MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika ***Volume 09 No 03***
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115 ***Tahun 2021***

PEMODELAN OPSI SAHAM KARYAWAN MENGGUNAKAN PENDEKATAN *TOP-DOWN*

Megawati
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : megawati.18013@mhs.unesa.ac.id

Rudianto Artiono
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : rudiantoartiono@unesa.ac.id

Abstrak

Opsi saham merupakan suatu perjanjian yang memungkinkan pemiliknya untuk melakukan *call* (menjual) atau *put* (membeli) suatu saham dengan harga yang telah ditentukan pada waktu tertentu. Salah satu jenis opsi saham adalah opsi saham karyawan (OSK) atau yang lebih dikenal dengan *Employee Stock Options* (ESO). Pemegang OSK dapat melakukan *exercise* opsi lebih awal setelah melewati *vesting period* dan secara bertahap melakukan *exercise* terhadap opsi yang tersisa sebelum *maturity time*. Penelitian ini bertujuan untuk memodelkan harga opsi saham karyawan melalui suatu analisis fundamental yakni analisis yang mempelajari hal-hal yang berhubungan dengan kondisi keuangan atau perusahaan dan umumnya digunakan untuk menentukan saham yang ingin dijual atau dibeli dengan menggunakan pendekatan top-down. Pendekatan ini diperlukan oleh perusahaan yang memiliki saling ketergantungan antar unit operasi dalam rangka meningkatkan koordinasi antara manager dan karyawan. Perspektif perusahaan untuk menentukan harga OSK umumnya melibatkan banyak opsi dengan jangka waktu lama. Untuk menghitung harga OSK, disajikan dua metode numerik yaitu transformasi *fast fourier* dilanjutkan dengan metode beda hingga untuk memecahkan sistem persamaan diferensial parsial terkait dengan opsi *vested* dan *unvested*. Metode numerik yang diusulkan tidak hanya berlaku untuk pengeluaran harga OSK, tetapi juga berguna untuk memahami efek gabungan dari intensitas *exercise* dan risiko pemutusan hubungan kerja pada penentuan harga OSK.

Kata Kunci: *Employee Stock Options*, Pendekatan *Top-down, Fast Fourier Transformation,* Metode Beda Hingga.

Abstract

A stock option is an agreement that allows the owner to call (sell) or put (buy) a stock at a predetermined price at a certain time. One type of stock options is employee stock options (OSK) or better known as Employee Stock Options (ESO). OSK holders can exercise options earlier after the vesting period and gradually exercise the remaining options before maturity. This study aims to model the price of employee stock options through a fundamental analysis, namely an analysis that studies matters relating to the financial condition of the company and is generally used to determine which shares to sell or buy using a top-down approach. This approach is needed by companies that have interdependence between operating units in order to improve coordination between managers and employees. The company's perspective for pricing OSK generally involves many long-term options. To calculate the OSK price, two numerical methods are presented, namely the fast Fourier transformation followed by the finite difference method to solve the system of partial differential equations related to vested and unvested options. The proposed numerical method is not only applicable to OSK pricing, but is also useful for understanding the combined effect of exercise intensity and risk of termination of employment on OSK pricing.

***Keywords**: Employee Stock Options, Top-down Approach, Fast Fourier Transformation, Finite Difference Method.*

PENDAHULUAN

Opsi Saham merupakan suatu perjanjian yang memungkinkan pemiliknya untuk melakukan *call* (menjual) atau *put* (membeli) suatu saham dengan harga yang telah ditentukan pada waktu tertentu (Nurmawaddah, 2018; Irawan, Rosha, & Permana, 2019; Nurhani, 2020; Redaksi, 2020). Salah satu jenis opsi saham adalah opsi saham karyawan atau lebih dikenal dengan *Employee Stock Options* yakni suatu opsi yang tidak dapat dijual maupun ditransfer yang dikeluarkan oleh perusahaan untuk memberi insentif dan penghargaan kepada karyawan. Dalam hal ini, karyawan berhak atas suatu opsi saham namun tidak berkewajiban untuk membelinya (Fitri, 2020; Gusnela & Ahmad, 2020).

