kosong dari himpunan lunak, dan himpunan absolut dari himpunan lunak. Selain itu juga dijelaskan operasi yang terkait seperti operasi DAN, ATAU, serta juga operasi gabungan, dan irisan disertai contoh yang mendukung. Artikel ini juga mengkaji keterkaitan sifat-sifat pada operasi himpunan biasa terhadap himpunan lunak. Berdasarkan hasil kajian beberapa teori tersebut, disimpulkan bahwa hubungan operasi DAN dan ATAU pada himpunan lunak berlaku hukum De Morgan, bersifat asosiatif, dan juga distributif. Sedangkan operasi gabungan dan irisan pada himpunan lunak tidak berlaku hukum De Morgan.
Kata Kunci: Himpunan lunak, himpunan parameter, operasi himpunan, sifat-sifat himpunan.

Abstract

Theory of soft set was first introduced by Molodtsov. This theory is a solution to an uncertainty problem involving a set of parameters. This article will describe the definition of a soft set, equality of two soft sets, power set, soft set complement, the null set from the soft set, and the absolute set of a soft set. In addition, the related operations such as the AND, OR operation, as well as operation of union and operation of intersection along with supporting examples. This article also examines the relationship between the properties of classical set operations on soft sets. Based on the study of several of these theories, it is concluded that the relationship between AND OR in the soft set applies De Morgan's law, is associative, and distributive. Whereas union and intersection operations on soft sets do not apply De Morgan's law.
Keywords: *Soft set, parameter set, set operation, set properties.*

PENDAHULUAN

Masalah ketidakpastian dapat dijumpai pada banyak bidang seperti bidang teknik, ilmu sosial, ilmu kedokteran, dan sebagainya. Metode penyelesaian masalah ketidakpastian dapat menggunakan teori probabilitas, dan teori kabur atau biasa disebut teori fuzzy (Zadeh, 1965). Selain itu terdapat juga teori-teori yang berasal dari pengembangan teori fuzzy yaitu himpunan fuzzy intuisionistik oleh Atanassov (1986), teori vague set yang diperkenalkan oleh Gau & Buehrer (1993), teori dengan menggunakan metode pendekatan yang dioperasikan pada konsep himpunan fuzzy bernilai interval dikembangkan oleh Gorzałczany (1987), dan teori rough set yang dikenalkan dalam aplikasi Artificial Intelligence (AI) (Pawlak, 1982). Atanassov (1994) juga mengembangkan operator yang digunakan pada himpunan fuzzy intuisionistik bernilai interval.

Beberapa teori tersebut ternyata memiliki kelemahan, seperti teori probabilitas yang hanya dapat digunakan untuk permasalahan yang stabil secara stokastik. Sedangkan teori fuzzy, terdapat kesulitan dalam penentuan fungsi keanggotaan untuk kasus tertentu (Bilgiç & Türkşen, 2000). Kelemahan-kelemahan tersebut dapat terjadi karena ketidakadaan metode untuk parameterisasi (Molodtsov, 1999). Oleh karena itu, Molodtsov (1999) memiliki teori baru yang dapat mengatasi kelemahan yang muncul. Teori baru yang diteliti pertama kali oleh Molodtsov ini mengenalkan keterkaitan himpunan semesta dengan himpunan parameter yang memetakan himpunan parameter ke himpunan kuasa atas himpunan semestanya (Abdy, 2017).

Penelitian yang membahas tentang himpunan lunak di antaranya penelitian yang mengkaji sifat-sifat dari relasi pada himpunan lunak (Onyeozili & Gwary T. M., 2014). Sezgin & Atagün (2011) dan Ali, dkk (2009) memperkenalkan operasi himpunan lunak. Penelitian himpunan lunak yang menggunakan himpunan parameter tunggal oleh Wati & Bakar (2017), dan penelitian himpunan lunak kabur yang menjelaskan tentang operasi serta sifat-sifat yang mendukung (Firmanenti & Noliza Bakar, 2020).

Teori himpunan lunak dapat diaplikasikan pada teori game, riset operasi, integral Reiman, integral Perron, teori probabilitas, teori dalam ukuran, dan lainnya (Çağman & Enginoğlu, 2010). Selain itu, penerapan himpunan lunak pada konsep matriks himpunan lunak berparameterisasi himpunan fuzzy (Enginoğlu & Çağman, 2020). Struktur aljabar himpunan lunak dapat diaplikasikan teori struktur aljabar BCK/BCI pada relasi dari sifat yang diterapkan (Jun, 2008; Jun et al., 2010).

Pada himpunan didefinisikan operasi himpunan di antaranya irisan, gabungan, dan operasi selisih (Bagaria, 2019). Konsep operasi himpunan dapat digunakan pada penerapan studi matematika morfologi dalam pengolahan citra digital (Ilwaru et al., 2016). Terdapat juga penelitian terkait aplikasi operasi himpunan disertai dengan fungsi tentang agregasi dalam perancangan dari basis data pada kampus (Aswani et al., 2018).

PK. Maji, dkk (2003) telah mendefinisikan sifat-sifat operasi himpunan lunak. Maka dari itu, pada penulisan artikel ini, akan dikaji teori-teori dasar dari himpunan lunak yang pembahasannya mengacu pada PK. Maji, dkk (2003). Penulis juga mengkaji teorema yang buktinya belum termuat pada PK. Maji, dkk (2003).

KAJIAN TEORI

Berikut ini akan diberikan konsep-konsep dasar yang akan digunakan dalam pembahasan artikel.

DEFINISI 2.1

Himpunan parameter adalah himpunan yang anggotanya berupa kriteria yang ditentukan.

DEFINISI 2.2

Himpunan lunak atas himpunan semesta U ditulis $(\alpha_{\oint}, \mathcal{A})$ adalah himpunan yang ditentukan oleh pemetaan, $\alpha_{\oint} : \mathcal{A} \to P\,(\,U\,)$. Pemetaan $\alpha_{\oint}$ disebut pemetaan aproksimasi himpunan lunak $(\alpha_{\oint}, \mathcal{A})$ dan untuk setiap e elemen dari himpunan parameter $\mathcal{A}$, nilai $\alpha_{\oint}(e)$ dapat dipandang sebagai himpunan elemen e-aproksimasi dari himpunan lunak $(\alpha_{\oint}, \mathcal{A})$. Sehingga himpunan lunak dapat ditulis $\alpha_{\oint} = \left\{\left(e, \alpha_{\oint}(e)\right) : e \in \mathcal{A}, \alpha_{\oint}(e) \in P\,(\,U\,)\right\}$ dengan $P\,(\,U\,)$ koleksi himpunan lunak atas U (Molodtsov, 1999).

CONTOH 2.1

Diberikan $U = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$ himpunan semesta yang beranggotakan enam rumah idaman yang akan dibeli. $W = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ himpunan parameter rumah idaman yang diberikan, dengan

e_1 menunjukkan parameter desain minimalis
e_2 menunjukkan parameter fasilitas lengkap
e_3 menunjukkan parameter kamar yang luas
e_4 menunjukkan parameter ramah lingkungan
e_5 menunjukkan parameter lokasi strategis

Rumah idaman dengan desain minimalis yaitu rumah r_2 dan r_4 atau dapat ditulis $\alpha_{\oint}(e_1) = \{r_2, r_4\}$, rumah idaman dengan fasilitas lengkap yaitu rumah r_1 dan r_3 atau dapat ditulis $\alpha_{\oint}(e_2) = \{r_1, r_3\}$, rumah dengan kamar yang luas yaitu rumah r_3, r_4, dan r_5 atau dapat ditulis $\alpha_{\oint}(e_3) = \{r_3, r_4, r_5\}$, rumah idaman yang ramah lingkungan yaitu rumah r_1, r_3, dan r_5 atau dapat ditulis dengan $\alpha_{\oint}(e_4) = \{r_1, r_3, r_5\}$, dan rumah idaman dengan lokasi yang strategis yaitu rumah r_1 atau dapat ditulis dengan $\alpha_{\oint}(e_5) = \{r_1\}$.

Jadi, himpunan lunak $(\alpha_{\oint}, W)$ adalah koleksi himpunan parameter $\{\alpha_{\oint}(e_i); i = 1,2,3,4,5\}$ yang dapat dilihat sebagai koleksi pendekatan daya tarik rumah idaman yang akan dibeli yaitu : {minimalis = $\{r_2, r_4\}$, fasilitas lengkap = $\{r_1, r_3\}$, kamar yang luas = $\{r_3, r_4, r_5\}$, ramah lingkungan = $\{r_1, r_3, r_5\}$, lokasi strategis = $\{r_1\}$}.

Lebih lanjut, untuk pendekatan daya tarik rumah idaman dengan desain minimalis $\{r_2, r_4\}$, maka setiap pendekatan memiliki dua bagian :

i.) Predikat p_1 yaitu desain minimalis.
ii.) Nilai himpunan pendekatan v_1 yaitu $\{r_2, r_4\}$,

Jadi, himpunan lunak $(\alpha_{\oint}, W)$ dapat dilihat sebagai kumpulan pendekatan dari

$$\left(\alpha_{\oint}, W\right) = \{p_1 = v_{1,} p_2 = v_{2,\dots\dots,} p_n = v_n\}$$

Pada artikel ini himpunan $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ merupakan himpunan parameter yang menggambarkan subset dari himpunan parameter W atau dapat ditulis $\mathcal{A},\mathcal{B} \subseteq W$.

PEMBAHASAN

Bagian ini akan diberikan pembahasan tentang operasi dasar himpunan lunak dan disertai dengan contoh yang terkait.

DEFINISI 3.1

Kelas dari semua himpunan bernilai dari himpunan lunak $(\alpha_{\not{f}},\mathcal{A})$ dikatakan sebagai kelas-bernilai himpunan lunak dan dinotasikan dengan $C_{(\alpha_{\not{f}},\mathcal{A})}$ (Maji et al., 2003).

