

ANALISIS DINAMIK MODEL KOINFEKSI PENYAKIT RUBELLA DAN COVID-19

Rezanissa Purnamandaru

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : rezanissa.17030214034@mhs.unesa.ac.id

Rudianto Artiono

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : rudiantoartiono@unesa.ac.id

Abstrak

Kasus Covid-19 pertama kali ditemukan di Pasar Grosir Makanan Laut Huanan yang ada di Kota Wuhan, Ibukota Provinsi Hubei, Cina Tengah. Penyakit ini semakin menyebar ke beberapa negara di dunia, termasuk Indonesia karena penularannya pesat. Menurut WHO, penyakit menular tertinggi di Indonesia selain Covid-19 adalah penyakit Rubella. Kedua penyakit tersebut memiliki karakteristik yang hampir sama, sehingga pada artikel ini akan dibahas mengenai analisis model koinfeksi penyakit Rubella dan Covid-19. Analisis dilakukan dengan membuat pemodelan matematika koinfeksi penyakit, menentukan titik kritis, menentukan bilangan reproduksi dasar, dan simulasi numerik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa terdapat 4 titik kritis, yaitu titik kritis bebas penyakit, titik kritis endemik penyakit Rubella, titik kritis endemik Covid-19, serta titik kritis koinfeksi penyakit Rubella dan Covid-19. Hasil analisis dari semua titik kritis adalah stabil, karena semua nilai eigen yang dihasilkan bernilai negatif. Dari *next generation matrix* dihasilkan 2 bilangan reproduksi dasar, yaitu untuk penyakit Rubella (R_{0_r}) dan untuk Covid-19 (R_{0_c}). Ketika $R_{0_r} < 1$ dan $R_{0_c} < 1$, maka titik kritis bebas penyakit stabil sehingga penyakit Rubella dan Covid-19 akan menghilang dari populasi. Ketika $R_{0_r} > 1$ dan $R_{0_c} < 1$, maka titik kritis bebas penyakit menjadi tidak stabil yang artinya akan ditemukan orang yang terinfeksi Rubella pada populasi (Titik kritis endemik Rubella akan eksis). Ketika $R_{0_r} < 1$ dan $R_{0_c} > 1$, maka titik kritis bebas penyakit menjadi tidak stabil yang artinya akan ditemukan orang yang terinfeksi Covid-19 pada populasi (Titik kritis endemik Covid-19 akan eksis). Hasil dari simulasi numerik yang dilakukan menggunakan MATLAB juga mendukung hasil analisis tersebut.

Kata kunci: Covid-19, Rubella, Koinfeksi, Pemodelan Matematika

Abstract

The Covid-19 case was first discovered in the Huanan Seafood Wholesale Market in Wuhan City, the capital of Hubei Province, Central China. This disease is increasingly spreading to several countries in the world, including Indonesia because of the rapid transmission. According to WHO, an infectious disease in Indonesia other than Covid-19 is Rubella disease. These two diseases have almost the same facts, so this article will discuss the analysis of the co-infection models for Rubella and Covid-19. The analysis was carried out by making co-infection mathematical modeling, determining the critical point, determining the base number, and numerical simulation. The results showed that there were 4 critical points, namely disease-free critical points, endemic Rubella disease endemic points, Covid-19 endemic critical points, and Rubella and Covid-19 coinfection critical points. The analysis result from all critical points is stable, because all the eigenvalues are negative. From the next generation matrix, 2 treasury numbers are generated, namely for Rubella disease (R_{0_r}) and for Covid-19 (R_{0_c}). When $R_{0_r} < 1$ and $R_{0_c} < 1$, the free disease critical point will be stable so that Rubella and Covid-19 disease will disappear from the population. When $R_{0_r} > 1$ and $R_{0_c} < 1$, the free disease critical point becomes unstable, which means that people infected with Rubella will be found in the population (Rubella endemic critical point will exist). When $R_{0_r} < 1$ and $R_{0_c} > 1$, the free disease critical point becomes unstable, which means that people infected with Covid-19 will be found in the population (Covid-19 endemic critical points will exist). The results of the numerical simulation performed using MATLAB also support the results of the analysis.

Keywords : Covid-19, Rubella, Co-infection, Mathematical Modeling

PENDAHULUAN

Covid-19 pertama kali ditemukan di Pasar Grosir Makanan Laut Huanan yang ada di Kota Wuhan, Ibukota Provinsi Hubei, Cina Tengah. Virus penyebab penyakit ini dikenal dengan nama virus

Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus-2 (SARS-CoV-2) yang menyerang sistem pernapasan manusia hingga menyebabkan infeksi paru-paru yang berat (Abdillah, 2020; Prastyowati, 2020). Peningkatan jumlah manusia yang terinfeksi oleh penyakit ini terus meningkat setiap harinya tidak

hanya di wilayah China tetapi sudah menyebar hampir ke seluruh negara yang ada di dunia. Hal ini mengakibatkan Organisasi Kesehatan Dunia (WHO) perlu menetapkan kondisi pandemik global pada tanggal 12 Maret 2020 (Yusriani, 2020). Sampai pada tanggal 2 Desember 2020, terdapat 64.195.738 kasus manusia yang positif terinfeksi Covid-19 dengan kematian sebesar 1.486.844 kasus di seluruh dunia (Worldometer, 2020). Akibat dari banyaknya kasus tersebut, jumlah pasien yang dirawat di rumah sakit juga semakin banyak sehingga mengakibatkan kapasitas rumah sakit untuk penyakit menular lainnya semakin sedikit. Hal ini perlu diperhatikan mengingat pasien menular lainnya juga perlu mendapatkan penanganan yang serius. Salah satu contohnya adalah kasus penyakit Rubella, dimana menurut WHO penyakit ini merupakan penyakit menular tertinggi setelah campak yang banyak ditemukan di Indonesia (RI dkk, 2020).

Sampai dengan tahun 2018, menurut laporan yang dikeluarkan oleh kementerian kesehatan Republik Indonesia jumlah penderita penyakit campak dan rubella mencapai 57.056 kasus (Novikasari dkk, 2019). Penyakit rubella atau yang dikenal dengan nama campak Jerman ini tergolong penyakit yang dapat menular dengan sangat cepat tetapi tidak mematikan. Seseorang dengan penyakit rubella akan dapat sembuh dengan sendirinya akan tetapi, penyakit ini akan membutuhkan perhatian lebih ketika menginfeksi ibu yang sedang hamil. Bayi yang dilahirkan dari ibu hamil yang terinfeksi rubella akan menjadi bayi dengan CRS (Congenital Rubella Syndrome). Bayi akan mengalami kelainan jantung, gangguan pendengaran, masalah pada otak, keterlambatan perkembangan bahkan kematian (Febriani dkk, 2019; Prabandari dkk, 2018). Penyakit ini disebabkan oleh virus Rubella dari keluarga virus *Togaviridae* dan genus *Rubivirus* (Herman, 2019). Beberapa manifestasi klinis yang muncul setelah seseorang terinfeksi virus rubella adalah demam, ruam merah pada kulit, dan pembesaran kelenjar limfe di belakang telinga. Gejala ruam merah pada kulit hanya timbul pada 1-5% penderita.

Jika dilihat dari cara penularannya, penyakit Rubella memiliki karakteristik yang sama dengan cara penularan Covid-19, yaitu ditularkan dari manusia ke manusia melalui *droplets* yang keluar

pada saat orang batuk atau bersin. Selain dari cara penularannya yang sama, penyakit Covid-19 dan Rubella juga memiliki kesamaan yaitu tidak secara langsung menyebabkan kematian bagi penderitanya. Penderita rubella hanya akan mengakibatkan kematian pada bayi CRS, sementara Covid-19 akan mengakibatkan kematian pada seseorang yang memiliki penyakit bawaan (komorbiditas) (Haifa & MIA, 2020; Kadek & Darmadi, 2018; Hidayani, 2020). Gejala yang ditimbulkan oleh kedua penyakit tersebut juga relatif sama dengan masa inkubasi berkisar antar 10 hingga 20 hari (RI dkk, 2020; Soegijanto & Meita, 2016).

Berdasarkan latar belakang tersebut, penulis mengajukan penelitian terkait penyebaran penyakit koinfeksi antara Rubella dengan Covid-19. Hal ini dimungkinkan terjadi ketika seseorang yang telah terkena Rubella tidak mendapatkan perawatan dan tetap berinteraksi dengan orang lain yang kemungkinan telah terinfeksi Covid-19 atau sebaliknya. Analisis dari keberadaan kedua penyakit ini akan dilakukan melalui model matematika yang akan dikembangkan sesuai dengan karakteristik dari masing-masing penyakit.

Tujuan dari penelitian ini untuk melihat kondisi-kondisi ketika tidak ada penyakit Rubella dan Covid-19, ketika hanya ada penyakit Rubella saja, ketika hanya ada penyakit Covid-19 saja, dan ketika kedua penyakit ada secara bersamaan.

KAJIAN TEORI

RUBELLA

Rubella merupakan penyakit campak Jerman yang disebabkan oleh infeksi virus, biasanya ditandai dengan ruam merah pada kulit. Penyakit ini dapat menyerang ibu hamil, balita, anak-anak, maupun orang dewasa.

COVID-19

Covid-19 (*Corona Virus Disease*) merupakan penyakit menular yang menyerang sistem pernapasan dan imunitas tubuh. Penyakit ini disebabkan oleh virus SARS-CoV-2. Penyebaran penyakit ini tergolong cepat karena penularannya melalui *droplets* dari manusia ke manusia.

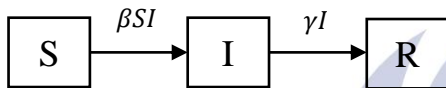
SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

Sistem persamaan diferensial merupakan sistem persamaan matematika yang terdiri dari fungsi satu variabel atau lebih. Sistem ini menghubungkan nilai

fungsi tersebut dengan turunannya. Persamaan diferensial tergolong menjadi dua jenis yaitu persamaan diferensial biasa (PDB) yang merupakan fungsi dari variabel bebas tunggal dan persamaan diferensial parsial (PDP) yang merupakan fungsi dari beberapa variabel bebas dengan melibatkan turunan parsial.