OSK memiliki waktu tunggu yang disebut *vesting period*, dimana pada masa ini karyawan pemegang opsi tidak bisa melaksanakan opsinya sebelum periode ini berakhir (Vieki, 2019; Suherman & Fitri, 2020). Pemegang OSK melakukan *exercise* opsi lebih awal setelah *vesting period* dan secara bertahap melakukan *exercise* terhadap opsi yang tersisa sebelum *maturity time*. Dalam hal ini akan dilakukan suatu analisis fundamental yakni pendekatan top-down. Pendekatan top-down diperlukan untuk perusahaan yang memiliki saling ketergantungan yang signifikan antar unit operasi untuk meningkatkan koordinasi antara manager dan karyawan (Mustikharima, 2020). Analisis saham dengan pendekatan top-down adalah suatu usaha untuk mengkaji atau mempelajari hal-hal yang berkaitan dengan keuangan atau perusahan dan dilakukan melalui analisis ekonomi serta analisis laporan keuangan perusahaan secara fundamental (Sukasih, 2017; Hadriyan, 2020; Chrysanthus, 2021). Analisis fundamental adalah suatu analisis yang mempelajari hal-hal yang berhubungan dengan kondisi keuangan atau perusahaan yang umumnya digunakan untuk menentukan saham yang ingin dijual atau dibeli. Analisis ini bertujuan untuk mengetahui sifat-sifat dasar dan karakteristik operasional dari perusahaan publik dengan menitik beratkan rasio finansial dan kejadian-kejadian yang secara langsung maupun tidak langsung pada kinerja keuangan perusahaan (Sukasih, 2017; Nurwahida, 2018).

Perspektif perusahaan untuk menentukan harga OSK biasanya melibatkan banyak opsi dengan jangka waktu lama. Ada juga *vesting period*, dimana pelaksanaan opsi dilarang dilakukan dan pemutusan hubungan kerja menyebabkan hilangnya opsi. Salah satu komponen kerangka penilaian yang dilakukan adalah proses lompatan eksogen yang memodelkan *exercise* acak dari waktu ke waktu, juga menyertakan waktu penghentian pekerjaan acak dan mengizinkan tingkat pemutusan hubungan kerja menjadi berbeda selama dan setelah *vesting period*. Hal ini dikarenakan pembayaran OSK sangat bergantung pada kapan karyawan meninggalkan perusahaan. Sehingga dapat dibentuk kerangka kerja misalnya intensitas *exercise* karyawan dapat konstan atau stokastik dan jumlah opsi yang dilakukan pada setiap waktu dapat ditentukan menjadi deterministik atau acak.

Untuk menghitung harga OSK, disajikan dua metode numerik yaitu transformasi *fast fourier* dilanjutkan dengan metode beda hingga untuk memecahkan sistem persamaan diferensial parsial terkait dengan opsi *vested* dan *unvested*. Sedangkan, untuk pemulihan harga opsi saham karyawan digunakan *inverse fast fourier transformation*. Penerapan transformasi fourier diantaranya menyederhanakan persamaan diferensial parsial (PDP) orde dua menjadi persamaan diferensial biasa (PDB) dalam kasus intensitas konstan dan persamaan diferensial parsial dalam kasus intensitas stokastik. Hasil dari dua metode yang disajikan, diilustrasikan dan dibandingkan melalui uji deterministik dan stokastik (Leung, Top-Down Valuation Approach, 2021). Berdasarkan penelitian terdahulu yang dilakukan oleh (Leung & Zhou, 2020) disebutkan bahwa dua metode numerik diatas lebih baik dalam menentukan penyelesaian model PDP *vested* dan *unvested* suatu opsi dari pada metode lainnya, karena dengan menggunakan dua metode numerik diatas dapat dilakukan penghitungan harga dan pemeriksaan dampak resiko pemutusan kerja, intensitas *exercise*, *vesting period* dan fitur lainnya.