CONTOH 3.1

Misal $P(U)$ himpunan kuasa atas U dan $(\alpha_{\not{f}},\mathcal{A})$ himpunan lunak. Dengan menggunakan contoh 2.1 maka didapat kelas bernilainya adalah $C_{(\alpha_{\not{f}},\mathcal{A})} = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_5\}$. Dalam hal ini $C_{(\alpha_{\not{f}},\mathcal{A})} \subseteq P\ (U)$.

DEFINISI 3.2

Misal W himpunan parameter, $(\alpha_{\not{f}},\mathcal{A})$ dan $(g_{\not{f}},\mathcal{B})$ himpunan lunak atas semesta U, maka $(\alpha_{\not{f}},\mathcal{A})$ subset lunak $(g_{\not{f}},\mathcal{B})$ ditulis $(\alpha_{\not{f}},\mathcal{A}) \tilde{\subset} (g_{\not{f}},\mathcal{B})$, jika

i.) $\mathcal{A}$ subset $\mathcal{B}$,

ii.) $\forall\ e$ elemen $\mathcal{A}$, $\alpha_{\not{f}}(e) = g_{\not{f}}\ (e)$.

(Maji et al., 2003).

DEFINISI 3.3

Diberikan himpunan lunak $(\alpha_{\not{f}},\mathcal{A})$ dan $(g_{\not{f}},\mathcal{B})$ atas semesta U dikatakan sama, ditulis $(\alpha_{\not{f}},\mathcal{A}) = (g_{\not{f}},\mathcal{B})$, jika $(\alpha_{\not{f}},\mathcal{A})$ subset lunak dari $(g_{\not{f}},\mathcal{B})$ dan $(g_{\not{f}},\mathcal{B})$ subset lunak dari $(\alpha_{\not{f}},\mathcal{A})$ (Maji et al., 2003).

DEFINISI 3.4

Misalkan $W = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ adalah himpunan parameter. Komplemen himpunan parameter W dinotasikan dengan $\neg W = \{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_3, \dots, \neg e_n\}$ dengan $\neg e_i$ adalah bukan e_i, $\neg(\neg e_i) = e_i, \forall i$ (Maji et al., 2003).

Pada teorema berikut ditunjukkan bukti dari hubungan komplemen himpunan parameter dengan operasi himpunan yaitu gabungan dan irisan.

TEOREMA 3.1

Diketahui W adalah suatu himpunan parameter. Dengan $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, dan

$\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$.

i.) $\neg(\neg\mathcal{A}) = \mathcal{A}$

ii.) $\neg(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = (\neg\mathcal{A} \cup \neg\mathcal{B})$

iii.) $\neg(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = (\neg\mathcal{A} \cap \neg\mathcal{B})$

Bukti :

i.) Akan dibuktikan $\neg(\neg\mathcal{A}) = \mathcal{A}$

Berdasarkan definisi 3.4, diperoleh komplemen $\mathcal{A}$ adalah komplemen dari setiap anggota $\mathcal{A}$.

$\neg(\neg\mathcal{A}) = \neg(\{\neg a_1, \neg a_2, \neg a_3, \dots, \neg a_n\})$

$\neg(\neg\mathcal{A}) =$

$\{\neg(\neg a_1), \neg(\neg a_2), \neg(\neg a_3), \dots, \neg(\neg a_n)\}$

$\neg(\neg\mathcal{A}) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$

$\neg(\neg\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

ii.) Akan dibuktikan $\neg(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = (\neg\mathcal{A} \cup \neg\mathcal{B})$,

Dari yang diketahui diperoleh $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$ dan dapat ditulis $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \{\mathcal{C}_i | \mathcal{C}_i \in \mathcal{A}$ atau $\mathcal{C}_i \in \mathcal{B}\}$

Berdasarkan definisi 3.4, diperoleh

$\neg\mathcal{A} = \{\neg a_1, \neg a_2, \neg a_3, \dots, \neg a_n\}$ dan

$\neg\mathcal{B} = \{\neg b_1, \neg b_2, \neg b_3, \dots, \neg b_n\}$,

$\neg(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \neg\{\mathcal{C}_i | \mathcal{C}_i \in \mathcal{A}$ atau $\mathcal{C}_i \in \mathcal{B}\}$

$\neg(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \{\neg\mathcal{C}_i | \neg\mathcal{C}_i \in \neg\mathcal{A}$ atau $\neg\mathcal{C}_i \in \neg\mathcal{B}\}$

$\neg(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = (\neg\mathcal{A} \cup \neg\mathcal{B})$.

iii.) Akan dibuktikan $\neg(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = (\neg\mathcal{A} \cap \neg\mathcal{B})$

Dari yang diketahui dapat diperoleh $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} \cap \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$ dan dapat ditulis $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \{\mathcal{C}_i | \mathcal{C}_i \in \mathcal{A}$ dan $\mathcal{C}_i \in \mathcal{B}\}$. Berdasarkan definisi 3.4, diperoleh

$\neg\mathcal{A} = \{\neg a_1, \neg a_2, \neg a_3, \dots, \neg a_n\}$ dan

$\neg\mathcal{B} = \{\neg b_1, \neg b_2, \neg b_3, \dots, \neg b_n\}$

$\neg(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \neg\{\mathcal{C}_i | \mathcal{C}_i \in \mathcal{A}\ dan\ \mathcal{C}_i \in \mathcal{B}\}$

$\neg(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \{\neg\mathcal{C}_i | \neg\mathcal{C}_i \in \neg\mathcal{A}$ dan $\neg\mathcal{C}_i \in \neg\mathcal{B}\}$

$\neg(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \neg(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ ■

Dari definisi dan sifat komplemen himpunan parameter dapat didefinisikan komplemen dari himpunan lunak sebagai berikut:

DEFINISI 3.5

Komplemen himpunan lunak $(\alpha_{\not{f}},\mathcal{A})$ dilambangkan oleh $(\alpha_{\not{f}},\mathcal{A})^K$ dimana $\mathcal{A} \subseteq W$ dan didefinisikan oleh $(\alpha_{\not{f}},\mathcal{A})^K = (\alpha_{\not{f}}{}^K, \neg\mathcal{A})$, dimana $\alpha_{\not{f}}{}^K : \neg\mathcal{A} \to \mathcal{P}(U)$ yaitu pemetaan yang didapatkan dari $\alpha_{\not{f}}{}^K(e) = U - \alpha_{\not{f}}(\neg e), \forall\ e \in \neg\mathcal{A}$ (Maji et al., 2003).

CONTOH 3.2

Berdasarkan contoh dari 2.1, didapatkan komplemen himpunan lunaknya, yaitu $(\alpha_{\not{f}}, W)^K =$ {rumah dengan desain tidak minimalis, $\{r_1, r_3, r_5, r_6\}$, rumah tidak dilengkapi fasilitas lengkap, $\{r_2, r_4, r_5, r_6\}$, rumah dengan tidak tersedia kamar yang luas, $\{r_1, r_2, r_6\}$, rumah yang tidak ramah lingkungan, $\{r_2, r_4, r_6\}$, rumah tidak di lokasi strategis, $\{r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$}.

Selanjutnya operasi himpunan lunak, yaitu himpunan lunak kosong, himpunan lunak absolut.

DEFINISI 3.6

Himpunan lunak $(\alpha_{f}, \mathcal{A})$ atas U dikatakan himpunan lunak kosong yang dinotasikan dengan Φ, jika $\forall\, e \in \mathcal{A}, \alpha_{f}(e) = \emptyset$ (Maji et al., 2003).

DEFINISI 3.7

Himpunan lunak $(\alpha_{f}, \mathcal{A})$ atas U dikatakan himpunan lunak absolut yang dinotasikan dengan $\tilde{A}$, jika $\forall\, e \in \tilde{A}$, $\alpha_{f}\ (e) = U$. Lebih lanjut, $\tilde{A}^K = \Phi$ dan $\tilde{\Phi}^K = \tilde{A}$ (Maji et al., 2003).

Pada bagian ini akan didefinisikan operasi DAN dan ATAU pada himpunan lunak.

DEFINISI 3.8

Diberikan $(\alpha_{f}, \mathcal{A})$ dan $(g_{f}, \mathcal{B})$ sebagai dua himpunan lunak, $(\alpha_{f}, \mathcal{A})$ DAN $(g_{f}, \mathcal{B})$ dinotasikan oleh $(\alpha_{f}, \mathcal{A}) \wedge (g_{f}, \mathcal{B})$ yang didefinisikan sebagai $(\alpha_{f}, \mathcal{A}) \wedge (g_{f}, \mathcal{B}) = (h_{f}, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$, di mana $h_{f}(\alpha, \beta) = \alpha_{f}(\alpha) \cap g_{f}(\beta), \forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ (Maji et al., 2003).

CONTOH 3.3

Diketahui $U = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8\}$ himpunan semesta yang beranggotakan delapan rumah idaman yang akan dibeli dan $W = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ himpunan parameter rumah idaman.

Diberikan himpunan lunak $(\alpha_{f}, \mathcal{A})$ yang menggambarkan "biaya rumah", dengan $\mathcal{A} = \{\text{sangat mahal, mahal, murah}\}$, dan himpunan lunak $(g_{f}, \mathcal{B})$ yang menggambarkan "daya tarik rumah idaman", dengan $\mathcal{B} = \{\text{minimalis, ramah lingkungan, murah}\}$. Misalkan $\alpha_{f}(\text{sangat mahal}) = \{r_6, r_7, r_8\}$, $\alpha_{f}(\text{mahal}) = \{r_1, r_3, r_5\}$, $\alpha_{f}(\text{murah}) = \{r_2, r_4\}$, dan $g_{f}(\text{minimalis}) = \{r_3, r_6\}$, $g_{f}(\text{ramah lingkungan}) = \{r_2, r_5, r_7\}$, $g_{f}(murah) = \{r_2, r_4\}$. Maka diperoleh $(\alpha_{f}, \mathcal{A}) \wedge (g_{f}, \mathcal{B}) = (h_{f}, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$, di mana $h_{f}(\text{sangat mahal, minimalis}) = \{r_6\}$, $h_{f}(\text{sangat mahal ramah lingkungan}) = \{r_7\}$, $h_{f}(\text{sangat mahal, murah}) = \{\Phi\}$, $h_{f}(\text{mahal, minimalis}) = \{r_3\}$, $h_{f}(\text{mahal, ramah lingkungan} = \{r_5\}$, $h_{f}(\text{mahal, murah}) = \{\Phi\} h_{f}(\text{murah, minimalis}) = \{\Phi\}$, $h_{f}(\text{murah, ramah lingkungan}) = \{r_2\}$, $h_{f}(\text{murah, murah}) = \{r_2, r_4\}$.