MODEL SIR

Model SIR (*Susceptibel, Infected, Recovered*) merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk memodelkan penyebaran penyakit. Model SIR dinyatakan dalam kompartemen model berikut (Sulaiman, 2017):



Gambar 1 Diagram Kompartemen Model SIR

Sistem persamaan model tersebut yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I \end{aligned}$$

dimana:

- $\frac{dS}{dt}$: laju transmisi jumlah manusia rentan pada saat t
- $\frac{dI}{dt}$: laju transmisi jumlah manusia terinfeksi pada saat t
- $\frac{dR}{dt}$: laju transmisi jumlah manusia yang sembuh pada saat t
- S: populasi manusia rentan
- I: populasi manusia terinfeksi
- R: populasi manusia yang sembuh
- β : laju transmisi antara populasi rentan dan populasi terinfeksi
- γ : laju kesembuhan

MATRIKS JACOBI

Matriks Jacobi merupakan matriks yang berhubungan dengan fungsi $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, yang terdiri dari fungsi f_1, f_2, \dots, f_n . Matriks Jacobi dari f di \hat{x} , didefinisikan sebagai berikut (Laksana, 2011):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\hat{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\hat{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\hat{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\hat{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\hat{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\hat{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\hat{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\hat{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\hat{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

KESTABILAN TITIK KRITIS

Kestabilan titik kritis dianalisis berdasarkan tanda pada bagian real nilai eigen yang didapat dari matriks Jacobi. Secara umum, kestabilan titik kritis dibagi menjadi 3 yaitu (A' maludin dkk, 2016):

1. Titik kritis stabil, ketika semua nilai eigen real bernilai ≤ 0
2. Titik kritis stabil asimtotik, ketika semua nilai eigen real bernilai < 0
3. Titik kritis tidak stabil, ketika ada nilai eigen real bernilai > 0

BILANGAN REPRODUKSI DASAR (R_0)

Bilangan reproduksi dasar (R_0) merupakan rata-rata banyaknya infeksi pada populasi rentan oleh satu manusia yang terinfeksi tiap satuan waktu. Jika $R_0 < 1$, maka banyaknya manusia yang terinfeksi akan semakin menurun sehingga penyakit akan menghilang. Jika $R_0 > 1$, maka banyaknya manusia yang terinfeksi akan semakin meningkat sehingga penyakit akan menyebar dan mewabah (Resmawan & Nurwan, 2017). R_0 dapat diperoleh dari nilai eigen yang dominan dari *next generation matrix* $K = FV^{-1}$. F dan V merupakan matriks $n \times n$ dengan $F = \left[\frac{\partial F_i(\varphi)}{\partial y_j} \right]$ dan $V = \left[\frac{\partial V_i(\psi)}{\partial y_j} \right]$, dimana φ menunjukkan populasi terinfeksi dan ψ menunjukkan populasi yang sembuh.

METODE

RANCANGAN PENELITIAN

Penelitian ini merupakan studi literatur yang mengkaji tentang pemodelan koinfeksi penyakit Rubella dan Covid-19. Setelah melakukan studi literatur, kemudian menyusun asumsi dan batasan masalah. Setelah itu, menganalisis kestabilan titik kritis terhadap kedua penyakit. Selanjutnya, menentukan bilangan reproduksi dasar dan menganalisis titik kritis endemik. Kemudian, melakukan simulasi numerik untuk menunjukkan eksistensi tiga titik kritis.

HASIL DAN PEMBAHASAN

MODEL MATEMATIKA

Model yang dibangun pada penelitian ini adalah model SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*) yang berkaitan dengan penyebaran penyakit menular dimana R_0 merupakan variabel yang mempengaruhi kestabilan dari model epidemiologi ini. Model SIR pada penelitian ini telah dimodifikasi menjadi $SI_r I_c I_{rc} R_r R_c R_{rc}$ yang terdiri dari 7

kompartmenten, yaitu populasi manusia rentan (S) (*Susceptible*), populasi manusia yang terinfeksi Rubella (I_r) (*Infected by Rubella*), populasi manusia yang terinfeksi Covid-19 (I_c) (*Infected by Covid-19*), populasi manusia yang terinfeksi Rubella dan Covid-19 (I_{rc}) (*Infected by Rubella and Covid-19*), populasi manusia yang sembuh dari Rubella (R_r) (*Recovered from Rubella*), populasi manusia yang sembuh dari Covid-19 (R_c) (*Recovered from Covid-19*), dan populasi manusia yang sembuh dari Rubella dan Covid-19 (R_{rc}) (*Recovered from Rubella and Covid-19*). Model matematika tersebut ditunjukkan pada Gambar 1. Asumsi yang digunakan pada model ini yaitu populasi tertutup dan konstan, populasi bercampur secara homogen, manusia yang sudah terinfeksi Rubella dapat terjadi re-infeksi, tidak ada kematian akibat Rubella maupun Covid-19.

Tingkat perubahan setiap kompartemen pada saat t diwakili oleh sistem persamaan diferensial biasa nonlinier berikut ini:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \rho_1 S - \rho_2 S - (1 - \rho_1)\beta_1 S I_r - (1 - \rho_2)\beta_2 S I_c - \mu S, \quad (1)$$

$$\frac{dI_r}{dt} = (1 - \rho_1)\beta_1 S I_r - \beta_3 I_r I_c - \delta_1 I_r - \mu I_r, \quad (2)$$

$$\frac{dI_c}{dt} = (1 - \rho_2)\beta_2 S I_c - \beta_4 I_r I_c - \delta_2 I_c - \mu I_c, \quad (3)$$

$$\frac{dI_{rc}}{dt} = \beta_3 I_r I_c + \beta_4 I_r I_c - \delta_3 I_{rc} - \mu I_{rc}, \quad (4)$$

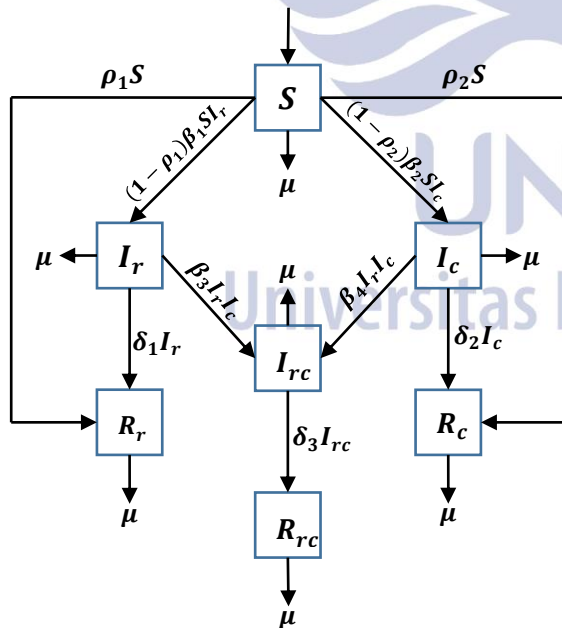
$$\frac{dR_r}{dt} = \delta_1 I_r + \rho_1 S - \mu R_r, \quad (5)$$

$$\frac{dR_c}{dt} = \delta_2 I_c + \rho_2 S - \mu R_c, \quad (6)$$

$$\frac{dR_{rc}}{dt} = \delta_3 I_{rc} - \mu R_{rc}. \quad (7)$$

Model ini dilengkapi dengan nilai awal berikut:

$$S(t_0) = S_0, I_r(t_0) = I_{r0}, I_c(t_0) = I_{c0}, I_{rc}(t_0) = I_{rc0}, R_r(t_0) = R_{r0}, R_c(t_0) = R_{c0}, R_{rc}(t_0) = R_{rc0}$$



Gambar 2 Diagram Kompartemen Model $SI_rI_cR_rR_cR_{rc}$

Di sini, $t \geq t_0$ mewakili waktu dalam hari dan t_0 menunjukkan tanggal mulai sistem epidemi virus corona dan Rubella.

Tabel 1 Variabel

Variabel	Keterangan
S	Populasi manusia rentan
I_r	Populasi manusia terinfeksi Rubella
I_c	Populasi manusia terinfeksi Covid-19
I_{rc}	Populasi manusia terinfeksi Rubella dan Covid-19
R_r	Populasi manusia yang sembuh dari Rubella
R_c	Populasi manusia yang sembuh dari Covid-19
R_{rc}	Populasi manusia yang sembuh dari Rubella dan Covid-19

Tabel 2 Parameter

Parameter	Keterangan
Λ	Laju kelahiran alami
β_1	Laju transmisi antara populasi rentan dan populasi yang terinfeksi Rubella
β_2	Laju transmisi antara populasi rentan dan populasi yang terinfeksi Covid-19
β_3	Laju transmisi antara populasi terinfeksi Rubella dan populasi yang juga terinfeksi Covid-19
β_4	Laju transmisi antara populasi terinfeksi Covid-19 dan populasi yang juga terinfeksi Rubella
ρ_1	Proporsi vaksin Rubella
ρ_2	Proporsi vaksin Covid-19
δ_1	Laju kesembuhan dari Rubella
δ_2	Laju kesembuhan dari Covid-19
δ_3	Laju kesembuhan dari koinfeksi Rubella dan Covid-19
μ	Laju kematian alami

TITIK KRITIS

1. Titik kritis bebas penyakit

$$\text{Titik kritis 1} = \left\{ S = \frac{\Lambda}{\mu + \rho_1 + \rho_2}, I_c = 0, I_r = 0, I_{rc} = 0, R_c = \frac{\Lambda \rho_2}{\mu(\rho_1 + \rho_2 + \mu)}, R_r = \frac{\Lambda \rho_1}{\mu(\rho_1 + \rho_2 + \mu)}, R_{rc} = 0 \right\}$$

2. Titik kritis endemik Rubella

$$\text{Titik kritis 2} = \left\{ S = -\frac{\mu + \delta_1}{\beta_1(\rho_1 - 1)}, I_c = 0, I_r = \frac{\Lambda \beta_1 \rho_1 + \mu \rho_1 + \mu \rho_2 + \delta_1 \rho_1 + \delta_1 \rho_2 - \Lambda \beta_1 + \mu^2 + \mu \delta_1}{\beta_1(\mu \rho_1 + \delta_1 \rho_1 - \mu - \delta_1)}, I_{rc} = 0, R_c = \right.$$

$$-\frac{(\mu+\delta_1)\rho_2}{\mu\beta_1(\rho_1-1)}, R_r = \frac{\Lambda\beta_1\delta_1\rho_1-\Lambda\beta_1\delta_1+\mu^2\delta_1-\mu^2\rho_1+\mu\delta_1^2-\mu\delta_1\rho_1+\mu\delta_1\rho_2+\delta_1^2\rho_2}{\mu\beta_1(\mu\rho_1+\delta_1\rho_1-\mu-\delta_1)}, R_{rc} = 0\}$$

3. Titik kritis endemik Covid-19

Titik kritis 3 =

$$\left\{ S = -\frac{\mu+\delta_2}{\mu\beta_2(\rho_2-1)}, I_c = \frac{\Lambda\beta_2\rho_2+\mu\rho_1+\mu\rho_2+\delta_2\rho_1+\delta_2\rho_2-\Lambda\beta_2+\mu^2+\mu\delta_2}{\beta_2(\mu\rho_2+\delta_2\rho_2-\mu-\delta_2)}, I_r = 0, I_{rc} = 0, R_c = \frac{\Lambda\beta_2\delta_2\rho_2-\Lambda\beta_2\delta_2+\mu^2\delta_2-\mu^2\rho_2+\mu\delta_2^2+\mu\delta_2\rho_1-\mu\delta_2\rho_2+\delta_2^2\rho_1}{\mu\beta_2(\mu\rho_2+\delta_2\rho_2-\mu-\delta_2)}, R_r = -\frac{(\mu+\delta_2)\rho_1}{\mu\beta_2(\rho_2-1)}, R_{rc} = 0 \right\}$$

4. Titik kritis endemik Rubella dan Covid-19

$$\text{Titik kritis 4} = \{S = S^*, I_c = I_c^*, I_r = I_r^*, I_{rc} = I_{rc}^*, R_c = R_c^*, R_r = R_r^*, R_{rc} = R_{rc}^*\}$$

Titik kritis endemik Rubella dan Covid-19 dapat diperoleh dengan bantuan Maple tetapi tidak dapat dituliskan pada artikel ini karena bentuknya yang kompleks.