Penelitian ini bertujuan untuk memodelkan *exercise* OSK dengan kuantitas acak selama masa pakai opsi sebagai peristiwa eksogen dari perusahaan yang dapat menyebabkan hilangnya asumsi bahwa perusahaan memiliki akses preferensi risiko karyawan dan strategi *exercise*, sebab kenyataannya perusahaan tidak tahu kapan OSK akan dilaksanakan. Frekuensi dan waktu *exercise* OSK suatu perusahaan dapat bergantung pada saham perusahaan dan fitur lainnya.

KAJIAN TEORI

1. *Fast Fourier Transform*

Fast fourier transform (FFT) merupakan metode yang digunakan untuk menghitung harga OSK berupa pentransformasian persamaan diferensial orde dua menjadi persamaan diferensial biasa dalam kasus intensitas konstan dan persamaan diferensial parsial dalam kasus intensitas stokastik. Hasil dari dua metode yang disajikan, diilustrasikan dan dibandingkan melalui uji deterministik dan stokastik (Leung, Top-Down Valuation Approach, 2021). Misalkan $f^{(m)}(t,x)$ adalah fungsi real yang kontinu pada interval $(-\infty,\infty)$ yang memenuhi $\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m)}(t,x)|dx < 0$, maka transformasi fourier dari $f^{(m)}(t,x)$ didefinisikan oleh:

$$\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(t,x)e^{-i\omega x}dx,$$

dengan $m = 1, .., M$ dengan frekuensi $\omega \in \mathbb{C}$ (Fadugba & Nwozo, 2016; Leung, Top-Down Valuation Approach, 2021; Chairunnisa, Hoyyi, & Yasin, 2021).

Pemulihan harga OSK pada penelitian ini menggunakan *inverse fast fourier transformation*.

$$f^{(m)}(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_R x - \omega_I x} \mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](t, \omega_R + i\omega_I\,) d\omega_R,$$

untuk setiap $m = 1, 2, \dots, M, (t,x) \in (t_v, T) \times \mathbb{R}$ (Leung, Top-Down Valuation Approach, 2021).

2. *Finite Difference Method* (FDM)

Finite difference method (FDM) atau yang lebih dikenal dengan Metode Beda Hingga adalah suatu metode yang digunakan untuk menghitung harga OSK. Secara khusus yang diterapkan adalah metode Crank–Nicolson pada grid yang seragam. Metode Crank–Nicolson merupakan salah satu metode beda hingga dengan nilai *error* paling kecil yang digunakan untuk mencari solusi dari suatu persamaan diferensial, dimana metode ini mempunyai kestabilan tanpa syarat (Nurfitroh, 2013; Miranti & Rusli Hidayat, 2014). Metode Crank–Nicolson diterapkan untuk menyelesaikan PDP yang dipenuhi oleh harga OSK *vested* $C^{(m)}$ dan harga OSK *unvested* $\tilde{C}^{(m)}$ untuk $m = 1, \dots, M$.

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini diawali dengan memaparkan struktur pembayaran, kemudian dilanjutkan dengan memperkenalkan model stokastik dan juga penyajian OSK *vested* dan *unvested* ke dalam bentuk PDP. Pembayaran OSK setiap saat τ adalah $(S\tau - K)^{+}1_{\{t_v \le \tau \le T\}}$, dimana peneliti menyatakan $[\,0, t_v)$ sebagai *vesting period*, Sτ adalah harga saham perusahaan pada waktu τ dan K adalah *strike price*.

Pemutusan hubungan kerja karyawan memainkan peran penting dalam waktu *exercise* dan hasil yang diperoleh dari OSK. Peneliti memodelkan waktu penghentian pekerjaan selama *vesting period* oleh variabel acak eksponensial ζ ~ (exp α) dengan $\alpha \ge 0$. Ketika OSK menjadi *vested*, peneliti memodelkan waktu penghentian pekerjaan karyawan oleh variabel acak eksponensial lainξ ~ (exp β) dengan $\beta \ge 0$, dengan asumsi bahwa ζ dan ξ saling bebas. Dalam model ini peneliti menggunakan dua waktu eksponensial berbeda yang memungkinkan untuk menghitung berbagai tingkat risiko pemutusan hubungan kerja selama dan setelah *vesting period*.