DEFINISI 3.9

Ditunjukkan $(\alpha_{f}, \mathcal{A})$ dan $(g_{f}, \mathcal{B})$ sebagai dua himpunan lunak, "$(\alpha_{f}, \mathcal{A})$ ATAU $(g_{f}, \mathcal{B})$" dinotasikan dengan $(\alpha_{f}, \mathcal{A}) \vee (g_{f}, \mathcal{B})$ yang didefinisikan sebagai $(\alpha_{f}, \mathcal{A}) \vee (g_{f}, \mathcal{B}) = (\sigma_{f}, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$, di mana $\sigma_{f}(\alpha, \beta) = \alpha_{f}(\alpha) \cup g_{f}(\beta), \forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ (Maji et al., 2003)

Teorema berikut menunjukkan adanya hubungan antara operasi DAN dan ATAU dengan komplemen dari dua himpunan lunak yang berbeda.

TEOREMA 3.2

Diketahui W himpunan parameter. Dengan $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$ dan $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n\}$. Dan ditunjukkan $(\alpha_{f}, \mathcal{A})$ dan $(g_{f}, \mathcal{B})$ sebagai himpunan lunak.

i.) $\left((\alpha_{f}, \mathcal{A}) \vee (g_{f}, \mathcal{B})\right)^K = (\alpha_{f}, \mathcal{A})^K \wedge (g_{f}, \mathcal{B})^K$

ii.) $((\alpha_{f}, \mathcal{A}) \wedge (g_{f}, \mathcal{A}))^K = (\alpha_{f}, \mathcal{A})^K \vee (g_{f}, \mathcal{B})^K$

Bukti :

i.) Diketahui $(\alpha_{f}, \mathcal{A}) \vee (g_{f}, \mathcal{B}) = (\sigma_{f}, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ dengan $\sigma_{f}(\alpha, \beta) = \alpha_{f}(\alpha) \cup g_{f}(\beta), \forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Kemudian $\left((\alpha_{f}, \mathcal{A}) \vee (g_{f}, \mathcal{B})\right)^K = (\sigma_{f}, \mathcal{A} \times \mathcal{B})^K = \left(\sigma_{f}{}^K, \neg(\mathcal{A} \times \mathcal{B})\right)$.

Sekarang, $(\alpha_{f}, \mathcal{A})^K \wedge (g_{f}, \mathcal{B})^K = (\alpha_{f}{}^K, \neg\mathcal{A}) \wedge (g_{f}{}^K, \neg\mathcal{B}) = (j_{f}, \neg\mathcal{A} \times \neg\mathcal{B})$, di mana $j_{f}(x, y) = \alpha_{f}{}^K(x) \cap g_{f}{}^K(y) = (j_{f}, \neg(\mathcal{A} \times \mathcal{B}))$.

Sekarang, ambil sebarang $(\neg\alpha, \neg\beta) \in \neg\mathcal{A} \times \neg\mathcal{B}$.

Kemudian, $\sigma_{f}{}^K(\neg\alpha, \neg\beta) = U - \sigma_{f}(\alpha, \beta) = U - [\alpha_{f}(\alpha) \cup g_{f}(\beta)] = [U\alpha_{f}(\alpha)] \cap [U - g_{f}(\beta)] = \alpha_{f}{}^K(\neg\alpha) \cap g_{f}{}^K(\neg\beta) = j_{f}(\neg\alpha, \neg\beta)$.

Karena $(\neg\alpha, \neg\beta) \in \neg\mathcal{A} \times \neg\mathcal{B}$ sebarang, berarti berlaku $\forall\, \alpha, \beta \in \neg\mathcal{A} \times \neg\mathcal{B}$. Dengan demikian, $\sigma_{f}{}^K(\neg\alpha, \neg\beta) = j_{f}(\neg\alpha, \neg\beta) = (j_{f}, \neg\mathcal{A} \times \neg\mathcal{B})$,

Sehingga

$((\alpha_{f}, \mathcal{A}) \vee (g_{f}, \mathcal{B}))^K = (\alpha_{f}, \mathcal{A})^K \wedge (g_{f}, \mathcal{B})^K$

ii.) Ditunjukkan $(\alpha_{f}, \mathcal{A}) \wedge (g_{f}, \mathcal{B}) = (h_{f}, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ dengan $h_{f}(\alpha, \beta) = \alpha_{f}(\alpha) \cap g_{f}(\beta), \forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Kemudian $\left((\alpha_{f}, \mathcal{A}) \wedge (g_{f}, \mathcal{B})\right)^K = (h_{f}, \mathcal{A} \times \mathcal{B})^K = \left(h_{f}{}^K, \neg(\mathcal{A} \times \mathcal{B})\right)$.

Sekarang, $(\alpha_{f}, \mathcal{A})^K \vee (g_{f}, \mathcal{B})^K = (\alpha_{f}{}^K, \neg\mathcal{A}) \vee (g_{f}{}^K, \neg\mathcal{B}) = (k_{f}, \neg\mathcal{A} \times \neg\mathcal{B})$, di mana $k_{f}(x, y) = \alpha_{f}{}^K(x) \cup g_{f}{}^K(y) = (k_{f}, \neg(\mathcal{A} \times \mathcal{B}))$.

Sekarang, ambil sebarang $(\neg\alpha, \neg\beta) \in \neg\mathcal{A} \times \neg\mathcal{B}$.

Kemudian, $h_{f}{}^K(\neg\alpha, \neg\beta) = U - h_{f}(\alpha, \beta) = U - [\alpha_{f}(\alpha) \cap g_{f}(\beta)] = [U - \alpha_{f}(\alpha)] \cup [U - g_{f}(\beta)] = \alpha_{f}{}^K(\neg\alpha) \cup g_{f}{}^K(\neg\beta) = k_{f}(\neg\alpha, \neg\beta)$.

Karena $(\neg\alpha, \neg\beta) \in \neg\mathcal{A} \times \neg\mathcal{B}$ sebarang, berarti berlaku $\forall\, \alpha, \beta\ \neg\mathcal{A} \times \neg\mathcal{B}$. Dengan demikian, $k_{f}{}^K(\neg\alpha, \neg\beta) = k_{f}(\neg\alpha, \neg\beta) = (k_{f}, \neg A \times \neg\mathcal{B})$

Sehingga

$((\alpha_{f}, \mathcal{A}) \wedge (g_{f}, \mathcal{B}))^K = (\alpha_{f}, \mathcal{A})^K \vee (g_{f}, \mathcal{B})^K$ ■

Beikut ini dari operasi gabungan dan operasi irisan dapat dioperasikan dua himpunan lunak.

DEFINISI 3.10

Ditunjukkan $(\alpha_{f},\mathcal{A})$ dan $(g_{f},\mathcal{B})$ sebagai dua himpunan lunak atas U . Gabungan himpunan lunak $(\alpha_{f},\mathcal{A})$ dan $(g_{f},\mathcal{B})$ yang dinotasikan oleh $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cup}\,(g_{f},\mathcal{B})$ merupakan $(\alpha_{f}\cup g_{f},\mathcal{C})$, di mana $\mathcal{C}=\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ dan $\forall\, e\in\mathcal{C}$ berlaku

$$(\alpha_{f}\cup g_{f})(e)=\begin{cases}\alpha_{f}(e), & \text{jika } e\in\mathcal{A}-\mathcal{B},\\ g_{f}(e), & \text{jika } e\in\mathcal{B}-\mathcal{A}\\ \alpha_{f}(e)\cup g_{f}(e), & \text{jika } e\in\mathcal{A}\cap\mathcal{B}\end{cases}$$

(Zhu & Wen, 2013).

CONTOH 3.4

Dari contoh 3.3, diperoleh $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cup}\,(g_{f},\mathcal{B})=(\alpha_{f}\cup g_{f},\mathcal{C})=(h_{f},\mathcal{C})=h_{f}$(sangat mahal) $=\{r_6,r_7,r_8\}$, h_{f}(mahal) $=\{r_1,r_3,r_5\}$, h_{f}(murah) $=\{r_2,r_4\}$, h_{f}(minimalis) $=\{r_3,r_6\}$, h_{f}\{ramah lingkungan\} $=\{r_2,r_5,r_7\}$.

DEFINISI 3.11

Misal $(\alpha_{f},\mathcal{A})$ dan $(g_{f},\mathcal{B})$ dua himpunan lunak atas U. Irisan himpunan lunak $(\alpha_{f},\mathcal{A})$ dan $(g_{f},\mathcal{B})$ yang dinotasikan oleh $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cap}\,(g_{f},\mathcal{B})$ merupakan $(\alpha_{f}\cap g_{f},\mathcal{C})$, di mana $\mathcal{C}=\{e\in\mathcal{A}\cap\mathcal{B}\,|\,\alpha_{f}(e)\cap g_{f}(e)\neq\emptyset\}$, $\forall e\in\mathcal{C}$ dan berlaku $(\alpha_{f}\cap g_{f})(e)=\alpha_{f}(e)\cap g_{f}(e)$. Lebih lanjut, jika $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}\neq\emptyset\ \forall\, e\in\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ akan berlaku $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cap}\,(g_{f},\mathcal{B})=(\emptyset,\emptyset)$ (Zhu & Wen, 2013).