Selanjutnya, pada pemodelan penyebaran penyakit terdapat beberapa hal penting, salah satunya adalah mengetahui apakah penyakit tetap berada di populasi atau menghilang dalam waktu yang lama. Hal tersebut dapat diketahui dari syarat terjadinya infeksi melalui analisis titik kritis dan syarat kestabilan. Berikut ini adalah analisis titik kritis, analisis kestabilan, analisis angka reproduksi dasar dan simulasi numerik.

ANALISIS TITIK KRITIS

Analisis ini dilakukan untuk mengetahui syarat terjadinya infeksi yaitu ketika $I_c > 0$ dan $I_r > 0$.

Titik kritis endemik Rubella eksis ketika $I_r > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\Lambda\beta_1\rho_1+\mu\rho_1+\mu\rho_2+\delta_1\rho_1+\delta_1\rho_2-\Lambda\beta_1+\mu^2+\mu\delta_1}{\beta_1(\mu\rho_1+\delta_1\rho_1-\mu-\delta_1)} > 0,$$

dengan syarat:

$$1. \Lambda\beta_1\rho_1 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_1\rho_1 + \delta_1\rho_2 - \Lambda\beta_1 + \mu^2 + \mu\delta_1 > 0 \text{ dan } \beta_1(\mu\rho_1 + \delta_1\rho_1 - \mu - \delta_1) > 0,$$

maka

$$\begin{aligned} (\mu + \delta_1)(\rho_1 + \rho_2 + \mu) + \Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1 &> 0 \\ \Leftrightarrow (\mu + \delta_1)(\rho_1 + \rho_2 + \mu) > \Lambda\beta_1 - \Lambda\beta_1\rho_1 \\ \Leftrightarrow \frac{(\mu+\delta_1)(\rho_1+\rho_2+\mu)}{\Lambda\beta_1-\Lambda\beta_1\rho_1} > 1, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \beta_1(\mu\rho_1 + \delta_1\rho_1 - \mu - \delta_1) &> 0 \\ \Leftrightarrow (\mu\rho_1 + \delta_1\rho_1 - \mu - \delta_1) &> 0 \\ \Leftrightarrow \rho_1(\mu + \delta_1) > \mu + \delta_1 \\ \Leftrightarrow \rho_1 > 1. \end{aligned}$$

$$2. \Lambda\beta_1\rho_1 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_1\rho_1 + \delta_1\rho_2 - \Lambda\beta_1 + \mu^2 + \mu\delta_1 < 0 \text{ dan } \beta_1(\mu\rho_1 + \delta_1\rho_1 - \mu - \delta_1) < 0,$$

maka

$$\begin{aligned} (\mu + \delta_1)(\rho_1 + \rho_2 + \mu) + \Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1 &< 0 \\ \Leftrightarrow (\mu + \delta_1)(\rho_1 + \rho_2 + \mu) < \Lambda\beta_1 - \Lambda\beta_1\rho_1 \\ \Leftrightarrow \frac{(\mu+\delta_1)(\rho_1+\rho_2+\mu)}{\Lambda\beta_1-\Lambda\beta_1\rho_1} < 1, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \beta_1(\mu\rho_1 + \delta_1\rho_1 - \mu - \delta_1) &< 0 \\ \Leftrightarrow (\mu\rho_1 + \delta_1\rho_1 - \mu - \delta_1) &< 0 \\ \Leftrightarrow \rho_1(\mu + \delta_1) < \mu + \delta_1 \\ \Leftrightarrow \rho_1 < 1. \end{aligned}$$

Titik kritis endemik Covid-19 eksis ketika $I_c > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\Lambda\beta_2\rho_2+\mu\rho_1+\mu\rho_2+\delta_2\rho_1+\delta_2\rho_2-\Lambda\beta_2+\mu^2+\mu\delta_2}{\beta_2(\mu\rho_2+\delta_2\rho_2-\mu-\delta_2)} > 0,$$

dengan syarat:

$$1. \Lambda\beta_2\rho_2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_2\rho_1 + \delta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 + \mu^2 + \mu\delta_2 > 0 \text{ dan } \beta_2(\mu\rho_2 + \delta_2\rho_2 - \mu - \delta_2) > 0,$$

maka

$$\begin{aligned} (\mu + \delta_2)(\rho_1 + \rho_2 + \mu) + \Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 &> 0 \\ \Leftrightarrow (\mu + \delta_2)(\rho_1 + \rho_2 + \mu) > \Lambda\beta_2 - \Lambda\beta_2\rho_2 \\ \Leftrightarrow \frac{(\mu+\delta_2)(\rho_1+\rho_2+\mu)+\Lambda\beta_2\rho_2}{\Lambda\beta_2-\Lambda\beta_2\rho_2} > 1, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \beta_2(\mu\rho_2 + \delta_2\rho_2 - \mu - \delta_2) &> 0 \\ \Leftrightarrow (\mu\rho_2 + \delta_2\rho_2 - \mu - \delta_2) &> 0 \\ \Leftrightarrow \rho_2(\mu + \delta_2) > \mu + \delta_2 \\ \Leftrightarrow \rho_2 > 1. \end{aligned}$$

$$2. \Lambda\beta_2\rho_2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_2\rho_1 + \delta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 + \mu^2 + \mu\delta_2 < 0 \text{ dan } \beta_2(\mu\rho_2 + \delta_2\rho_2 - \mu - \delta_2) < 0,$$

maka

$$\begin{aligned} (\mu + \delta_2)(\rho_1 + \rho_2 + \mu) + \Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 &< 0 \\ \Leftrightarrow (\mu + \delta_2)(\rho_1 + \rho_2 + \mu) < \Lambda\beta_2 - \Lambda\beta_2\rho_2 \\ \Leftrightarrow \frac{(\mu+\delta_2)(\rho_1+\rho_2+\mu)}{\Lambda\beta_2-\Lambda\beta_2\rho_2} < 1, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \beta_2(\mu\rho_2 + \delta_2\rho_2 - \mu - \delta_2) &< 0 \\ \Leftrightarrow (\mu\rho_2 + \delta_2\rho_2 - \mu - \delta_2) &< 0 \\ \Leftrightarrow \rho_2(\mu + \delta_2) < \mu + \delta_2 \\ \Leftrightarrow \rho_2 < 1. \end{aligned}$$

ANALISIS KESTABILAN

Berdasarkan model matematika koinfeksi Covid-19 dan Rubella, diperoleh titik kritis bebas penyakit. Substitusi titik kritis ini dalam matriks Jacobi sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$J_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu - \delta_3 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_1 & \delta_1 & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ \rho_2 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

dimana

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\mu - \mu\rho_1 - \mu\rho_2 \\ a_{12} &= \frac{\Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1}{\mu + \rho_1 + \rho_2} \end{aligned}$$

$$a_{13} = \frac{\Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2}{\mu + \rho_1 + \rho_2}$$

$$a_{22} = -\frac{\Lambda\beta_1\rho_1 + \Lambda\beta_1}{\mu + \rho_1 + \rho_2} - \mu - \delta_1$$

$$a_{33} = -\frac{\Lambda\beta_2\rho_2 + \Lambda\beta_2}{\mu + \rho_1 + \rho_2} - \mu - \delta_2$$

Berdasarkan matriks Jacobi tersebut didapatkan 7 nilai eigen, kemudian dilakukan analisis kestabilan terhadap semua nilai eigen. Nilai eigen tersebut yaitu:

1. $\lambda_1 = -\mu - \rho_1 - \rho_2$, diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka λ_1 selalu bernilai negatif, sehingga titik kritis bebas penyakit stabil karena λ_1 bernilai negatif.

2. $\lambda_2 = -\mu - \delta_3$, diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka λ_2 selalu bernilai negatif, sehingga titik kritis bebas penyakit stabil karena λ_2 bernilai negatif.

3. $\lambda_3 = -\frac{\Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 + \mu^2 + \mu\delta_2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_2\rho_1 + \delta_2\rho_2}{\mu + \rho_1 + \rho_2}$
 λ_3 harus bernilai negatif agar stabil, maka $-\frac{\Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 + \mu^2 + \mu\delta_2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_2\rho_1 + \delta_2\rho_2}{\mu + \rho_1 + \rho_2} < 0$
 $\Leftrightarrow -\frac{\Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 + (\mu + \delta_2)(\rho_1 + \rho_2 + \mu)}{\mu + \rho_1 + \rho_2} < 0$
 $\Leftrightarrow -\Lambda\beta_2\rho_2 + \Lambda\beta_2 - (\mu + \delta_2)(\rho_1 + \rho_2 + \mu) < 0$
 $\Leftrightarrow \Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 + (\mu + \delta_2)(\rho_1 + \rho_2 + \mu) > 0$
 $\Leftrightarrow (\mu + \delta_2)(\rho_1 + \rho_2 + \mu) > \Lambda\beta_2 - \Lambda\beta_2\rho_2$

$\Leftrightarrow \frac{(\mu + \delta_2)(\rho_1 + \rho_2 + \mu)}{\Lambda\beta_2 - \Lambda\beta_2\rho_2} > 1$
 diasumsikan semua parameter bernilai positif maka ketika dipenuhi $\frac{(\mu + \delta_2)(\rho_1 + \rho_2 + \mu)}{\Lambda\beta_2 - \Lambda\beta_2\rho_2} > 1$, diperoleh λ_3 yang bernilai negatif. Jadi, titik kritis bebas penyakit stabil karena λ_3 bernilai negatif.