Karyawan cenderung menggunakan opsi secara bertahap dari waktu ke waktu, daripada menggunakan semua opsi sekaligus. Hal Ini memotivasi peneliti untuk memodelkan *sequential random timing of exercises*. Dalam model ini, peneliti mempertimbangkan pemberian unit M dari OSK awal identik yang dapat dieksekusi dengan *strike price* K yang sama dan tanggal kedaluwarsa T. Untuk OSK *vested*, peneliti mendefinisikan *random exercise processes* L_t, untuk $t_v \le t \le T$, menjadi proses lompatan positif yang mewakili jumlah *exercise* OSK yang dilakukan dari waktu ke waktu. Dengan demikian, L_t adalah proses integer yang mengambil harga pada $[0, M]$. Waktu lompatan yang sesuai dilambangkan dengan urutan $(\tau_1, \tau_2, \dots)$ dan frekuensi *exercise* diatur oleh proses intensitas lompatan $(\lambda_t)_{t_v \le t \le T}$. Ukuran untuk lompatan ke-i dari L mewakili jumlah OSK yang dilakukan dan dijelaskan oleh variabel acak diskrit i. *Exercise process* dimulai pada waktu t_v dengan $L_{t_v} = 0$. Menurut definisi, peneliti memiliki $L_T \le M$. Ini berarti bahwa ukuran lompatan acak setiap saat t harus mengambil harga dalam $[1, \mathrm{M} - L_{t-}]$. Selanjutnya, setelah L_t mencapai batas atas M, intensitas lompatan t harus diatur menjadi nol setelahnya. Mengingat bahwa karyawan masih memegang m opsi, fungsi kepadatan peluang dari ukuran lompatan acak adalah

$$p_{m,z} \triangleq \mathbb{P}\{\delta_i = z \mid L_{\tau i^-} = M - m\}.$$

Jumlah opsi yang diharapkan untuk dieksekusi pada setiap waktu *exercise* tergantung pada jumlah OSK yang dimiliki, dimana jumlah opsinya diberikan oleh

$$\bar{p}_m \triangleq \sum_{z=1}^{m} z p_{m,z},$$

Karyawan dapat menjalankan satu atau beberapa unit OSK dari waktu ke waktu. Pada tanggal kedaluwarsa atau pemutusan hubungan kerja, setiap opsi yang tidak dijalankan harus dilakukan *exercise*. Oleh karena itu, *discounted payoff* dari OSK selama $[0, \mathrm{T}\,]$ adalah jumlah dua suku, yang diberikan oleh

$$\left(\int_{t_v}^{T\wedge\xi} e^{-rt}(S_t - K)^{+}dL_t + e^{-r(T\wedge\xi)}(M - L_{T\wedge\xi}\,)(S_{T\wedge\xi} - K)^{+}\right)1_{\{\zeta\, \ge t_v\}},$$

Indikator $1_{\{\zeta\, \ge t_v\}}$ berarti pembayaran OSK adalah nol jika karyawan meninggalkan perusahaan selama *vesting period*.

Artikel ini menyatakan terdapat dua macam *exercise* yakni *unit exercises* dan *block exercises.* Dalam *block exercises* diilustrasikan distribusi rata-rata tertimbang dari *time exercise* $\bar{\tau}$ ditentukan oleh

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \delta_i * \tau_i}{M} \quad (1)$$

dimana δ_i adalah jumlah OSK yang dilakukan pada *time exercise* τ_i, dan N adalah jumlah *time exercise* yang berbeda sebelum atau pada waktu T.

Peneliti memodelkan proses harga saham perusahaan $(S_t)_{t\geq 0}$ untuk bentuk PDP *vested* dan *unvested* penilaian OSK oleh *geometric Brownian motion*

$$dS_t = (r - q)S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t,$$

(Leung, Top-Down Valuation Approach, 2021)

di mana konstanta positif r, q dan σ masing-masing adalah tingkat bunga, *dividen rate*, dan parameter volatilitas, dan W adalah *standard brownian motion* di bawah $\mathbb{Q}$, independen dari waktu penghentian pekerjaan yang didistribusikan secara eksponensial oleh ζ dan ξ. Peneliti membuat asumsi untuk intensitas *exercise* karyawan bahwa itu adalah fungsi deterministik waktu, dilambangkan dengan $\lambda(t)$.