CONTOH 3.5

Dengan contoh 3.3, diperoleh $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cap}\,(g_{f},B)=(\alpha_{f}\cap g_{f},\mathcal{C})=(h_{f},\mathcal{C})$, di mana h_{f}(murah, murah) $=\{r_2,r_4\}$.

Teorema ini ditunjukkan adanya sifat operasi gabungan dan irisan antara dua himpunan lunak.

TEOREMA 3.3

Diketahui W himpunan parameter. Dengan $\mathcal{A}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n\}$ dan ditunjukkan $(\alpha_{f},\mathcal{A})$ sebagai himpunan lunak atas U.

i.) $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cup}\,(\alpha_{f},\mathcal{A})=(\alpha_{f},\mathcal{A})$

ii.) $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cap}\,(\alpha_{f},\mathcal{A})=(\alpha_{f},\mathcal{A})$

iii.) $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cup}\,\Phi=\Phi$, dimana Φ adalah himpunan lunak kosong

iv.) $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cap}\,\Phi=\Phi$

v.) $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cup}\,\tilde{A}=\tilde{A}$, dimana $\tilde{A}$ himpunan lunak absolut

vi.) $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cap}\,\tilde{A}=(\alpha_{f},A)$.

Bukti :

i.) Diketahui $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cup}\,(\alpha_{f},\mathcal{A})=(\alpha_{f}\cup g_{f},C)$, di mana $\mathcal{C}=\mathcal{A}\cup\mathcal{A}=\mathcal{A}$ dan $\forall\, e\in\mathcal{C}$. maka $\alpha_{f}\cup g_{f}(e)=\alpha_{f}(e)$, jika $e\in\mathcal{A}-\mathcal{A}$,

$=\alpha_{f}(e)\cup\alpha_{f}(e)$, jika $e\in\mathcal{A}\cap\mathcal{A}=\mathcal{A}$

Karena $\mathcal{C}=\mathcal{A}$ maka $(\alpha_{f}\cup g_{f},\mathcal{C})=(\alpha_{f}\cup g_{f},\mathcal{A})$ dan $\alpha_{f}\cup g_{f}(e)=\alpha_{f}(e)\ \forall\, e\in\mathcal{A}$. Dengan demikian, $\alpha_{f}\cup g_{f}(e)=\alpha_{f}(e)$ di mana $\forall\, e\in\mathcal{C}=\mathcal{A}$.

Oleh karena itu $(\alpha_{f}\cup g_{f},\mathcal{A})=(\alpha_{f},\mathcal{A})$.

Maka terbukti $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cup}\,(\alpha_{f},\mathcal{A})=(\alpha_{f},\mathcal{A})$.

ii.) Diketahui $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cap}\,(\alpha_{f},\mathcal{A})=(\alpha_{f}\cap g_{f},\mathcal{C})$, di mana $\mathcal{C}=\mathcal{A}\cap\mathcal{A}=\mathcal{A}$ dan $\forall\, e\in\mathcal{C}=\mathcal{A}$. Maka $\alpha_{f}\cap g_{f}(e)=\alpha_{f}(e)$, jika $e\in\mathcal{A}-\mathcal{A}$

$=\alpha_{f}(e)\cap\alpha_{f}(e)$, jika $e\in\mathcal{A}\cup\mathcal{A}=\mathcal{A}$.

dan $\alpha_{f}\cap g_{f}(e)=\alpha_{f}(e)\ \forall\, e\in\mathcal{A}$. Dengan demikian, $\alpha_{f}\cap g_{f}(e)=\alpha_{f}(e)$, di mana $\forall\, e\in\mathcal{C}=\mathcal{A}$. Oleh karena itu $(\alpha_{f}\cap g_{f},\mathcal{A})=(\alpha_{f},\mathcal{A})$.

Maka terbukti $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cap}\,(\alpha_{f},\mathcal{A})=(\alpha_{f},\mathcal{A})$.

iii.) Diketahui $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cup}\,\Phi=(h_{f},\mathcal{C})$, di mana $\mathcal{C}=\mathcal{A}\cup\tilde{A}^K=\Phi$ dan $\forall\, e\in\mathcal{C}=\Phi$. Maka $h_{f}(e)=\Phi$, jika $e\in\Phi-\mathcal{A}$

$=\alpha_{f}(e)\cup\Phi$, jika $e\in\mathcal{A}\cap\Phi=\Phi$.

Sehingga diperoleh $h_{f}(e)=\alpha_{f}(e)$, di mana $\forall e\in\mathcal{C}=\Phi$. Oleh karena itu $(h_{f},\Phi)=(\alpha_{f},\mathcal{A})$.

Maka terbukti $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cup}\,\Phi=\Phi$.

iv.) Diketahui $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cap}\,\Phi=(h_{f},\mathcal{C})$, di mana $\mathcal{C}=\mathcal{A}\cap\tilde{A}^K=\Phi$ dan $\forall\, e\in\mathcal{C}=\Phi$. Maka $h_{f}(e)=\Phi$, jika $e\in\Phi-\mathcal{A}$

$=\alpha_{f}(e)\cap\Phi$, jika $e\in A\cup\Phi=\Phi$.

Karena $\mathcal{C}=\Phi$ maka $(h_{f},\Phi)=(\alpha_{f},\mathcal{A})$ dan $h_{f}(e)=\alpha_{f}(e)\ \forall\, e\in\mathcal{C}$. Dengan demikian $h_{f}(e)=\alpha_{f}(e)$, di mana $\forall e\in\mathcal{C}=\Phi$. Oleh karena itu $(h_{f},\Phi)=(\alpha_{f},\mathcal{A})$. Maka terbukti $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cap}\,\Phi=\Phi$.

v.) Diketahui $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cup}\,\tilde{A}=(h_{f},\mathcal{C})$, di mana $\mathcal{C}=\mathcal{A}\cup\tilde{A}=\tilde{A}$ dan $\forall\, e\in\mathcal{C}=\tilde{A}$. Maka $h_{f}(e)=\tilde{A}$, jika $e\in\tilde{A}-\mathcal{A}$

$=\alpha_{f}(e)\cup\tilde{A}$, jika $e\in\mathcal{A}\cap\tilde{A}=\tilde{A}$.

Karena $\mathcal{C}=\tilde{A}$. maka $(h_{f},\tilde{A})=(\alpha_{f},\mathcal{A})$ dan $h_{f}(e)=\alpha_{f}(e)\ \forall\, e\in\mathcal{C}$. Dengan demikian $h_{f}(e)=\alpha_{f}(e)$, di mana $\forall\, e\in\mathcal{C}=\tilde{A}$. Oleh karena itu $(h_{f},\tilde{A})=(\alpha_{f},\mathcal{A})$. Maka terbukti $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cup}\,\tilde{A}=\tilde{A}$.

vi.) Diketahui $(\alpha_{f},\mathcal{A})\,\tilde{\cap}\,\tilde{A}=(h_{f},\mathcal{C})$, di mana $\mathcal{C}=\mathcal{A}\cap\tilde{A}=\tilde{A}$ dan $\forall\, e\in\mathcal{C}=\tilde{A}$.

Maka $h_{f}(e)=\tilde{A}$, jika $e\in\tilde{A}-\mathcal{A}$,

$= \alpha_f(e) \cap \tilde{A}$, jika $e \in \mathcal{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}$

Karena $\mathcal{C} = \tilde{A}$. Maka $(h_f, \tilde{A}) = (\alpha_f, \mathcal{A})$ dan $h_f(e) = \alpha_f(e)\ \forall\ e \in \mathcal{C}$.

Dengan demikian, $h_f(e) = \alpha_f(e)$, di mana $\forall\ e \in \mathcal{C} = \tilde{A}$. Oleh karena itu $(h_f, \tilde{A}) = (\alpha_f, \mathcal{A})$.

Maka terbukti $(\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cap} \tilde{A} = \tilde{A}$ ■

Pada operasi himpunan biasa berlaku sifat de morgan

a. $((\alpha_f, \mathcal{A}) \cup (g_f, \mathcal{B}))^K = (\alpha_f, \mathcal{A})^K \cap (g_f, \mathcal{B})^K$

b. $((\alpha_f, \mathcal{A}) \cap (g_f, \mathcal{B}))^K = (\alpha_f, \mathcal{A})^K \cup (g_f, \mathcal{B})^K$

tetapi hal tersebut tidak berlaku pada himpunan lunak. Teorema berikut menunjukkan hubungan dari Operasi gabungan dan irisan antara dua himpunan lunak.

TEOREMA 3.4

Diketahui W himpunan parameter, dengan $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n\}$ dan $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n\}$. Dan diberikan $(\alpha_f, \mathcal{A})$ dan $(g_f, \mathcal{B})$ sebagai himpunan lunak atas U.

i.) $((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} (g_f, \mathcal{B}))^K = (\alpha_f, \mathcal{A})^c \tilde{\cup} (g_f, \mathcal{B})^K$

ii.) $((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cap} (g_f, \mathcal{B}))^K = (\alpha_f, \mathcal{A})^c \tilde{\cap} (g_f, \mathcal{B})^K$

Bukti :

i.) Dan diketahui $(\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} (g_f, \mathcal{B}) = (\alpha_f \cup g_f, \mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, untuk $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ dan $\forall\ e \in \mathcal{C}$, dimana

$$(\alpha_f \cup g_f)(e) = \begin{cases} \alpha_f(e), & \text{jika } e \in \mathcal{A} - \mathcal{B}, \\ g_f(e), & \text{jika } e \in \mathcal{B} - \mathcal{A} \\ \alpha_f(e) \cup g_f(e), & \text{jika } e \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \end{cases}$$

Kemudian, $((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} (g_f, \mathcal{B}))^K = (\alpha_f \cup g_f, \mathcal{A} \cup \mathcal{B})^K = (h_f, \mathcal{A} \cup \mathcal{B})^K = (h_f, \neg\mathcal{A} \cup \neg\mathcal{B})$.