4. $\lambda_4 = -\frac{\Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1 + \mu^2 + \mu\delta_1 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_1\rho_1 + \delta_1\rho_2}{\mu + \rho_1 + \rho_2}$
 λ_4 harus bernilai negatif agar stabil, maka $-\frac{\Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1 + \mu^2 + \mu\delta_1 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_1\rho_1 + \delta_1\rho_2}{\mu + \rho_1 + \rho_2} < 0$
 $\Leftrightarrow -\frac{\Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1 + (\mu + \delta_1)(\rho_1 + \rho_2 + \mu)}{\mu + \rho_1 + \rho_2} < 0$
 $\Leftrightarrow -\Lambda\beta_1\rho_1 + \Lambda\beta_1 - (\mu + \delta_1)(\rho_1 + \rho_2 + \mu) < 0$
 $\Leftrightarrow \Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1 + (\mu + \delta_1)(\rho_1 + \rho_2 + \mu) > 0$
 $\Leftrightarrow (\mu + \delta_1)(\rho_1 + \rho_2 + \mu) > \Lambda\beta_1 - \Lambda\beta_1\rho_1$
 $\Leftrightarrow \frac{(\mu + \delta_1)(\rho_1 + \rho_2 + \mu)}{\Lambda\beta_1 - \Lambda\beta_1\rho_1} > 1$

diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka ketika dipenuhi $\frac{(\mu + \delta_1)(\rho_1 + \rho_2 + \mu)}{\Lambda\beta_1 - \Lambda\beta_1\rho_1} > 1$, maka diperoleh λ_4 bernilai negatif. Jadi, titik kritis bebas penyakit stabil karena λ_4 bernilai negatif.

5. $\lambda_5 = -\mu$, diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka λ_5 selalu bernilai negatif, sehingga titik kritis bebas penyakit stabil karena λ_5 bernilai negatif.

6. $\lambda_6 = -\mu$, diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka λ_6 selalu bernilai negatif, sehingga titik kritis bebas penyakit stabil karena λ_6 bernilai negatif.

7. $\lambda_7 = -\mu$, diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka λ_7 selalu bernilai negatif, sehingga titik kritis bebas penyakit stabil karena λ_7 bernilai negatif.

Selanjutnya, analisis kestabilan pada titik kritis endemik penyakit Rubella. Substitusi titik kritis pada matriks Jacobi sehingga diperoleh matriks sebagai berikut:

$$J_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & -\mu - \delta_1 & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & -\mu - \delta_3 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_1 & \delta_1 & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ \rho_2 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

dimana

$$a_{11} = \frac{(\rho_1 - 1)}{\mu\rho_1 + \delta_1\rho_1 - \mu - \delta_1} (\Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1 + \mu^2 + \mu\delta_1 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_1\rho_1 + \delta_1\rho_2) - \mu - \rho_1 - \rho_2$$

$$a_{13} = -\frac{\beta_2(\mu + \delta_1)(\rho_2 - 1)}{\beta_1(\rho_1 - 1)}$$

$$a_{21} = -\frac{(\rho_1 - 1)}{\mu\rho_1 + \delta_1\rho_1 - \mu - \delta_1} (\Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1 + \mu^2 + \mu\delta_1 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_1\rho_1 + \delta_1\rho_2)$$

$$a_{23} = -\frac{\beta_3(\Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1 + \mu^2 + \mu\delta_1 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_1\rho_1 + \delta_1\rho_2)}{\beta_1(\mu\rho_1 + \delta_1\rho_1 - \mu - \delta_1)}$$

$$a_{33} = \frac{\beta_2(\mu + \delta_1)(\rho_2 - 1)}{\beta_1(\rho_1 - 1)} - \frac{\beta_4}{\beta_1(\mu\rho_1 + \delta_1\rho_1 - \mu - \delta_1)} (\Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1 + \mu^2 + \mu\delta_1 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_1\rho_1 + \delta_1\rho_2) - \mu - \delta_2$$

$$a_{43} = \frac{(\beta_3 + \beta_4)}{\beta_1(\mu\rho_1 + \delta_1\rho_1 - \mu - \delta_1)} (\Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1 + \mu^2 + \mu\delta_1 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_1\rho_1 + \delta_1\rho_2)$$

Berdasarkan matriks Jacobi tersebut didapatkan 7 nilai eigen, kemudian dilakukan analisis kestabilan terhadap semua nilai eigen. Nilai eigen tersebut yaitu:

1. $\lambda_1 = -\mu - \delta_3$, diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka λ_1 selalu bernilai negatif, sehingga titik kritis endemik penyakit Rubella stabil karena λ_1 terpenuhi.

2. Analisis kestabilan λ_2 dan λ_3 dapat diperoleh dari persamaan $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, dengan syarat $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$. Kondisi tersebut didapatkan ketika $-\frac{b}{a} < 0$ dan $\frac{c}{a} > 0$ yang diperoleh dari $\lambda_2 + \lambda_3 < 0$ dan $\lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$

Dengan menggunakan rumus ABC didapatkan

$$\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ dan } \lambda_3 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2(\mu + \delta_1)} (\Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1 + (\Lambda^2\beta_1^2\rho_1^2 - 2\Lambda^2\beta_1^2\rho_1 + 4\Lambda\mu^2\beta_1\rho_1 + 8\Lambda\mu\beta_1\rho_1\delta_1 + 4\Lambda\beta_1\rho_1\delta_1^2 + \Lambda^2\beta_1^2 - 4\Lambda\mu^2\beta_1 - 8\Lambda\mu\beta_1\delta_1 - 4\Lambda\beta_1\delta_1^2 + 4\mu^4 + 12\mu^3\delta_1 + 4\mu^3\rho_1 + 4\mu^3\rho_2 + 12\mu^2\delta_1^2 + 12\mu^2\rho_1\delta_1 + 12\mu^2\rho_2\delta_1 + 4\mu\delta_1^3 + 12\mu\rho_1\delta_1^2 + 12\mu\rho_2\delta_1^2 + 4\rho_1\delta_1^3 + 4\rho_2\delta_1^3)^{\frac{1}{2}})$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2(\mu + \delta_1)} (\Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1 - (\Lambda^2\beta_1^2\rho_1^2 - 2\Lambda^2\beta_1^2\rho_1 + 4\Lambda\mu^2\beta_1\rho_1 + 8\Lambda\mu\beta_1\rho_1\delta_1 + 4\Lambda\beta_1\rho_1\delta_1^2 + \Lambda^2\beta_1^2 - 4\Lambda\mu^2\beta_1 - 8\Lambda\mu\beta_1\delta_1 - 4\Lambda\beta_1\delta_1^2 + 4\mu^4 + 12\mu^3\delta_1 + 4\mu^3\rho_1 + 4\mu^3\rho_2 + 12\mu^2\delta_1^2 + 12\mu^2\rho_1\delta_1 + 12\mu^2\rho_2\delta_1 + 4\mu\delta_1^3 + 12\mu\rho_1\delta_1^2 + 12\mu\rho_2\delta_1^2 + 4\rho_1\delta_1^3 + 4\rho_2\delta_1^3)^{\frac{1}{2}})$$

Dari persamaan tersebut diperoleh:

$$a = \mu + \delta_1$$

$$b = \Lambda\beta_1 - \Lambda\beta_1\rho_1$$

$$b^2 = \Lambda^2\beta_1^2 - 2\Lambda^2\beta_1^2\rho_1 + \Lambda^2\beta_1^2\rho_1^2$$

$$c = -(\mu + \delta_1)(\Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1 + \mu\delta_1 + \delta_1\rho_1 + \delta_1\rho_2 + \mu^2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2)$$

Untuk $-\frac{b}{a} < 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{\Lambda\beta_1 - \Lambda\beta_1\rho_1}{\mu + \delta_1} < 0$$

$$\Leftrightarrow -\Lambda\beta_1 + \Lambda\beta_1\rho_1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \rho_1 < 1$$

Untuk $\frac{c}{a} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{\mu + \delta_1} (\mu + \delta_1)(\Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1 + \mu\delta_1 + \delta_1\rho_1 + \delta_1\rho_2 + \mu^2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2) > 0$$

$$\Leftrightarrow -(\Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1 + \mu\delta_1 + \delta_1\rho_1 + \delta_1\rho_2 + \mu^2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1 + \mu\delta_1 + \delta_1\rho_1 + \delta_1\rho_2 + \mu^2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \mu\delta_1 + \delta_1\rho_1 + \delta_1\rho_2 + \mu^2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 < \Lambda\beta_1 - \Lambda\beta_1\rho_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu\delta_1 + \delta_1\rho_1 + \delta_1\rho_2 + \mu^2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2}{\Lambda\beta_1 - \Lambda\beta_1\rho_1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\mu + \delta_1)(\rho_1 + \rho_2 + \mu)}{\Lambda\beta_1 - \Lambda\beta_1\rho_1} < 1,$$

diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka λ_2 dan λ_3 keduanya akan bernilai negatif jika dipenuhi $\frac{(\mu + \delta_1)(\rho_1 + \rho_2 + \mu)}{\Lambda\beta_1 - \Lambda\beta_1\rho_1} < 1$ dan

$\Leftrightarrow \rho_1 < 1$ sehingga titik kritis endemik penyakit Rubella stabil karena λ_2 dan λ_3 bernilai negatif.

$$3. \lambda_4 = -\frac{1}{\beta_1(\mu\rho_1 + \delta_1\rho_1 - \mu - \delta_1)} (\Lambda\beta_1\beta_4\rho_1 + \mu^2\beta_1\rho_1 - \mu^2\beta_2\rho_2 + \mu\beta_1\rho_1\delta_1 + \mu\beta_1\rho_1\delta_2 - 2\mu\beta_2\rho_2\delta_1 + \beta_1\rho_1\delta_1\delta_2 - \beta_2\rho_2\delta_1^2 - \Lambda\beta_1\beta_4 - \mu^2\beta_1 + \mu^2\beta_2 + \mu^2\beta_4 - \mu\beta_1\delta_1 - \mu\beta_1\delta_2 + 2\mu\beta_2\delta_1 + \mu\beta_4\delta_1 + \mu\beta_4\rho_2 - \beta_1\delta_1\delta_2 + \beta_2\delta_1^2 + \beta_4\rho_1\delta_1 + \beta_4\rho_2\delta_1)$$