Pada saat $t \in [t_v, T]$, OSK telah melewati *vesting period* sehingga dapat dinyatakan sebagai OSK *vested*. Fungsi harga OSK *vested* $C^{(m)}(t,s)$ untuk m = 1, 2, … , M, di mana m adalah jumlah opsi yang saat ini dimiliki, diberikan oleh ekspektasi *free-risk* dari diskon pembayaran OSK masa depan asalkan karyawan tersebut tidak meninggalkan perusahaan.

$$C^{(m)}(t,s) = \mathbb{E}\left\{\int_{t_v}^{T\wedge\xi} e^{-r(u-t)}(S_u - K)^+ dL_u + e^{-r(T\wedge\xi - t)}(M - L_{T\wedge\xi})(S_{T\wedge\xi} - K)^+ \mid S_t = s, L_t = M - m\right\}$$

$$C^{(m)}(t,s) = \mathbb{E}\left\{\int_{t_v}^{T} e^{-(r+\beta)(u-t)}(S_u - K)^+ dL_u + e^{-(r+\beta)(T-t)}(M - L_T)(S_T - K)^+ + \int_t^T \beta e^{-(r+\beta)(v-t)}(M - L_v)(S_u - K)^+ dv \mid S_t = s, L_t = M - m\right\}$$

Untuk $m = 1,2\,3, \dots. M$ dan $(t,s) \in [t_v, T] \times \mathbb{R}_+$.

Selanjutnya, peneliti mendefinisikan generator tak hingga yang terkait dengan proses harga saham S dengan

$$\mathcal{L} = (r - q)s\partial_s . + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\partial_{ss} .$$

Peneliti menentukan harga OSK *vested* dengan memecahkan sistem persamaan diferensial parsial berikut:

$$-(r + \lambda(t) + \beta)C^{(m)} + C_t^{(m)} + \mathcal{L}C^{(m)} + \lambda(t)\sum_{z=1}^{m-1} p_{m,z} C^{(m-z)} + (\lambda(t)\bar{p}_m + m\beta)(s - K)^+ = 0. \quad (2)$$

Untuk $(t,s) \in [t_v, T] \times \mathbb{R}_+$ dan $m = 1,2\,3, \dots. M$ dimana $\bar{p}_m$ adalah jumlah opsi *exercise* yang diharapkan dan $p_{m,z}$ adalah probabilitas menjalankan opsi z dengan m opsi tersisa. Kondisi terminalnya adalah $C^{(m)}(T,s) = m\,(s - K)^+$ untuk $s \in \mathbb{R}_+$.

Selama *vesting period* $[0, t_v]$, OSK disebut *unvested* dan dapat hilang kepemilikannya jika karyawan tersebut meninggalkan perusahaan (Leung, Top-Down Valuation Approach, 2021). Peneliti menunjukkan harga m unit OSK yang belum digunakan dengan $\tilde{C}^{(m)}(t,s)$. Jika pemegang OSK bekerja pada perusahaan setiap saat $t \in [0, t_v)$, harga OSK yang *unvested* adalah nol. Jika tidak, mengingat $\zeta > t$, harga OSK *unvested pre departure* adalah

$$\tilde{C}^{(m)}(t,s) = \mathbb{E}\{e^{-r(t_v - t)}C^{(m)}(t_v, S_{t_v})1_{\{\zeta > t_v\}} | S_t = s\}$$

$$\tilde{C}^{(m)}(t,s) = \mathbb{E}\{e^{-(r+\alpha)(t_v - t)}C^{(m)}(t_v, S_{t_v}) | S_t = s\}.$$

Untuk menentukan harga OSK *unvested*, peneliti memecahkan masalah PDP

$$-(r + \alpha)\tilde{C}^{(m)} + \tilde{C}_t^{(m)} + \mathcal{L}\tilde{C}^{(m)} = 0,$$

Untuk $(t,s) \in [0, t_v) \times \mathbb{R}_+$

$$\tilde{C}^{(m)}(t_v, s) = C^{(m)}(t_v, s),$$

Untuk $s \in \mathbb{R}^+$ (3)

Dimana $C^{(m)}(t_v, s)$, adalah harga OSK *vested* yang dievaluasi pada waktu t_v.