Sekarang, $h_f^K, (\neg e) = U - h_f(e), \forall\ \neg e \in \neg\mathcal{A} \cup \neg\mathcal{B}$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} h_f^K(\neg e) &= \alpha_f^K(\neg e), && \text{jika } \neg e \in \neg\mathcal{A} - \neg\mathcal{B}, \\ &= g_f^K(\neg e), && \text{jika } \neg e \in \neg\mathcal{B} - \neg\mathcal{A} \\ &= \alpha_f^K(\neg e) \cup g_f^K(\neg e), && \text{jika } \neg e \in \neg\mathcal{A} \cap \neg\mathcal{B} \end{aligned}$$

Dan $(\alpha_f, \mathcal{A})^K \tilde{\cup} (g_f, \mathcal{B})^K = (\alpha_f^K, \neg\mathcal{A}) \tilde{\cup} (g_f^K, \neg\mathcal{B}) = (k_f, \neg\mathcal{A} \cup \neg\mathcal{B})$, di mana

$$\begin{aligned} k_f(\neg e) &= \alpha_f^K(\neg e), && \text{jika } \neg e \in \neg\mathcal{A} - \neg\mathcal{B}, \\ &= g_f^K(\neg e), && \text{jika } \neg e \in \neg\mathcal{B} - \neg\mathcal{A} \\ &= \alpha_f^K(\neg e) \cup g_f^K(\neg e), && \text{jika } \neg e \in \neg\mathcal{A} \cap \neg\mathcal{B} \end{aligned}$$

Dengan demikian, $h_f^K = (\alpha_f \cup g_f)^K = k_f$

Sehingga

$((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} (g_f, \mathcal{B}))^K = (\alpha_f, \mathcal{A})^K \tilde{\cup} (g_f, \mathcal{B})^K$

ii.) Diketahui $(\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cap} (g_f, \mathcal{B}) = (\alpha_f \cap g_f, \mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, untuk $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ dan $\forall\ e \in \mathcal{C}$, dimana

$$(\alpha_f \cap g_f)(e) = \begin{cases} \alpha_f(e), & \text{jika } e \in \mathcal{A} - \mathcal{B}, \\ g_f(e), & \text{jika } e \in \mathcal{B} - \mathcal{A} \\ \alpha_f(e) \cap g_f(e), & \text{jika } e \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \end{cases}$$

Kemudian $(\alpha_f, \mathcal{A})^K \tilde{\cap} (g_f . \mathcal{B})^K = ((\alpha_f \cap g_f)^K, \neg\mathcal{A} \cup \neg\mathcal{B}) = (h_f^K, \neg\mathcal{A} \cup \neg\mathcal{B}) = (h_f, \neg\mathcal{A} \cup \neg\mathcal{B})$, sekarang $(\alpha_f, \mathcal{A})^K \tilde{\cap} (g_f, \mathcal{B})^K = (\alpha_f^K, \neg\mathcal{A}) \tilde{\cap} (g_f^K, \neg\mathcal{B}) = (k_f, \neg\mathcal{A} \cap \neg\mathcal{B})$, di mana $\forall \neg e \in (\neg\mathcal{A} \cap \neg\mathcal{B})$, didapatkan $k_f(\neg e) = \alpha_f^K(\neg e)$ atau $g_f^K(\neg e), = \alpha_f(e)$ atau $g_f(e)$, di mana $e\ \forall\ \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = h_f(e) = h_f^K(\neg e)$

Dengan demikian, $k_f = h_f^K = (\alpha_f \cap g_f)^K$ memiliki pemetaan yang sama. Sehingga

$((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cap} (g_f, \mathcal{B}))^K = (\alpha_f, \mathcal{A})^K \tilde{\cap} (g_f, \mathcal{B})^K$ ■

CONTOH 3.6

Diketahui $U = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$ himpunan semesta yang beranggotakan enam rumah idaman yang akan dibeli dan $W = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. himpunan parameter rumah idaman yang tersedia, dan $(\alpha_f, \mathcal{A}), (g_f, \mathcal{B})$ masing-masing himpunan lunak atas U.

Dimisalkan $\alpha_f(\text{mahal}) = \{r_1, r_3, r_5\}, \alpha_f(\text{murah}) = \{r_2, r_4\}$, dan $g_f(\text{minimalis}) = \{r_3, r_6\}$, $g_f(\text{murah}) = \{r_2, r_4\}$. Dengan $\mathcal{A} = (\{\text{mahal}, \text{murah}\}), \mathcal{B} = (\{\text{minimalis}, \text{murah}\})$. Dan dapat ditunjukkan $(\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} (g_f, \mathcal{B}) = (\alpha_f \cup g_f, \mathcal{C}) = (\alpha_f, \mathcal{C}) = h_f(\text{mahal}) = \{r_1, r_3, r_5\}, h_f(\text{murah}) = \{r_2, r_4\}$, dan $h_f(\text{minimalis}) = \{r_3, r_6\}$. Sehingga didapatkan,

$((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} (g_f, \mathcal{B}))^K = (h_f, \mathcal{A} \cup \mathcal{B})^K$
$= (h_f(\text{mahal}) = \{r_1, r_3, r_5\}, h_f(\text{murah}) = \{r_2, r_4\},$
dan $h_f(\text{minimalis}) = \{r_3, r_6\})^K$
$= (h_f^K(\text{tidak mahal}) = \{r_2, r_4, r_6, r_7, r_8\}, h_f^K(\text{tidak murah}) = \{r_1, r_3, r_5, r_6, r_7, r_8\}$, dan $h_f^K(\text{tidak minimalis}) = \{r_1, r_2, r_4, r_5, r_7, r_8\}$,

Kemudian $(\alpha_f, \mathcal{A})^K \tilde{\cup} (g_f, \mathcal{B})^K = (\alpha_f^K(\text{tidak mahal}) = \{r_2, r_4, r_6, r_7, r_8\}, \alpha_f^K(\text{tidak murah}) = \{r_1, r_3, r_5, r_6, r_7, r_8\}) \tilde{\cup} (g_f^K(\text{tidak minimalis}) = \{r_1, r_2, r_4, r_5, r_7, r_8\}$, $g_f^K(\text{tidak murah}) = \{r_1, r_3, r_5, r_6, r_7, r_8\}) = (k_f, \neg A \cup \neg B)$
$= (k_f(\text{tidak mahal}) = \{r_2, r_4, r_6, r_7, r_8\}, k_f$ (tidak murah) $= \{r_1, r_3, r_5, r_6, r_7, r_8\}$, dan $k_f(\text{tidak minimalis}) = \{r_1, r_2, r_4, r_5, r_7, r_8\}$,

Dihasilkan

$((\alpha_f, \alpha_f) \tilde{\cup} (g_f, \mathcal{B}))^K = h_f^K = (\alpha_f \cup g_f)^K = k_f$

Maka $((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} (g_f, \mathcal{B}))^K = (\alpha_f, A)^K \tilde{\cup} (g_f, \mathcal{B})^K$

Pada himpunan lunak juga berlaku sifat asosiatif terhadap operasi irisan dan operasi gabungan.

Pada operasi berikut ini menunjukkan adanya hubungan sifat asosiatif tersebut

TEOREMA 3.5

Diketahui W himpunan parameter, dengan $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}, \mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n\}$. Dan diberikan $(\alpha_f, \mathcal{A})$ dan $(g_f, \mathcal{B})$ sebagai himpunan lunak atas U.

i.) $(\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} \left((g_f, \mathcal{B}) \tilde{\cup} (h_f, \mathcal{C})\right) = \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} (g_f, \mathcal{B})\right) \tilde{\cup} (h_f, \mathcal{C}),$

ii.) $(\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cap} \left((g_f, \mathcal{B}) \tilde{\cap} (h_f, \mathcal{C})\right) = \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cap} (g_f, \mathcal{B})\right) \cap (h_f, \mathcal{C}),$

Bukti :

i.) Akan dibuktikan $(\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} \left((g_f, \mathcal{B}) \tilde{\cup} (h_f, \mathcal{C})\right) = \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} (g_f, \mathcal{B})\right) \tilde{\cup} (h_f, \mathcal{C})$

Diketahui $(g_f, \mathcal{B}) \tilde{\cup} (h_f, \mathcal{C}) = (i_f, \mathcal{B} \cup \mathcal{C})$, di mana $\mathcal{D} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ dan $\forall\, e \in \mathcal{D} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$, Maka

$$(g_f \cup h_f)(e) = \begin{cases} g_f(e), & \text{jika } e \in \mathcal{B} - \mathcal{C}, \\ h_f(e), & \text{jika } e \in \mathcal{C} - \mathcal{B} \\ g_f(e) \cup h_f(e), & \text{jika } e \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \end{cases}$$

Dan $i_f(e) = g_f(e) \cup h_f(e)$, di mana $\forall\, e \in \mathcal{D} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$. Sekarang dimisalkan $(\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} (i_f, \mathcal{D}) = (j_f, \mathcal{A} \cup \mathcal{D})$ di mana $\mathcal{K} = \mathcal{A} \cup \mathcal{D}$ dan $\forall\, e \in \mathcal{K} = \mathcal{A} \cup \mathcal{D}$, Maka $(\alpha_f \cup i_f)(e) =$

$$\begin{cases} \alpha_f(e), & \text{jika } e \in \mathcal{A} - \mathcal{D}, \\ i_f(e), & \text{jika } e \in \mathcal{D} - \mathcal{A}, \\ \alpha_f(e) \cup i_f(e), & \text{jika } e \in \mathcal{A} \cap \mathcal{D} \end{cases}$$

Dan diperoleh $j_f(e) = \alpha_f(e) \cup i_f(e) = \alpha_f(e) \cup g_f(e) \cup h_f(e)$, di mana $\forall\, e \in \mathcal{K} = \mathcal{A} \cap \mathcal{D} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$.