λ_4 harus bernilai negatif agar stabil, maka

$$-\frac{1}{\beta_1(\mu\rho_1 + \delta_1\rho_1 - \mu - \delta_1)} (\Lambda\beta_1\beta_4\rho_1 + \mu^2\beta_1\rho_1 -$$

$$\mu^2\beta_2\rho_2 + \mu\beta_1\rho_1\delta_1 + \mu\beta_1\rho_1\delta_2 - 2\mu\beta_2\rho_2\delta_1 + \beta_1\rho_1\delta_1\delta_2 - \beta_2\rho_2\delta_1^2 - \Lambda\beta_1\beta_4 - \mu^2\beta_1 + \mu^2\beta_2 + \mu^2\beta_4 - \mu\beta_1\delta_1 - \mu\beta_1\delta_2 + 2\mu\beta_2\delta_1 + \mu\beta_4\delta_1 + \mu\beta_4\rho_1 + \mu\beta_4\rho_2 - \beta_1\delta_1\delta_2 + \beta_2\delta_1^2 + \beta_4\rho_1\delta_1 + \beta_4\rho_2\delta_1) < 0,$$

dengan syarat:

$$1. \Lambda\beta_1\beta_4\rho_1 + \mu^2\beta_1\rho_1 - \mu^2\beta_2\rho_2 + \mu\beta_1\rho_1\delta_1 + \mu\beta_1\rho_1\delta_2 - 2\mu\beta_2\rho_2\delta_1 + \beta_1\rho_1\delta_1\delta_2 - \beta_2\rho_2\delta_1^2 - \Lambda\beta_1\beta_4 - \mu^2\beta_1 + \mu^2\beta_2 + \mu^2\beta_4 - \mu\beta_1\delta_1 - \mu\beta_1\delta_2 + 2\mu\beta_2\delta_1 + \mu\beta_4\delta_1 + \mu\beta_4\rho_1 + \mu\beta_4\rho_2 - \beta_1\delta_1\delta_2 + \beta_2\delta_1^2 + \beta_4\rho_1\delta_1 + \beta_4\rho_2\delta_1 > 0 \text{ dan } \beta_1(\mu\rho_1 + \delta_1\rho_1 - \mu - \delta_1) > 0$$

maka

$$\Lambda\beta_1\beta_4\rho_1 + \mu^2\beta_1\rho_1 + \mu\beta_1\rho_1\delta_1 + \mu\beta_1\rho_1\delta_2 + \beta_1\rho_1\delta_1\delta_2 + \mu^2\beta_2 + \mu^2\beta_4 + 2\mu\beta_2\delta_1 + \mu\beta_4\delta_1 + \mu\beta_4\rho_1 + \mu\beta_4\rho_2 + \beta_2\delta_1^2 + \beta_4\rho_1\delta_1 + \beta_4\rho_2\delta_1 > \Lambda\beta_1\beta_4 + \mu^2\beta_2\rho_2 + 2\mu\beta_2\rho_2\delta_1 + \beta_2\rho_2\delta_1^2 + \mu^2\beta_1 + \mu\beta_1\delta_1 + \mu\beta_1\delta_2 + \beta_1\delta_1\delta_2$$

$$\Leftrightarrow (\Lambda\beta_1\beta_4\rho_1 + \mu^2\beta_1\rho_1 + \mu\beta_1\rho_1\delta_1 + \mu\beta_1\rho_1\delta_2 + \beta_1\rho_1\delta_1\delta_2 + \mu^2\beta_2 + \mu^2\beta_4 + 2\mu\beta_2\delta_1 + \mu\beta_4\delta_1 + \mu\beta_4\rho_1 + \mu\beta_4\rho_2 + \beta_2\delta_1^2 + \beta_4\rho_1\delta_1 + \beta_4\rho_2\delta_1) / (\Lambda\beta_1\beta_4 + \mu^2\beta_2\rho_2 + 2\mu\beta_2\rho_2\delta_1 + \beta_2\rho_2\delta_1^2 + \mu^2\beta_1 + \mu\beta_1\delta_1 + \mu\beta_1\delta_2 + \beta_1\delta_1\delta_2) > 1$$

\Leftrightarrow

$$\frac{(\mu + \delta_1)(\beta_1\rho_1(\mu + \delta_2) + \beta_2(\mu + \delta_1) + \beta_4(\rho_1 + \rho_2)) + \Lambda\beta_1\beta_4\rho_1}{(\mu + \delta_1)(\beta_2\rho_2(\mu + \delta_1) + \beta_1(\mu + \delta_2)) + \Lambda\beta_1\beta_4} > 1,$$

dan

$$\mu\beta_1\rho_1 + \beta_1\delta_1\rho_1 - \mu\beta_1 - \beta_1\delta_1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \mu\beta_1\rho_1 + \beta_1\delta_1\rho_1 > \mu\beta_1 + \beta_1\delta_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu\beta_1\rho_1 + \beta_1\delta_1\rho_1}{\mu\beta_1 + \beta_1\delta_1} > 1$$

$$2. \Lambda\beta_1\beta_4\rho_1 + \mu^2\beta_1\rho_1 - \mu^2\beta_2\rho_2 + \mu\beta_1\rho_1\delta_1 + \mu\beta_1\rho_1\delta_2 - 2\mu\beta_2\rho_2\delta_1 + \beta_1\rho_1\delta_1\delta_2 - \beta_2\rho_2\delta_1^2 - \Lambda\beta_1\beta_4 - \mu^2\beta_1 + \mu^2\beta_2 + \mu^2\beta_4 - \mu\beta_1\delta_1 - \mu\beta_1\delta_2 + 2\mu\beta_2\delta_1 + \mu\beta_4\delta_1 + \mu\beta_4\rho_1 + \mu\beta_4\rho_2 - \beta_1\delta_1\delta_2 + \beta_2\delta_1^2 + \beta_4\rho_1\delta_1 + \beta_4\rho_2\delta_1 < 0 \text{ dan } \beta_1(\mu\rho_1 + \delta_1\rho_1 - \mu - \delta_1) < 0$$

maka

$$\Lambda\beta_1\beta_4\rho_1 + \mu^2\beta_1\rho_1 + \mu\beta_1\rho_1\delta_1 + \mu\beta_1\rho_1\delta_2 + \beta_1\rho_1\delta_1\delta_2 + \mu^2\beta_2 + \mu^2\beta_4 + 2\mu\beta_2\delta_1 + \mu\beta_4\delta_1 + \mu\beta_4\rho_1 + \mu\beta_4\rho_2 + \beta_2\delta_1^2 + \beta_4\rho_1\delta_1 + \beta_4\rho_2\delta_1 < \Lambda\beta_1\beta_4 + \mu^2\beta_2\rho_2 + 2\mu\beta_2\rho_2\delta_1 + \beta_2\rho_2\delta_1^2 + \mu^2\beta_1 + \mu\beta_1\delta_1 + \mu\beta_1\delta_2 + \beta_1\delta_1\delta_2$$

$$\Leftrightarrow (\Lambda\beta_1\beta_4\rho_1 + \mu^2\beta_1\rho_1 + \mu\beta_1\rho_1\delta_1 + \mu\beta_1\rho_1\delta_2 + \beta_1\rho_1\delta_1\delta_2 + \mu^2\beta_2 + \mu^2\beta_4 + 2\mu\beta_2\delta_1 + \mu\beta_4\delta_1 + \mu\beta_4\rho_1 + \mu\beta_4\rho_2 + \beta_2\delta_1^2 + \beta_4\rho_1\delta_1 + \beta_4\rho_2\delta_1) / (\Lambda\beta_1\beta_4 + \mu^2\beta_2\rho_2 + 2\mu\beta_2\rho_2\delta_1 + \beta_2\rho_2\delta_1^2 + \mu^2\beta_1 + \mu\beta_1\delta_1 + \mu\beta_1\delta_2 + \beta_1\delta_1\delta_2) < 1,$$

dan

$$\mu\beta_1\rho_1 + \beta_1\delta_1\rho_1 - \mu\beta_1 - \beta_1\delta_1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \mu\beta_1\rho_1 + \beta_1\delta_1\rho_1 < \mu\beta_1 + \beta_1\delta_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu\beta_1\rho_1 + \beta_1\delta_1\rho_1}{\mu\beta_1 + \beta_1\delta_1} < 1,$$

diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka λ_4 akan bernilai negatif jika syarat di atas dipenuhi, sehingga titik kritis endemik penyakit Rubella stabil

4. $\lambda_5 = -\mu$, diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka λ_5 selalu bernilai negatif, sehingga titik kritis endemik penyakit Rubella stabil karena λ_5 bernilai negatif.
5. $\lambda_6 = -\mu$, diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka λ_6 selalu bernilai negatif, sehingga titik kritis endemik penyakit Rubella stabil karena λ_6 bernilai negatif.
6. $\lambda_7 = -\mu$, diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka λ_7 selalu bernilai negatif, sehingga titik kritis endemik penyakit Rubella stabil karena λ_7 bernilai negatif.

Selanjutnya, analisis kestabilan dilakukan pada titik kritis endemik Covid-19. Substitusi titik kritis pada matriks Jacobi sehingga diperoleh matriks sebagai berikut:

$$J_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & -\mu - \delta_3 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_1 & \delta_1 & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ \rho_2 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

dimana

$$a_{11} = \frac{(\rho_2 - 1)}{\mu\rho_2 + \delta_2\rho_2 - \mu - \delta_2} (\Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 + \mu^2 + \mu\delta_2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_2\rho_1 + \delta_2\rho_2) - \mu - \rho_1 - \rho_2$$

$$a_{12} = -\frac{\beta_1(\mu + \delta_2)(\rho_1 - 1)}{\beta_2(\rho_2 - 1)}$$

$$a_{22} = \frac{\beta_1(\mu + \delta_2)(\rho_1 - 1)}{\beta_2(\rho_2 - 1)} - \frac{\beta_3}{\beta_2(\mu\rho_2 + \delta_2\rho_2 - \mu - \delta_2)} (\Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 + \mu^2 + \mu\delta_2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_2\rho_1 + \delta_2\rho_2) - \mu - \delta_1$$

$$a_{31} = -\frac{(\rho_2 - 1)}{\mu\rho_2 + \delta_2\rho_2 - \mu - \delta_2} (\Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 + \mu^2 + \mu\delta_2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_2\rho_1 + \delta_2\rho_2)$$

$$a_{32} = -\frac{\beta_4(\Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 + \mu^2 + \mu\delta_2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_2\rho_1 + \delta_2\rho_2)}{\beta_2(\mu\rho_2 + \delta_2\rho_2 - \mu - \delta_2)}$$

$$a_{42} = \frac{(\beta_3 + \beta_4)}{\beta_2(\mu\rho_2 + \delta_2\rho_2 - \mu - \delta_2)} (\Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 + \mu^2 + \mu\delta_2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_2\rho_1 + \delta_2\rho_2)$$

Berdasarkan matriks Jacobi tersebut didapatkan 7 nilai eigen, kemudian dilakukan analisis kestabilan terhadap semua nilai eigen. Nilai eigen tersebut yaitu:

1. $\lambda_1 = -\mu - \delta_3$, diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka λ_1 selalu bernilai negatif, sehingga titik kritis endemik Covid-19 stabil karena λ_1 terpenuhi.
2. Analisis kestabilan λ_2 dan λ_3 dapat diperoleh dari persamaan $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, dengan syarat