Dalam memecahkan masalah PDP terkait dengan opsi *vested* dan *unvested* di atas, peneliti menggunakan dua metode numerik yakni *Fast Fourier Transform (FFT)* yang dilanjutkan dengan metode beda hingga. Penerapan transformasi fourier diantaranya menyederhanakan persamaan diferensial parsial orde dua menjadi persamaan diferensial biasa dalam konstanta kasus intensitas dan persamaan diferensial parsial dalam kasus intensitas stokastik. Hasil dari dua metode yang disajikan, diilustrasikan dan dibandingkan melalui uji deterministik dan stokastik. Transformasi Fourier dari $f^{(m)}(t,x)$ didefinisikan oleh

$$\mathcal{F}[f^{(m)}](t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(t,x)e^{i\omega x}dx,$$

(Chairunnisa, Hoyyi, & Yasin, 2021).

dengan $m = 1, \dots, M$ dengan frekuensi $\omega \in \mathbb{C}$. Sebagai perbandingan, peneliti juga menghitung harga OSK menggunakan metode beda hingga. Secara khusus, peneliti menerapkan metode Crank–Nicolson pada grid yang seragam.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Transformasi *Fast Fourier*

Pertama peneliti mempertimbangkan OSK *vested* $(t \in [t_v, T])$ asumsikan x sedemikian hingga $s = Ke^x$, dan mendefinisikan fungsi:

$$f^{(m)}(t,x) = C^{(m)}(t, Ke^x), (t,x) \in [t_v, T] \times \mathbb{R},$$

dengan $C^{(m)}(t, Ke^x)$ merupakan harga OSK *vested* yang bergantung pada waktu t dan harga saham $s = Ke^x$, untuk setiap $m = 1, 2, 3, \dots, M$. PDP untuk $f^{(m)}(t,x)$ diberikan oleh

$$\begin{aligned}-(r - \lambda(t) + \beta)f^{(m)} + f_t^{(m)} + \tilde{\mathcal{L}} f^{(m)} \\ + \lambda(t)\sum_{z=1}^{m-1} p_{m,z} f^{(m-z)} \\ + (\lambda(t)\bar{p}_m + m\beta)(Ke^x - K)^+ \\ = 0, \qquad (4)\end{aligned}$$

dengan $f^{(m)}$ merupakan fungsi real dari *m* opsi dan *z* adalah jumlah opsi yang dijalankan. $\tilde{\mathcal{L}}.$ mendefinisikan generator tak hingga yang terkait dengan proses harga OSK *vested* yang diasumsikan sebagai x, dimana

$$\tilde{\mathcal{L}}. = \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\partial_x + \frac{\sigma^2}{2}\partial_{xx}. \qquad (5)$$

Kondisi terminalnya adalah $f^{(m)}(T,x) = m\,(Ke^x - K)^+$ untuk $x \in \mathbb{R}$.

Transformasi fourier dari $f^{(m)}(t,x)$ didefinisikan oleh:

$$\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(t,x)e^{i\omega x}dx,$$

dengan $m = 1, \dots, M$ dengan frekuensi $\omega \in \mathbb{C}$. Selanjutnya, peneliti menerapkan transformasi fourier untuk PDP (4) dan mendapatkan PDB untuk $\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](t,\omega)$ untuk setiap $m = 1, \dots, M$ berikut ini:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](t,\omega) = h(t,\omega)\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](t,\omega) + \psi^{(m)}(t,\omega),$$

Dimana

$$h(t,\omega) = r + \lambda(t) + \beta - i\omega\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \omega^2\frac{\sigma^2}{2},$$

$$\begin{aligned}\psi^{(m)}(t,\omega) = -\lambda(t)\sum_{z=1}^{m-1} p_{m,z} f^{(m-z)} \\ + (\lambda(t)\bar{p}_m + m\beta)\,\varphi(\omega),\end{aligned}$$

$$\varphi(\omega) = \mathcal{F}\,[(Ke^x - K)^+](\omega), \qquad (6)$$

dengan kondisi terminal $\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](t,\omega) = m\,\varphi(\omega)$.