Sekarang ambil $\left((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} (g_f, \mathcal{B})\right) = (i_f, \mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ di mana $\mathcal{M} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ dan $\forall\, e \in \mathcal{M} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$,

$$(\alpha_f \cup g_f)(e) = \begin{cases} \alpha_f(e), & \text{jika } e \in \mathcal{A} - \mathcal{B}, \\ g_f(e), & \text{jika } e \in \mathcal{B} - \mathcal{A}, \\ \alpha_f(e) \cup g_f(e), & \text{jika } e \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{M} \end{cases}$$

Dan $\ell_f(e) = \alpha_f(e) \cup g_f(e)$, di mana $\forall e \in \mathcal{M} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Dan dimisalkan $(\ell_f, \mathcal{M}) \tilde{\cup} (h_f, \mathcal{C}) = (n_f, \mathcal{M} \cup \mathcal{C})$ di mana $\mathcal{O} = \mathcal{M} \cup \mathcal{C}$ dan $\forall\, e \in \mathcal{O} = \mathcal{M} \cup \mathcal{C}$, Maka $(\ell_f \cup h_f)(e) =$

$$\begin{cases} \ell_f(e), & \text{jika } e \in \mathcal{M} - \mathcal{C}, \\ h_f(e), & \text{jika } e \in \mathcal{C} - \mathcal{M}, \\ \ell_f(e) \cup h_f(e), & \text{jika } e \in \mathcal{M} \cap \mathcal{C} \end{cases}$$

Dan diperoleh $n_f(e) = \ell_f(e) \cup h_f(e) = \alpha_f(e) \cup g_f(e) \cup h_f(e)$, di mana $\forall\, e \in \mathcal{O} = \mathcal{M} \cap \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C}$. Karena $(j_f, \mathcal{A} \cup \mathcal{D})$ dan $(n_f, \mathcal{M} \cup \mathcal{C})$ memiliki langkah pembuktian yang serupa, sehingga $\forall\, e \in \mathcal{K} = \mathcal{A} \cap \mathcal{D} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C}$. Maka $(j_f, \mathcal{K}) = (n_f, \mathcal{O})$

ii.) Akan dibuktikan $(\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cap} \left((g_f, \mathcal{B}) \tilde{\cap} (h_f, \mathcal{C})\right) = \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cap} (g_f, \mathcal{B})\right) \tilde{\cap} (h_f, \mathcal{C})$

Diketahui $(\ell_f, \mathcal{A}'), (r_f, \mathcal{B}')$, dan $(g_f \cap h_f, \mathcal{I})$ untuk $(\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cap} \left((g_f, \mathcal{B}) \tilde{\cap} (h_f, \mathcal{C})\right)$, $((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cap} (g_f, \mathcal{B})) \tilde{\cap} (h_f, \mathcal{C})$, dan $(\alpha_f, \mathcal{A}) \cap (g_f, \mathcal{B})$, maka

$\mathcal{A}' = \{e \in \mathcal{A} \cap \mathcal{I} \mid (\alpha_f)(e) \cap (g_f \cap h_f)(e) \neq \emptyset\}$
$= \{e \in \mathcal{A} \mid (\alpha_f)(e) \cap (g_f \cap h_f)(e) \neq \emptyset\} \cap$
$\{e \in \mathcal{I} \mid (\alpha_f)(e) \cap (g_f \cap h_f)(e) \neq \emptyset\}$
$= \{e \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \mid (g_f \cap h_f)(e) \cap \neq \emptyset, (g_f \cap h_f)(e) \cap \alpha_f(e) \neq \emptyset\} \cap \{e \in \mathcal{A} \mid (g_f \cap h_f)(e) \cap \alpha_f(e) \neq \emptyset\} = \{e \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \mid (g_f \cap h_f)(e) \cap \alpha_f(e) \neq \emptyset\} \cap \{e \in \mathcal{A} \mid (g_f \cap h_f)(e) \cap \alpha_f(e) \neq \emptyset\}$
$= \{e \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \mid (g_f \cap h_f)(e) \cap \alpha_f(e) \neq \emptyset\} = \{e \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \mid (\alpha_f)(e) \cap (g_f)(e) \cap h_f(e) \neq \emptyset\}$.

Karena didapati langkah pembuktian yang serupa untuk $\mathcal{B}' = \{e \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \mid (\alpha_f)(e) \cap (g_f)(e) \cap h_f(e) \neq \emptyset\}$. Maka $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$ sehingga $\forall e \in \mathcal{A}'$, diperoleh $\ell_f(e) = (\alpha_f)(e) \cap (g_f \cap h_f)(e) = (\alpha_f)(e) \cap (g_f)(e) \cap h_f(e) = ((\alpha_f)(e) \cap (g_f)(e)) \cap h_f(e) = (g_f \cap h_f)(e) \cap \alpha_f(e) = r_f(e)$

Maka $\ell_f(e) = r_f(e)$ ■

Pada himpunan lunak juga berlaku sifat distributif yang berpengaruh pada operasi gabungan dan operasi irisan seperti teorema berikut.

TEOREMA 3.6

Diketahui W himpunan parameter rumah idaman, dengan $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$ dan $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n\}$. Dan diberikan $(\alpha_f, \mathcal{A})$ dan $(g_f, \mathcal{B})$ sebagai himpunan lunak atas U.

i.) $(\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} \left((g_f, \mathcal{B}) \tilde{\cap} (h_f, \mathcal{C})\right) = \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} (g_f, \mathcal{B})\right) \tilde{\cap} \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} (h_f, \mathcal{C})\right),$

ii.) $(\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cap} \left((g_f, \mathcal{B}) \tilde{\cup} (h_f, \mathcal{C})\right) = \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cap} (g_f, \mathcal{B})\right) \tilde{\cup} \left((\alpha_f, A) \tilde{\cap} (h_f, \mathcal{C})\right),$

Bukti :

i.) Akan dibuktikan $(\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} \left((g_f, \mathcal{B}) \tilde{\cap} (h_f, \mathcal{C})\right) = \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} (g_f, \mathcal{B})\right) \tilde{\cap} \left((\alpha_f, A) \tilde{\cup} (h_f, \mathcal{C})\right)$

Dan diketahui $(\ell_f, \mathcal{A}')$, $(r_f, \mathcal{B}')$, sebagai himpunan lunak untuk

$(\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} \left((g_f, \mathcal{B}) \tilde{\cap} (h_f, \mathcal{C})\right), \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} (g_f, \mathcal{B})\right) \tilde{\cap} \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cup} (h_f, \mathcal{C})\right)$, didapatkan $\mathcal{A}' = \{e \in \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) | \ \alpha_f(e) \cup (g_f \cap h_f)(e) \neq \emptyset\}$

Dengan menggunakan sifat distributif dapat diperoleh e elemen $\mathcal{A}$ gabungan $\mathcal{B}$ beririsan dengan $\mathcal{A}$ gabungan $\mathcal{C}$ di mana $\alpha_f(e)$ gabungan $g_f(e)$ yang diiriskan $h_f(e)$ tidak sama dengan himpunan kosong.

Kemudian dapat dijabarkan kembali dengan menggunakan sifat distributif dan komplemen,

$\mathcal{A}' = \{e \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}^K | \alpha_f(e) \cup g_f(e) \neq \emptyset\} \cap \{ e \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \left| \alpha_f(e) \cup \left(g_f(e) \cap (h_f)(e)\right) \neq \emptyset\right\}$
$\cap \{ e \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}^K \cup \mathcal{C} | \alpha_f(e) \cup (h_f)(e) \neq \emptyset$
$= \{e \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}^K | \alpha_f(e) \cup g_f(e) \neq \emptyset \cap \{e \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} | \alpha_f(e) \cup g_f(e) \neq \emptyset\} \cap \{e \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}^K \cup \mathcal{C} | \alpha_f(e) \cup (h_f)(e) \neq \emptyset \cap \{ e \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \mid \alpha_f(e) \cup (h_f)(e) \neq \emptyset\} = \{ e \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \mid \alpha_f(e) \cup g_f(e) \neq \emptyset \cap \{e \in \mathcal{A} \cup \mathcal{C} | \ \alpha_f(e) \cup h_f(e) \neq \emptyset\} = \mathcal{B}'$.

Sehinggan $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$. Dengan lebih lanjut $\forall\, e \in \mathcal{A}'$, diperoleh $\ell_f(e) = (\alpha_f)(e) \cup (g_f \cap h_f)(e) = ((\alpha_f \cup g_f)(e) \ \cap (\alpha_f \cup h_f)(e) = r_f(e)$

Maka $\ell_f(e) = r_f(e)$

ii.) Akan dibuktikan $(\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cap} \left((g_f, \mathcal{B}) \tilde{\cup} (h_f, \mathcal{C})\right) = \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cap} (g_f, \mathcal{B})\right) \tilde{\cup} \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cap} (h_f, \mathcal{C})\right)$

Diketahui $(\ell_f, \mathcal{A}'), (r_f, \mathcal{B}')$, sebagai himpunan lunak untuk $(\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cap} \left((g_f, \mathcal{B}) \tilde{\cup} (h_f, \mathcal{C})\right)$, $\left((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cap} (g_f, \mathcal{B})\right) \tilde{\cup} \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \tilde{\cap} (h_f, \mathcal{C})\right)$, maka

$\mathcal{A}' = \{e \in \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) | \ \alpha_f(e) \cap (g_f \cup h_f)(e) \neq \emptyset\}$

Dengan menggunakan sifat distributif dapat diperoleh e elemen $\mathcal{A}$ irisan $\mathcal{B}$ gabungan dari $\mathcal{A}$ irisan $\mathcal{C}$ di mana $\alpha_f(e)$ beririsan dengan $g_f(e)$ gabungan $h_f(e)$ tidak sama dengan himpunan kosong.