$\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$. Kondisi tersebut didapatkan ketika $-\frac{b}{a} < 0$ dan $\frac{c}{a} > 0$ yang diperoleh dari $\lambda_2 + \lambda_3 < 0$ dan $\lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$

Dengan menggunakan rumus ABC didapatkan

$$\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ dan } \lambda_3 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2(\mu + \delta_2)} (\Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 + (\Lambda^2\beta_2^2\rho_2^2 - 2\Lambda^2\beta_2^2\rho_2 + 4\Lambda\mu^2\beta_2\rho_2 + 8\Lambda\mu\beta_2\rho_2\delta_2 + 4\Lambda\beta_2\rho_2\delta_2^2 + \Lambda^2\beta_2^2 - 4\Lambda\mu^2\beta_2 - 8\Lambda\mu\beta_2\delta_2 - 4\Lambda\beta_2\delta_2^2 + 4\mu^4 + 12\mu^3\delta_2 + 4\mu^3\rho_1 + 4\mu^3\rho_2 + 12\mu^2\delta_2^2 + 12\mu^2\rho_1\delta_2 + 12\mu^2\rho_2\delta_2 + 4\mu\delta_2^3 + 12\mu\rho_1\delta_2^2 + 12\mu\rho_2\delta_2^2 + 4\rho_1\delta_2^3 + 4\rho_2\delta_2^3)^{\frac{1}{2}})$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2(\mu + \delta_2)} (\Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 - (\Lambda^2\beta_2^2\rho_2^2 - 2\Lambda^2\beta_2^2\rho_2 + 4\Lambda\mu^2\beta_2\rho_2 + 8\Lambda\mu\beta_2\rho_2\delta_2 + 4\Lambda\beta_2\rho_2\delta_2^2 + \Lambda^2\beta_2^2 - 4\Lambda\mu^2\beta_2 - 8\Lambda\mu\beta_2\delta_2 - 4\Lambda\beta_2\delta_2^2 + 4\mu^4 + 12\mu^3\delta_2 + 4\mu^3\rho_1 + 4\mu^3\rho_2 + 12\mu^2\delta_2^2 + 12\mu^2\rho_1\delta_2 + 12\mu^2\rho_2\delta_2 + 4\mu\delta_2^3 + 12\mu\rho_1\delta_2^2 + 12\mu\rho_2\delta_2^2 + 4\rho_1\delta_2^3 + 4\rho_2\delta_2^3)^{\frac{1}{2}})$$

Dari persamaan tersebut diperoleh:

$$a = \mu + \delta_2$$

$$b = \Lambda\beta_2 - \Lambda\beta_2\rho_2$$

$$b^2 = \Lambda^2\beta_2^2 - 2\Lambda^2\beta_2^2\rho_2 + \Lambda^2\beta_2^2\rho_2^2$$

$$c = -(\mu + \delta_2)(\Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 + \mu\delta_2 + \delta_2\rho_1 + \delta_2\rho_2 + \mu^2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2)$$

Untuk $-\frac{b}{a} < 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{\Lambda\beta_2 - \Lambda\beta_2\rho_2}{\mu + \delta_2} < 0$$

$$\Leftrightarrow -\Lambda\beta_2 + \Lambda\beta_2\rho_2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \rho_2 < 1$$

Untuk $\frac{c}{a} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{\mu + \delta_2} (\mu + \delta_2)(\Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 + \mu\delta_2 + \delta_2\rho_1 + \delta_2\rho_2 + \mu^2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2) > 0$$

$$\Leftrightarrow -(\Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 + \mu\delta_2 + \delta_2\rho_1 + \delta_2\rho_2 + \mu^2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 + \mu\delta_2 + \delta_2\rho_1 + \delta_2\rho_2 + \mu^2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \mu\delta_2 + \delta_2\rho_1 + \delta_2\rho_2 + \mu^2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 < \Lambda\beta_2 - \Lambda\beta_2\rho_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu\delta_2 + \delta_2\rho_1 + \delta_2\rho_2 + \mu^2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2}{\Lambda\beta_2 - \Lambda\beta_2\rho_2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\mu + \delta_2)(\rho_1 + \rho_2 + \mu)}{\Lambda\beta_2 - \Lambda\beta_2\rho_2} < 1,$$

diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka λ_2 dan λ_3 keduanya akan bernilai negatif jika dipenuhi $\frac{(\mu + \delta_2)(\rho_1 + \rho_2 + \mu)}{\Lambda\beta_2 - \Lambda\beta_2\rho_2} < 1$ dan $\rho_2 < 1$ sehingga titik kritis endemik penyakit Covid-19 stabil karena λ_2 dan λ_3 bernilai negatif.

3. $\lambda_4 = -\frac{1}{\beta_2(\mu\rho_2 + \delta_2\rho_2 - \mu - \delta_2)} (\Lambda\beta_2\beta_3\rho_2 - \mu^2\beta_1\rho_1 + \mu^2\beta_2\rho_2 - 2\mu\beta_1\rho_1\delta_2 + \mu\beta_2\rho_2\delta_1 + \mu\beta_2\rho_2\delta_2 - \beta_1\rho_1\delta_2^2 + \beta_2\rho_2\delta_1\delta_2 - \Lambda\beta_2\beta_3 + \mu^2\beta_1 - \mu^2\beta_2 +$

$$\mu^2\beta_3 + 2\mu\beta_1\delta_2 - \mu\beta_2\delta_1 - \mu\beta_2\delta_2 + \mu\beta_3\delta_2 + \mu\beta_3\rho_1 + \mu\beta_3\rho_2 + \beta_1\delta_2^2 - \beta_2\delta_1\delta_2 + \beta_3\rho_1\delta_2 + \beta_3\rho_2\delta_2)$$

λ_4 harus bernilai negatif agar stabil, maka

$$-\frac{1}{\beta_2(\mu\rho_2+\delta_2\rho_2-\mu-\delta_2)}(\Lambda\beta_2\beta_3\rho_2 - \mu^2\beta_1\rho_1 + \mu^2\beta_2\rho_2 - 2\mu\beta_1\rho_1\delta_2 + \mu\beta_2\rho_2\delta_1 + \mu\beta_2\rho_2\delta_2 - \beta_1\rho_1\delta_2^2 + \beta_2\rho_2\delta_1\delta_2 - \Lambda\beta_2\beta_3 + \mu^2\beta_1 - \mu^2\beta_2 + \mu^2\beta_3 + 2\mu\beta_1\delta_2 - \mu\beta_2\delta_1 - \mu\beta_2\delta_2 + \mu\beta_3\delta_2 + \mu\beta_3\rho_1 + \mu\beta_3\rho_2 + \beta_1\delta_2^2 - \beta_2\delta_1\delta_2 + \beta_3\rho_1\delta_2 + \beta_3\rho_2\delta_2) < 0$$

dengan syarat:

$$1. \Lambda\beta_2\beta_3\rho_2 - \mu^2\beta_1\rho_1 + \mu^2\beta_2\rho_2 - 2\mu\beta_1\rho_1\delta_2 + \mu\beta_2\rho_2\delta_1 + \mu\beta_2\rho_2\delta_2 - \beta_1\rho_1\delta_2^2 + \beta_2\rho_2\delta_1\delta_2 - \Lambda\beta_2\beta_3 + \mu^2\beta_1 - \mu^2\beta_2 + \mu^2\beta_3 + 2\mu\beta_1\delta_2 - \mu\beta_2\delta_1 - \mu\beta_2\delta_2 + \mu\beta_3\delta_2 + \mu\beta_3\rho_1 + \mu\beta_3\rho_2 + \beta_1\delta_2^2 - \beta_2\delta_1\delta_2 + \beta_3\rho_1\delta_2 + \beta_3\rho_2\delta_2 > 0 \text{ dan } \beta_2(\mu\rho_2 + \delta_2\rho_2 - \mu - \delta_2) > 0$$

maka

$$\Lambda\beta_2\beta_3\rho_2 + \mu^2\beta_2\rho_2 + \mu\beta_2\rho_2\delta_1 + \mu\beta_2\rho_2\delta_2 + \beta_2\rho_2\delta_1\delta_2 + \mu^2\beta_1 + \mu^2\beta_3 + 2\mu\beta_1\delta_2 + \mu\beta_3\delta_2 + \mu\beta_3\rho_1 + \mu\beta_3\rho_2 + \beta_1\delta_2^2 + \beta_3\rho_1\delta_2 + \beta_3\rho_2\delta_2 > \Lambda\beta_2\beta_3 + \mu^2\beta_1\rho_1 + 2\mu\beta_1\rho_1\delta_2 + \beta_1\rho_1\delta_2^2 + \mu^2\beta_2 + \mu\beta_2\delta_1 + \mu\beta_2\delta_2 + \beta_2\delta_1\delta_2$$

$$\Leftrightarrow (\Lambda\beta_2\beta_3\rho_2 + \mu^2\beta_2\rho_2 + \mu\beta_2\rho_2\delta_1 + \mu\beta_2\rho_2\delta_2 + \beta_2\rho_2\delta_1\delta_2 + \mu^2\beta_1 + \mu^2\beta_3 + 2\mu\beta_1\delta_2 + \mu\beta_3\delta_2 + \mu\beta_3\rho_1 + \mu\beta_3\rho_2 + \beta_1\delta_2^2 + \beta_3\rho_1\delta_2 + \beta_3\rho_2\delta_2)/(\Lambda\beta_2\beta_3 + \mu^2\beta_1\rho_1 + 2\mu\beta_1\rho_1\delta_2 + \beta_1\rho_1\delta_2^2 + \mu^2\beta_2 + \mu\beta_2\delta_1 + \mu\beta_2\delta_2 + \beta_2\delta_1\delta_2) > 1$$

\Leftrightarrow

$$\frac{(\mu+\delta_2)(\beta_2\rho_2(\mu+\delta_1)+\beta_1(\mu+\delta_2)+\beta_3(\rho_1+\rho_2))+\Lambda\beta_2\beta_3\rho_2}{(\mu+\delta_2)(\beta_1\rho_1(\mu+\delta_2)+\beta_2(\mu+\delta_1))+\Lambda\beta_2\beta_3} >$$