Selanjutnya, peneliti menentukan penyelesaian dari PDB sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](t,\omega) \\ = me^{-\int_t^T h(s,\omega)ds}\,\varphi(\omega) \\ - \int_t^T e^{-\int_t^u h(s,\omega)ds}\,\psi^{(m)}(u,\omega)du. \qquad (7)\end{aligned}$$

Secara khusus jika $m = 1$, peneliti mempunyai

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f^{(1)}\right](t,\omega) = e^{-\int_t^T h(s,\omega)ds}\,\varphi(\omega) \\ + \int_t^T e^{-\int_t^u h(s,\omega)ds}\,(\lambda(t) \\ + \beta)\varphi(\omega)du. \qquad (8)\end{aligned}$$

Fungsi pembayaran OSK $(Ke^x - K)^+$ tidak dapat diintegralkan terhadap sumbu real karena $\varphi(\omega)$ mengandung singularitas terhadap $\mathbb{R}$. Untuk mengatasinya, peneliti memisalkan $\omega = \omega_R + i\omega_I$ dengan ω_R menyatakan bagian real dan ω_I bagian imajiner dari ω. Oleh karena itu, transformasi Fourier pada (6) dapat ditulis ulang sebagai

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_R x + \omega_I x}(Ke^x - K)^+ dx,$$

yang terdefinisi dengan baik pada ruang $(\omega_R, \omega_I) \in \mathbb{R} \times (-\infty, -1)$. Selanjutnya peneliti menerapkan ini pada persamaan (8) dan menyimpulkan bahwa $\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](t,\omega)$ dalam persamaan (7) juga terdefinisi dengan baik untuk $(t, \omega_R, \omega_I) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times (-\infty, -1)$. Selanjutnya, dengan memperbaiki $\omega_I < -1$, fungsi harga OSK dapat diperoleh melalui invers transformasi fourier:

$$\begin{aligned}f^{(m)}(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_R x - \omega_I x}\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](t, \omega_R \\ + i\omega_I)d\omega_R,\end{aligned}$$

untuk setiap $m = 1, 2, \dots, M, (t,x) \in (t_v, T) \times \mathbb{R}$.

Jika λ adalah konstan, maka transformasi fourier pada (7) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](t,\omega) = \sum_{k=0}^{m-1} F_k^{(m)}(\omega)(T-t)^k e^{-(T-t)h(\omega)} \\ + F^{(m)}(\omega),\end{aligned}$$

Dimana,

$$\begin{aligned}F^{(m)}(\omega) = \frac{1}{h(\omega)}\Bigg(\lambda\sum_{z=1}^{m-1} p_{m,z}F^{(m-z)}(\omega) \\ + (\lambda\bar{p}_m + m\beta)\,\varphi(\omega)\Bigg), \qquad (9)\end{aligned}$$

$$F_k^{(m)}(\omega) = \frac{\lambda}{k}\sum_{z=1}^{m-k} p_{m,z}F_{k-1}^{(m-z)}(\omega), \quad k = 1,2,\dots,m-1.$$

$$\begin{aligned}F_0^{(m)}(\omega) = \mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](t,\omega) \\ - \frac{1}{h(\omega)}\Bigg(\lambda\sum_{z=1}^{m-1} p_{m,z}F^{(m-z)}(\omega) \\ + (\lambda\bar{p}_m + m\beta)\,\varphi(\omega)\Bigg),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h(\omega) = r + \lambda + \beta - i\omega\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) \\ + \omega^2\frac{\sigma^2}{2} \qquad (10)\end{aligned}$$

pada (9) dan (10) , $\varphi(\omega)$ terdefinisi dalam (6).