Kemudian dapat dijabarkan kembali dengan menggunakan sifat distributif dan komplemen,

$\mathcal{A}' = \{e \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}^K | \alpha_f(e) \cap g_f(e) \neq \emptyset\} \cup \{ e \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C} | \alpha_f(e) \cap g_f(e) \cup (h_f)(e) \neq \emptyset\} \cup \{ e \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^K \cap \mathcal{C} | \alpha_f(e) \cap (h_f)(e) \neq \emptyset\} =$
$\{e \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}^K | \alpha_f(e) \cap g_f(e) \neq \emptyset\} \cup \{e \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}\} \alpha_f(e) \cap g_f(e) \neq \emptyset\} \cup \{e \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^K \cap \mathcal{C} | \alpha_f(e) \cap (h_f)(e) \neq \emptyset\} \cup \{e \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^K \cap \mathcal{C} | \alpha_f(e) \cap (h_f)(e) \neq \emptyset\} \cup \{e \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C} | \alpha_f(e) \cap (h_f)(e) \neq \emptyset\} = \{e \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} | \alpha_f(e) \cap g_f(e) \neq \emptyset\} \cup \{e \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C} | \ \alpha_f(e) \cap h_f(e) \neq \emptyset\} = \mathcal{B}'$

Sehinggan $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$. Dengan lebih lanjut $\forall\, e \in \mathcal{A}'$, diperoleh $\ell_f(e) = (\alpha_f)(e) \cap (g_f \cup h_f)(e) = ((\alpha_f \cap g_f)(e) \cup \cap (\alpha_f \cap h_f)(e) = r_f(e)$

Maka $\ell_f(e) = r_f(e)$ ■

Kemudian pada operasi ATAU dan DAN juga menunjukkan adanya hubungan sifat asosiatif.

TEOREMA 3.7

Diketahui E himpunan parameter rumah idaman. Dengan $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$ dan $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n\}$. Dan ditunjukkan $(\alpha_f, \mathcal{A})$ dan $(g_f, \mathcal{B})$ sebagai himpunan lunak atas U.

i.) $(\alpha_f, \mathcal{A}) \vee \left((g_f, \mathcal{B}) \vee (h_f, \mathcal{C})\right) = \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (g_f, \mathcal{B})\right) \vee (h_f, \mathcal{C})$,

ii.) $(\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge \left((g_f, \mathcal{B}) \wedge (h_f, \mathcal{C})\right) = \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (g_f, \mathcal{B})\right) \wedge (h_f, \mathcal{C})$,

Bukti :

i.) Akan dibuktikan $(\alpha_f, \mathcal{A}) \vee \left((g_f, \mathcal{B}) \vee (h_f, \mathcal{C})\right) = \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (g_f, \mathcal{B})\right) \vee (h_f, \mathcal{C})$,

Dan diketahui $(g_f, \mathcal{B}) \vee (h_f, \mathcal{C}) = (i_f, \mathcal{B} \times \mathcal{C})$ dengan $\alpha_f(\beta, \gamma) = g_f(\beta) \cup h_f(\gamma)$, dimana $\forall\, (\beta, \gamma) \in \mathcal{D} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Oleh karena itu $(\alpha_f, \mathcal{A}) \vee \left((g_f, \mathcal{B}) \vee (h_f, \mathcal{C})\right) = (\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (i_f, \mathcal{D})$.

Dengan $(\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (i_f, \mathcal{D}) = (j_f, \mathcal{A} \times \mathcal{D})$

Dan $j_f(\alpha, d) = \alpha_f(\alpha) \cup i_f(d)$, dimana $\forall\, (\alpha, d) \in \mathcal{K} = \mathcal{A} \times \mathcal{D}$. Maka $(j_f, \mathcal{K}) = (\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (i_f, \mathcal{D})$

Sekarang ambil $\left((\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (g_f, \mathcal{B})\right) = (\ell_f, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ dengan $\ell_f(\alpha, \beta) = \alpha_f(\alpha) \cup g_f(\beta)$, dimana $\forall\, (\alpha, \beta) \in \mathcal{M} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Oleh karena itu

$\left((\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (g_f, \mathcal{B})\right) \vee (h_f, \mathcal{C}) = (\ell_f, \mathcal{M}) \vee (h_f, \mathcal{C})$

Dengan $(\ell_f, \mathcal{M}) \vee (h_f, \mathcal{C}) = (n_f, \mathcal{M} \times \mathcal{C})$ dan $n_f(m, c) = \ell_f(m) \cup h_f(c)$, dimana $\forall\, (m, c) \in O = \mathcal{M} \times \mathcal{C}$. Maka $(\ell_f, M) \vee (h_f, \mathcal{C}) = (\mathcal{N}, O)$

Karena $\forall\, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{A} \times D = \mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) = \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C} = (A \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C} = \mathcal{M} \times \mathcal{C}$ sebarang, akan berlaku $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Dengan demikian $(\alpha_f, \mathcal{A}) \vee \left((g_f, \mathcal{B}) \vee (h_f, \mathcal{C})\right) = (j_f, \mathcal{K})$
$= (n_f, O)$

ii.) Akan dibuktikan $(\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge \left((g_f, \mathcal{B}) \wedge (\alpha_f, \mathcal{C})\right) = \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (g_f, \mathcal{B})\right) \wedge (h_f, \mathcal{C})$,

Diketahui $(g_f, \mathcal{B}) \wedge (h_f, \mathcal{C}) = (i_f, \mathcal{B} \times \mathcal{C})$ dengan $i_f(\beta, \gamma) = g_f(\beta) \cap h_f(\gamma)$, dimana $\forall\, (\beta, \gamma) \in \mathcal{D} =$

$\mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Oleh karena itu
$(\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge \left((g_f, \mathcal{B}) \wedge (h_f, \mathcal{C})\right) = (\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (i_f, \mathcal{D})$
Dengan $(\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (i_f, \mathcal{D}) = (j_f, \mathcal{A} \times \mathcal{D})$ dan $j_f(\alpha, d) = \alpha_f(\alpha) \cap i_f(d)$, dimana $\forall\ (\alpha, d) \in \mathcal{K} = \mathcal{A} \times \mathcal{D}$. Maka $(\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (i_f, \mathcal{D}) = (j_f, \mathcal{K})$. Sekarang ambil $\left((\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (g_f, \mathcal{B})\right) = (\ell_f, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ dengan $\ell_f(\alpha, \beta) = \alpha_f(\alpha) \cap g_f(\beta)$, dimana $\forall\ (\alpha, \beta) \in \mathcal{M} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Oleh karena itu $\left((\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (g_f, \mathcal{B})\right) \wedge (h_f, \mathcal{C}) = (\ell_f, \mathcal{M}) \wedge (h_f, \mathcal{C})$
Dengan $(\ell_f, \mathcal{M}) \wedge (h_f, \mathcal{C}) = (n_f, \mathcal{M} \times \mathcal{C})$ dan $n_f(m, \gamma) = \ell_f(m) \cap h_f(\gamma)$, dimana $\forall\ (m, \gamma) \in \mathcal{O} = \mathcal{M} \times \mathcal{C}$. Maka $(n_f . \mathcal{O}) = (\ell_f, \mathcal{M}) \wedge (h_f, \mathcal{C})$
Karena $\forall\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{A} \times \mathcal{D} = \mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) = \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C} = (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C} = \mathcal{M} \times \mathcal{C}$ sebarang, akan berlaku $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Dengan demikian $(\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge \left((g_f, \mathcal{B}) \wedge (h_f, \mathcal{C})\right) = (j_f, \mathcal{K})$

$$= (n_f, \mathcal{O}) \blacksquare$$

Selain itu pada operasi ATAU dan DAN juga menunjukkan adanya hubungan sifat distributif.

TEOREMA 3.8

Diketahui W himpunan parameter rumah idaman, dengan $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n\}$ dan $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n\}$. Dan diberikan $(\alpha_f, \mathcal{A})$ dan $(g_f, \mathcal{B})$ sebagai himpunan lunak atas U.

i.) $(\alpha_f, \mathcal{A}) \vee \left((g_f, \mathcal{B}) \wedge (h_f, \mathcal{C})\right) =$
$\left((\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (g_f, \mathcal{B})\right) \wedge \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (h_f, \mathcal{C})\right)$,

ii.) $(\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge \left((g_f, \mathcal{B}) \vee (h_f, \mathcal{C})\right) =$
$\left((\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (g_f, \mathcal{B})\right) \vee \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (h_f, \mathcal{C})\right)$