1,

dan

$$\mu\beta_2\rho_2 + \beta_2\delta_2\rho_2 - \mu\beta_2 - \beta_2\delta_2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \mu\beta_2\rho_2 + \beta_2\delta_2\rho_2 > \mu\beta_2 + \beta_2\delta_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu\beta_2\rho_2+\beta_2\delta_2\rho_2}{\mu\beta_2+\beta_2\delta_2} > 1$$

$$2. \Lambda\beta_2\beta_3\rho_2 - \mu^2\beta_1\rho_1 + \mu^2\beta_2\rho_2 - 2\mu\beta_1\rho_1\delta_2 + \mu\beta_2\rho_2\delta_1 + \mu\beta_2\rho_2\delta_2 - \beta_1\rho_1\delta_2^2 + \beta_2\rho_2\delta_1\delta_2 - \Lambda\beta_2\beta_3 + \mu^2\beta_1 - \mu^2\beta_2 + \mu^2\beta_3 + 2\mu\beta_1\delta_2 - \mu\beta_2\delta_1 - \mu\beta_2\delta_2 + \mu\beta_3\delta_2 + \mu\beta_3\rho_1 + \mu\beta_3\rho_2 + \beta_1\delta_2^2 - \beta_2\delta_1\delta_2 + \beta_3\rho_1\delta_2 + \beta_3\rho_2\delta_2 < 0 \text{ dan } \beta_2(\mu\rho_2 + \delta_2\rho_2 - \mu - \delta_2) < 0$$

maka

$$\Lambda\beta_2\beta_3\rho_2 + \mu^2\beta_2\rho_2 + \mu\beta_2\rho_2\delta_1 + \mu\beta_2\rho_2\delta_2 + \beta_2\rho_2\delta_1\delta_2 + \mu^2\beta_1 + \mu^2\beta_3 + 2\mu\beta_1\delta_2 + \mu\beta_3\delta_2 + \mu\beta_3\rho_1 + \mu\beta_3\rho_2 + \beta_1\delta_2^2 + \beta_3\rho_1\delta_2 + \beta_3\rho_2\delta_2 < \Lambda\beta_2\beta_3 + \mu^2\beta_1\rho_1 + 2\mu\beta_1\rho_1\delta_2 + \beta_1\rho_1\delta_2^2 + \mu^2\beta_2 + \mu\beta_2\delta_1 + \mu\beta_2\delta_2 + \beta_2\delta_1\delta_2$$

$$\Leftrightarrow (\Lambda\beta_2\beta_3\rho_2 + \mu^2\beta_2\rho_2 + \mu\beta_2\rho_2\delta_1 + \mu\beta_2\rho_2\delta_2 + \beta_2\rho_2\delta_1\delta_2 + \mu^2\beta_1 + \mu^2\beta_3 + 2\mu\beta_1\delta_2 + \mu\beta_3\delta_2 + \mu\beta_3\rho_1 + \mu\beta_3\rho_2 + \beta_1\delta_2^2 +$$

$$\beta_3\rho_1\delta_2 + \beta_3\rho_2\delta_2)/(\Lambda\beta_2\beta_3 + \mu^2\beta_1\rho_1 + 2\mu\beta_1\rho_1\delta_2 + \beta_1\rho_1\delta_2^2 + \mu^2\beta_2 + \mu\beta_2\delta_1 + \mu\beta_2\delta_2 + \beta_2\delta_1\delta_2) < 1,$$

dan

$$\mu\beta_2\rho_2 + \beta_2\delta_2\rho_2 - \mu\beta_2 - \beta_2\delta_2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \mu\beta_2\rho_2 + \beta_2\delta_2\rho_2 < \mu\beta_2 + \beta_2\delta_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu\beta_2\rho_2+\beta_2\delta_2\rho_2}{\mu\beta_2+\beta_2\delta_2} < 1,$$

diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka λ_4 akan bernilai negatif jika syarat di atas dipenuhi, sehingga titik kritis endemik penyakit Covid-19 stabil.

4. $\lambda_5 = -\mu$, diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka λ_5 selalu bernilai negatif, sehingga titik kritis endemik Covid-19 stabil karena λ_5 terpenuhi.
5. $\lambda_6 = -\mu$, diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka λ_6 selalu bernilai negatif, sehingga titik kritis endemik Covid-19 stabil karena λ_6 terpenuhi.
6. $\lambda_7 = -\mu$, diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka λ_7 selalu bernilai negatif, sehingga titik kritis endemik Covid-19 stabil karena λ_7 terpenuhi.

BILANGAN REPRODUKSI DASAR

Bilangan reproduksi dasar (R_0) diperoleh menggunakan *next generation matrix* $K = -FV^{-1}$, dimana matriks F merupakan matriks Jacobi yang terdiri dari elemen-elemen non linear dan V merupakan matriks Jacobi yang terdiri dari elemen-elemen linear.

Diketahui

$$F_1 = -\beta_1 S I_r \rho_1 + \beta_1 S I_r - \beta_3 I_r I_c$$

$$F_2 = -\beta_2 S I_c \rho_2 + \beta_2 S I_c - \beta_4 I_r I_c$$

$$F_3 = \beta_3 I_r I_c + \beta_4 I_r I_c$$

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial I_r} & \frac{\partial F_1}{\partial I_c} & \frac{\partial F_1}{\partial I_{rc}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial I_r} & \frac{\partial F_2}{\partial I_c} & \frac{\partial F_2}{\partial I_{rc}} \\ \frac{\partial F_3}{\partial I_r} & \frac{\partial F_3}{\partial I_c} & \frac{\partial F_3}{\partial I_{rc}} \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -S\beta_1\rho_1 + S\beta_1 - I_c\beta_3 & -I_r\beta_3 & 0 \\ -I_c\beta_4 & -S\beta_2\rho_2 + S\beta_2 - I_r\beta_4 & 0 \\ I_c\beta_3 + I_c\beta_4 & I_r\beta_3 + I_r\beta_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, diketahui

$$V_1 = -\mu I_r - \delta_1 I_r$$

$$V_2 = -\mu I_c - \delta_2 I_c$$

$$V_3 = -\mu I_{rc} - \delta_3 I_{rc}$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial I_r} & \frac{\partial V_1}{\partial I_c} & \frac{\partial V_1}{\partial I_{rc}} \\ \frac{\partial V_2}{\partial I_r} & \frac{\partial V_2}{\partial I_c} & \frac{\partial V_2}{\partial I_{rc}} \\ \frac{\partial V_3}{\partial I_r} & \frac{\partial V_3}{\partial I_c} & \frac{\partial V_3}{\partial I_{rc}} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} -\mu - \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu - \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu - \delta_3 \end{pmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\mu + \delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\mu + \delta_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\mu - \delta_3 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$K = -FV^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{S\beta_1\rho_1 - S\beta_1 + I_c\beta_3}{\mu + \delta_1} & -\frac{I_r\beta_3}{\mu + \delta_2} & 0 \\ -\frac{I_c\beta_4}{\mu + \delta_1} & -\frac{S\beta_2\rho_2 - S\beta_2 + I_r\beta_4}{\mu + \delta_2} & 0 \\ -\frac{-I_c\beta_3 - I_c\beta_4}{\mu + \delta_1} & -\frac{-I_r\beta_3 - I_r\beta_4}{\mu + \delta_2} & 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, substitusi titik kritis bebas penyakit pada next generation matrix di atas. Diketahui

$$S = \frac{\Lambda}{\mu + \rho_1 + \rho_2}, I_c = 0, I_r = 0, I_{rc} = 0, R_c = 0, R_r = 0, R_{rc} = 0, \text{ diperoleh}$$

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\Lambda\beta_1\rho_1}{\mu + \rho_1 + \rho_2} - \frac{\Lambda\beta_1}{\mu + \rho_1 + \rho_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Lambda\beta_2\rho_2}{\mu + \rho_1 + \rho_2} - \frac{\Lambda\beta_2}{\mu + \rho_1 + \rho_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Maka nilai eigen dari K yaitu $\frac{(\mu + \delta_1)(\rho_1 + \rho_2 + \mu)}{\Lambda\beta_1 - \Lambda\beta_1\rho_1}$, $\frac{(\mu + \delta_2)(\rho_1 + \rho_2 + \mu)}{\Lambda\beta_2 - \Lambda\beta_2\rho_2}$, dan 0. Nilai eigen yang dominan merupakan bilangan reproduksi dasar, yaitu R_{0r} dari penyakit Rubella adalah $\frac{(\mu + \delta_1)(\rho_1 + \rho_2 + \mu)}{\Lambda\beta_1 - \Lambda\beta_1\rho_1}$ dan R_{0c} dari Covid-19 adalah $\frac{(\mu + \delta_2)(\rho_1 + \rho_2 + \mu)}{\Lambda\beta_2 - \Lambda\beta_2\rho_2}$. Ketika $R_{0r} < 1$ dan $R_{0c} < 1$, maka titik kritis bebas penyakit stabil sehingga penyakit Rubella dan Covid-19 akan menghilang dari populasi. Ketika $R_{0r} > 1$ dan $R_{0c} < 1$, maka titik kritis bebas penyakit menjadi tidak stabil yang artinya akan ditemukan orang yang terinfeksi Rubella pada populasi (Titik kritis endemik Rubella akan eksis). Ketika $R_{0r} < 1$ dan $R_{0c} > 1$, maka titik kritis bebas penyakit menjadi tidak stabil yang artinya akan ditemukan orang yang terinfeksi Covid-19 pada populasi (Titik kritis endemik Covid-19 akan eksis).

Simulasi Numerik

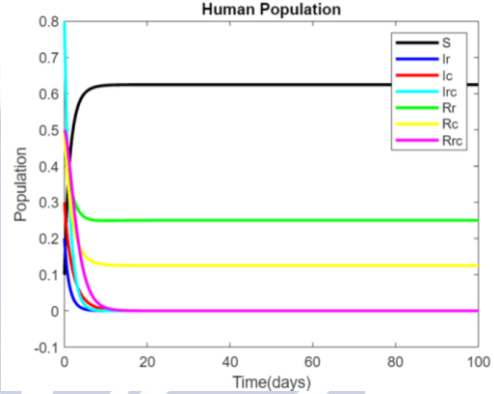
Simulasi numerik dari model epidemik koinfeksi penyakit Rubella dan Covid-19 didapatkan dengan menggunakan ODE45 dan program MATLAB Online R2020b. Nilai parameter yang digunakan adalah sebagai berikut.

Tabel 3 Nilai dan Sumber Parameter

Parameter	Nilai	Sumber
Λ	0.5	Asumsi
β_1	0.4	Baleanu dkk, 2020
β_2	0.3	Libotte dkk, 2020

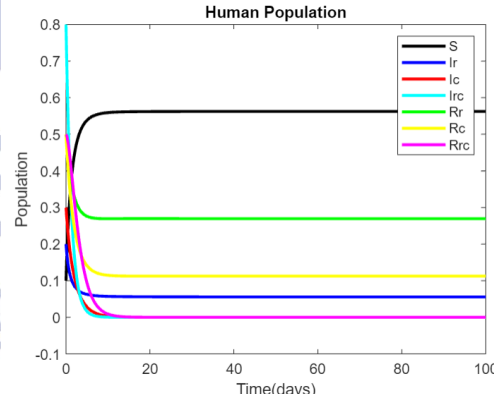
β_3	0.2	Asumsi
β_4	0.1	Asumsi
ρ_1	0.2	Asumsi
ρ_2	0.1	Asumsi
δ_1	0.4	Baleanu dkk, 2020
δ_2	0.08	Libotte dkk, 2020
δ_3	0.3	Asumsi
μ	0.5	Asumsi

Dengan nilai awal $S(0) = 0.1; I_r(0) = 0.2; I_c(0) = 0.3; I_{rc}(0) = 0.8; R_c(0) = 0.5; R_r(0) = 0.5; R_{rc}(0) = 0.5$. Rentang waktu pada simulasi adalah 100 hari.



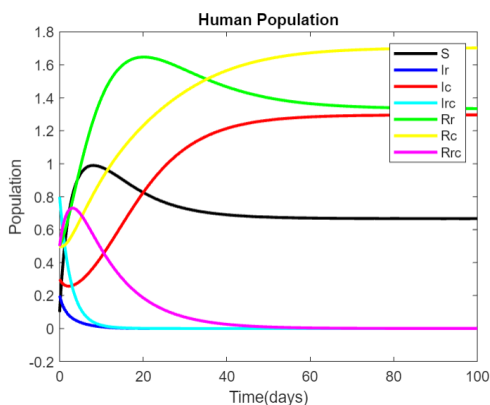
Gambar 3 Grafik Simulasi Model Bebas Penyakit

Gambar 3 merupakan grafik simulasi yang menunjukkan bahwa pada hari ke-10, populasi manusia yang terinfeksi penyakit Rubella dan Covid-19 semakin menurun menuju angka 0 sehingga penyakit akan hilang. Maka simulasi tersebut menggambarkan titik kritis bebas penyakit.



Gambar 4 Grafik Simulasi Model Penyakit Rubella

Gambar 4 merupakan grafik simulasi dengan $\beta_1 = 2$ yang menunjukkan bahwa pada hari ke-20, populasi manusia yang terinfeksi Rubella tetap bertahan sedangkan populasi manusia yang terinfeksi Covid-19 semakin berkurang menuju angka 0. Maka simulasi tersebut menggambarkan titik kritis endemik Rubella.



Gambar 5 Grafik Simulasi Model Covid-19

Gambar 5 merupakan grafik simulasi dengan $\mu = 0.1$ yang menunjukkan bahwa pada hari ke-40, populasi manusia yang terinfeksi Covid-19 meningkat dan bertahan sedangkan populasi manusia yang terinfeksi penyakit Rubella semakin berkurang menuju angka 0. Maka simulasi tersebut menggambarkan titik kritis endemik Covid-19.

Hasil penelitian ini lebih baik dari segi koinfeksi penyakit jika dibandingkan dengan penelitian yang dilakukan oleh (Artiono dkk, 2020). Pada artikel (Artiono dkk, 2020) hanya terdapat model 1 penyakit yaitu Covid-19, namun pada penelitian ini terdapat model koinfeksi penyakit Rubella dan Covid-19 dimana kondisi ini lebih memungkinkan untuk melihat dinamik dari model Covid-19 ketika terjadi secara bersamaan dengan penyakit lainnya, seperti Rubella.

PENUTUP

SIMPULAN

Penelitian ini telah menghasilkan model koinfeksi penyakit Rubella dan Covid-19. Kedua penyakit ini memiliki karakteristik yang sama, jika dilihat dari cara penularannya yang melalui *droplets* dan juga gejalanya berupa demam tinggi. Terdapat 4 titik kritis dari model yang dibangun, yaitu: titik kritis bebas penyakit, titik kritis endemik penyakit Rubella, titik kritis endemik Covid-19, dan titik kritis koinfeksi penyakit Rubella dan Covid-19. Hasil analisis kestabilan dari semua titik kritis adalah stabil jika syarat-syarat kestabilan dipenuhi dan dengan asumsi bahwa semua parameter yang digunakan bernilai positif.

Bilangan reproduksi dasar diperoleh dari *next generation matrix*, yaitu $R_{0r} = \frac{(\mu + \delta_1)(\rho_1 + \rho_2 + \mu)}{\Lambda\beta_1 - \Lambda\beta_1\rho_1}$ yang merupakan ambang batas penyakit Rubella dan $R_{0c} = \frac{(\mu + \delta_2)(\rho_1 + \rho_2 + \mu)}{\Lambda\beta_2 - \Lambda\beta_2\rho_2}$ yang merupakan ambang batas untuk penyakit Covid-19. Pada saat $R_{0r} < 1$ dan

$R_{0c} < 1$, maka titik kritis bebas penyakit stabil sehingga penyakit Rubella dan Covid-19 akan menghilang dari populasi. Pada saat $R_{0r} > 1$ dan $R_{0c} < 1$, maka titik kritis bebas penyakit menjadi tidak stabil yang artinya akan ditemukan orang yang terinfeksi Rubella pada populasi (Titik kritis endemik Rubella akan eksis). Ketika $R_{0r} < 1$ dan $R_{0c} > 1$, maka titik kritis bebas penyakit menjadi tidak stabil yang artinya akan ditemukan orang yang terinfeksi Covid-19 pada populasi (Titik kritis endemik Covid-19 akan eksis).

Hasil ini juga didukung dari hasil simulasi numerik menggunakan *software* Matlab yang menunjukkan eksistensi 3 titik kritis ketika syarat-syaratnya terpenuhi.

SARAN

Bagi peneliti selanjutnya, disarankan untuk meneliti koinfeksi penyakit Rubella dan Covid-19 dengan memperhatikan kondisi ibu hamil, mengingat penyakit Rubella sangat berbahaya ketika menginfeksi ibu hamil. Ibu hamil akan melahirkan bayi dengan CRS (*Congenital Rubella Syndrome*) pada janin yang ada dalam kandungan sehingga bisa berdampak pada bayi yang prematur, cacat, ataupun kematian.

DAFTAR PUSTAKA

- A'maludin, H., Faruk, A., & Cahyono, E. S. (2016). Analisis Kestabilan Model Epidemik SIR untuk Penyakit Tuberkulosis. *Prosiding SEMIRATA Bidang MIPA*, 207-213.
- Abdillah, L. A. (2020). Stigma Terhadap Orang Positif COVID-19.
- Artiono, R., Prawoto, B. P., Hidayat, D., Yuniarti, D. N., & Astuti, Y. P. (2020). The dynamics of COVID-19: the effect of large-scale social restrictions. *Commun. Math. Biol. Neurosci.*, 2020, Article-ID.
- Baleanu, D., Mohammadi, H., & Rezapour, S. (2020). A mathematical theoretical study of a particular system of Caputo-Fabrizio fractional differential equations for the Rubella disease model. *Advances in Difference Equations*, 2020(1), 1-19.
- Febriani, W., Nurcahyo, G. W., & Sumijan, S. (2019). Diagnosa Penyakit Rubella Menggunakan Metode Fuzzy Tsukamoto. *Jurnal Sistim Informasi dan Teknologi*, 1(3), 11-16.

- Haifa, N. S., & MIA, X. (2020). Pendidikan Kesehatan Tentang Penyakit Menular. OSF Preprints. May, 9.
- Herman Saputra, D. (2019). Analisis Kejadian Rubella di PUSKESMAS Sikucur Kabupaten Padang Pariaman Tahun 2018 (Doctoral dissertation, Universitas Andalas).
- Hidayani, W. R. (2020). Faktor Faktor Risiko Yang Berhubungan Dengan COVID 19: Literature Review. JUKMAS: Jurnal Untuk Masyarakat Sehat, 4(2), 120-134.
- Kadek, K., & Darmadi, S. (2018). Gejala Rubela Bawaan (Kongenital) Berdasarkan Pemeriksaan Serologis Dan Rna Virus. Indonesian Journal of Clinical Pathology and Medical Laboratory, 13(2), 63-71.
- Laksana, A. (2011). Model Penyebaran Penyakit Melalui Hubungan Seksual (PHS): Gonorrhea dan HIV/AIDS. UGM, Yogyakarta.
- Libotte, G. B., Lobato, F. S., Platt, G. M., & Neto, A. J. S. (2020). Determination of an optimal control strategy for vaccine administration in COVID-19 pandemic treatment. Computer methods and programs in biomedicine, 196, 105664.
- Novikasari, L., Zainaro, M. A., Wardiyah, A., & Trismiyana, E. (2019). Penyuluhan kesehatan tentang pentingnya imunisasi mr (measles rubela) di puskesmas simpur bandar lampung. Jurnal kreativitas pengabdian kepada masyarakat (PKM), 2(2), 133-138.
- Prabandari, G. M., Syamsulhuda, B. M., & Kusumawati, A. (2018). Beberapa Faktor yang Berhubungan dengan Penerimaan Ibu Terhadap Imunisasi Measles Rubella Pada Anak SD di Desa Gumpang, Kecamatan Kartasura, Kabupaten Sukoharjo. Jurnal Kesehatan Masyarakat (e-Journal), 6(4), 573-581.
- Prastyowati, A. (2020). Mengenal Karakteristik Virus SARS-CoV-2 Penyebab Penyakit COVID-19 Sebagai Dasar Upaya Untuk Pengembangan Obat Antivirus Dan Vaksin. *Biotrends*, 11(1), 1-10.
- Resmawan, R., & Nurwan, N. (2017). Konstruksi Bilangan Reproduksi Dasar pada Model Epidemik SEIRS-SEI Penyebaran Malaria dengan Vaksinasi dan Pengobatan. Jurnal Matematika Integratif, 13(2), 105-114.
- RI, B. K. D., Lt, G. N. I., & Subroto, J. J. G. (2020). Kesiapsiagaan Indonesia Menghadapi Potensi Penyebaran Corona Virus Disease.
- Soegijanto, S., & Meita, S. (2016). Infeksi Rubella. Kumpulan Makalah Penyakit Tropis dan Infeksi di Indonesia Jilid 6, 6, 9.
- Sulaiman, H. (2017). Analisis Stabilitas Sistem Dinamik untuk Model Matematika Epidemiologi Tipe-SIR (Susceptible, Infection, Recover). Euclid, 4(1).
- Worldometer. Worldmeter COVID-19 Coronavirus Pandemic. https://www.worldometers.info/coronavirus/?utm_campaign=homeAdvegas1, diakses 2 Desember 2020.
- Yusriani, Y. (2020, September). Pengetahuan dan Tingkat Kecemasan Mempengaruhi Perilaku Panic Buying Selama Pandemic Covid-19. In *Prosiding Seminar Nasional Sinergitas Multidisiplin Ilmu Pengetahuan dan Teknologi* (Vol. 3, pp. SMIPT019-SMIPT019).