Bukti :

i.) Akan dibuktikan $(\alpha_f, \mathcal{A}) \vee \left((g_f, \mathcal{B}) \wedge (h_f, \mathcal{C})\right) =$
$\left((\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (g_f, \mathcal{B})\right) \wedge \left((\alpha_f, A) \wedge (h_f, \mathcal{C})\right)$,
Diketahui $(g_f, \mathcal{B}) \wedge (h_f, \mathcal{C}) = (i_f, \mathcal{B} \times \mathcal{C})$ dengan $i_f(\beta, \gamma) = g_f(\beta) \cap h_f(\gamma)$, dimana $\forall\ (\beta, \gamma) \in \mathcal{D} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Oleh karena itu
$(\alpha_f, \mathcal{A}) \vee \left((g_f, \mathcal{B}) \wedge (h_f, \mathcal{C})\right) = (\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (i_f, \mathcal{D})$
Dengan $(\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (i_f, \mathcal{D}) = (j_f, \mathcal{A} \times \mathcal{D})$ dan $j_f(\alpha, d) = \alpha_f(\alpha) \cup i_f(d)$, dimana $\forall\ (\alpha, d) \in \mathcal{K} = \mathcal{A} \times \mathcal{D}$. Maka $(\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (i_f, \mathcal{D}) = (j_f, K)$. Sekarang ambil $(\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (g_f, \mathcal{B}) = (\ell_f, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ dengan $\ell_f(\alpha, \beta) = \alpha_f(\alpha) \cup g_f(\beta)$, dimana $\forall\ (\alpha, \beta) \in \mathcal{M} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Oleh karena itu $(\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (g_f, \mathcal{B}) = (\ell_f, \mathcal{M})$ dan ambil $\left((\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (h_f, \mathcal{C})\right) = (n_f, \mathcal{A} \times \mathcal{C})$ dengan $n_f(\alpha, \gamma) = \alpha_f(\alpha) \cap h_f(\gamma)$, dimana $\forall\ (\alpha, \gamma) \in \mathcal{O} = \mathcal{A} \times \mathcal{C}$. Oleh karena itu $(\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (h_f, \mathcal{C}) = (n_f, \mathcal{O})$. Dan diperoleh $\left((\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (g_f, \mathcal{B})\right) \wedge \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (h_f, \mathcal{C})\right) = (\ell_f, \mathcal{M}) \wedge (n_f, \mathcal{O})$Sehingga $p_f(m, o) = \ell_f(m) \cap n_f(o)$ sebarang, $\forall (m, o) \in \mathcal{Q} = \mathcal{M} \times \mathcal{O}$ Karena $(\alpha_f, \mathcal{A}) \vee \left((g_f, \mathcal{B}) \wedge (h_f, \mathcal{C})\right) = (\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (i_f, \mathcal{D}) = (\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (i_f, \mathcal{B} \times \mathcal{C}) = (\ell_f, \mathcal{A} \times \mathcal{B}) \wedge (n_f, \mathcal{A} \times \mathcal{C}) = \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (g_f, \mathcal{B})\right) \wedge ((\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (h_f, \mathcal{C}))$. Maka $\forall\ (\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{A} \times \mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{C} \times \mathcal{B}$

ii.) Akan dibuktikan $(\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge \left((g_f, \mathcal{B}) \vee (h_f, \mathcal{C})\right) = \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (g_f, \mathcal{B})\right) \vee \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (h_f, \mathcal{C})\right)$,
Diketahui $(g_f, \mathcal{B}) \vee (h_f, \mathcal{C}) = (i_f, \mathcal{B} \times \mathcal{C})$ dengan $i_f(\beta, \gamma) = g_f(\beta) \cup h_f(\gamma)$, dimana $\forall\ (\beta, \gamma) \in \mathcal{D} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Oleh karena itu $(\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge ((g_f, \mathcal{B}) \vee (h_f, \mathcal{C})) = (\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (i_f, \mathcal{D})$dengan $(\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (i_f, \mathcal{D}) = (j_f, A \times \mathcal{D})$ dan $\alpha_f(\alpha, d) = \alpha_f(\alpha) \cap i_f(d)$, dimana $\forall\ (\alpha, d) \in K = \mathcal{A} \times \mathcal{D}$. Maka $(\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (i_f, \mathcal{D}) = (j_f, \mathcal{K})$. Sekarang ambil $(\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (g_f, \mathcal{B}) = (\ell_f, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ dengan $\ell_f(\alpha, \beta) = \alpha_f(\alpha) \cup g_f(\beta)$, dimana $\forall\ (\alpha, \beta) \in \mathcal{M} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Oleh karena itu $(\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (g_f, \mathcal{B}) = (\ell_f, \mathcal{M})$dan ambil $\left((\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (h_f, \mathcal{C})\right) = (n_f, \mathcal{A} \times \mathcal{C})$ dengan $n_f(\alpha, \gamma) = \alpha_f(\alpha) \cap h_f(\gamma)$, dimana $\forall\ (\alpha, \gamma) \in \mathcal{O} = \mathcal{A} \times \mathcal{C}$. Oleh karena itu $(\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (h_f, \mathcal{C}) = (n_f, \mathcal{O})$, dan diperoleh

$$\left((\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (g_f, \mathcal{B})\right) \vee \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (h_f, \mathcal{C})\right) = (\ell_f, \mathcal{M}) \vee (n_f, \mathcal{O})$$

Sehingga $p_f(m, o) = \ell_f(m) \cup n_f(o)$ sebarang, $\forall (m, o) \in \mathcal{Q} = \mathcal{M} \times \mathcal{O}$

Karena
$$\begin{aligned} (\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge \left((g_f, \mathcal{B}) \vee (h_f, \mathcal{C})\right) &= (\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (i_f, \mathcal{D}) \\ &= (\alpha_f, \mathcal{A}) \vee (i_f, \mathcal{B} \times \mathcal{C}) \\ &= (\ell_f, \mathcal{A} \times \mathcal{B}) \vee (n_f, \mathcal{A} \times \mathcal{C}) \\ &= \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (g_f, \mathcal{B})\right) \vee \left((\alpha_f, \mathcal{A}) \wedge (h_f, \mathcal{C})\right) \end{aligned}$$

Maka $\forall\ (\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C}$ ■

PENUTUP

SIMPULAN

Dari pembahasan pada artikel diperoleh sifat-sifat himpunan lunak yang berbeda dari himpunan biasa yaitu pada operasi ATAU dan DAN untuk himpunan lunak berlaku sifat De Morgan.

Sebaliknya sifat De Morgan tidak berlaku untuk operasi gabungan dan irisan.

Selain itu, himpunan lunak juga menunjukkan adanya hubungan antara operasi DAN dan ATAU terhadap sifat asosiatif dan distributif. Himpunan lunak juga menunjukkan hubungan pada sifat asosiatif dan distributif terhadap operasi irisan dan operasi gabungan.

SARAN

Dari penulisan artikel telah dipelajari sifat-sifat himpunan lunak. Dengan pengembangan keberlanjutan dapat diterapkan dalam aplikasi himpunan lunak dengan menerapkan sifat-sifat dari himpunan lunak yang telah dikaji.

DAFTAR PUSTAKA

Abdy, M. (2017). *Teori Himpunan Lunak Dan Beberapa Operasinya*.

Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., & Shabir, M. (2009). On some new operations in soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, *57*(9), 1547–1553. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.11.009

Aswani, A., Ransi, N., & Ramadhan, R. (2018). Penerapan Operasi Himpunan Dan Fungsi Agregasi Pada Perancangan Basis Data Alumni Universitas Halu Oleo. *SemanTIK*, *4*(1), 7–12. http://ojs.uho.ac.id/index.php/semantik/article/view/4081

Atanassov, K. T. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, *20*(1), 87–96. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3

Atanassov, K. T. (1994). Operators over interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, *64*(2), 159–174. https://doi.org/10.1016/0165-0114(94)90331-X

Bagaria, J. (2019). *Basic Set Theory* . Stanford Encyclopedia of Philosophy. https://plato.stanford.edu/entries/set-theory/basic-set-theory.html

Bilgiç, T., & Türkşen, I. B. (2000). *Measurement of Membership Functions: Theoretical and Empirical Work* (pp. 195–227). Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4429-6_4

Çağman, N., & Enginoğlu, S. (2010). Soft matrix theory and its decision making. *Computers and Mathematics with Applications*, *59*(10), 3308–3314. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.03.015

Enginoğlu, S., & Çağman, N. (2020). *Fuzzy Parameterized Fuzzy Soft Matrices And Their Application In Decision-Making*. 1105–1115. https://orcid.org/0000-0002-7188-9893.

Firmanenti, R., & Noliza Bakar, N. (2020). Beberapa Operasi Dan Sifat-Sifat Pada Himpunan Lembut Kabur. *Jurnal Matematika UNAND*, *9*(1), 30. https://doi.org/10.25077/jmu.9.1.30-37.2020

Gau, W. L., & Buehrer, D. J. (1993). Vague Sets. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, *23*(2), 610–614. https://doi.org/10.1109/21.229476

Gorzałczany, M. B. (1987). A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, *21*(1), 1–17. https://doi.org/10.1016/0165-0114(87)90148-5

Ilwaru, V. Y. I., Lesnussa, Y. A., Sahetapy, E. M., Leleury, Z. A., & Matematika, J. (2016). Aplikasi Operasi Himpunan Dan Matematika Morfologi Pada Pengolahan Citra Digital. In *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan | Desember* (Vol. 10, Issue 2). https://ojs3.unpatti.ac.id/index.php/barekeng/article/view/305

Jun, Y. B. (2008). Soft BCK/BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, *56*(5), 1408–1413. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.02.035

Jun, Y. B., Lee, K. J., & Park, C. H. (2010). Fuzzy soft set theory applied to BCK/BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, *59*(9), 3180–3192. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.03.004

Maji, P. K., Biswas, R., & Roy, A. R. (2003). Soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, *45*(4–5), 555–562. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(03)00016-6

Molodtsov, D. (1999). *Soft Set T h e o r y First R e s u l t s*. *37*, 19–31.

Onyeozili, I. A. ., & Gwary T. M. (2014). A Study Of The Fundamentals Of Soft Set Theory. *International Journal Of Scientific & Technology Research*, *3*. www.ijstr.org

Pawlak, Z. (1982). Rough sets. *International Journal of Computer & Information Sciences*, *11*(5), 341–356. https://doi.org/10.1007/BF01001956

Sezgin, A., & Atagün, A. O. (2011). On operations of soft sets. *Computers and Mathematics with Applications*, *61*(5), 1457–1467. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.01.018

Wati, W., & Bakar, N. N. (2017). Himpunan Lembut Dengan Menggunakan Himpunan Parameter Tunggal. *Jurnal Matematika UNAND*, *6*(1), 42. https://doi.org/10.25077/jmu.6.1.42-49.2017

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and*

Control, *8*(3), 338–353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

Zhu, P., & Wen, Q. (2013). Operations on soft sets revisited. *Journal of Applied Mathematics*, *2013*. https://doi.org/10.1155/2013/105752