Selanjutnya peneliti mendefinisikan OSK *unvested* dalam fungsi harga berikut ini

$$\tilde{f}^{(m)}(t,x) = \tilde{C}^{(m)}(t, Ke^x),$$

untuk setiap $m = 1, \dots, M$. PDP untuk $\tilde{f}^{(m)}(t,x)$ dapat diturunkan dari persamaan (3).

$$-(r+\alpha)\tilde{f}^{(m)}+\tilde{f}_t^{(m)}+\tilde{\mathcal{L}}\tilde{f}^{(m)}=0, \quad (11)$$

untuk $(t,x)\in[0,t_v)\times\mathbb{R}$ dengan kondisi terminal $\tilde{f}^{(m)}(t_v,x)=f^{(m)}(t_v,x)$, untuk $x\in\mathbb{R}$. Kondisi terminal untuk masalah OSK *unvested* dapat ditentukan setelah harga OSK *vested* diperoleh. Peneliti menerapkan transformasi fourier ke persamaan (11), sehingga dapat diturunkan PDB untuk $\mathcal{F}[\tilde{f}^{(m)}](t,\omega)$,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}[\tilde{f}^{(m)}](t,\omega)=\tilde{h}(\omega)\mathcal{F}[\tilde{f}^{(m)}](t,\omega),$$

Dimana

$$\tilde{h}(\omega)=r+\alpha+i\omega\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\omega^2\frac{\sigma^2}{2},$$

untuk $(t,\omega)\in[0,t_v)\times\mathbb{R}$. Dengan kondisi terminal $\mathcal{F}[\tilde{f}^{(m)}](t_v,\omega)=\mathcal{F}[f^{(m)}](t_v,\omega)$, peneliti dapat menentukan penyelesaian PDB dari bentuk berikut

$$\mathcal{F}[\tilde{f}^{(m)}](t_v,\omega)=e^{-\tilde{h}(\omega)(t_v-t)}\mathcal{F}[\tilde{f}^{(m)}](t_v,\omega).$$

Berikutnya, dengan memperbaiki $\omega_I<-1$, bagian imajiner dari ω, peneliti menerapkan invers transformasi fourier untuk pemulihan harga OSK *unvested*

$$\begin{aligned}\tilde{C}^{(m)}(t,Ke^x)&=\tilde{f}^{(m)}(t,x)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega_R x-\omega_I x}\mathcal{F}[\tilde{f}^{(m)}](t,\omega_R\\&\quad+i\omega_I)d\omega_R,\end{aligned}$$

untuk $(t,x)\in[0,t_v)\times\mathbb{R}$ dimana ω_R menotasikan bagian real dari ω.

2. **Metode Beda Hingga**

Secara khusus, peneliti menerapkan metode Crank–Nicolson pada grid yang seragam. Untuk pengaturan grid, domain $[t_v,T]\times\mathbb{R}_+$ dibatasi pada $\mathcal{D}=\{(t,s)|t_v\le t\le T, 0\le s\le S^*\}$, di mana S^* harus relatif sangat besar sehingga jika harga saham saat ini $S_t=S^*$, maka harga saham akan lebih besar dari *strike price* K di atas $[t,T]$.

Untuk menentukan kondisi batas pada $s=S^*$, peneliti memperkenalkan fungsi baru

$$\begin{aligned}\bar{C}^{(m)}(t,s)=\mathbb{E}\Bigg\{&\int_{t_v}^{T}e^{-(r+\beta)(u-t)}(S_u-K)dL_u\\&+e^{-(r+\beta)(T-t)}(M-L_T)(S_T-K)\\&+\int_t^T\beta e^{-(r+\beta)(v-t)}(M\\&-L_v)(S_u-K)dv\mid S_t=s,L_t\\&=M-m\Bigg\},\end{aligned}$$

untuk $m=1,\dots,M$ dimana $s=S^*$. Peneliti dapat melihat bahwa $C^{(m)}(t,s)\approx\bar{C}^{(m)}(t,s)$ sehingga menetapkan syarat batas pada $s=S^*$ menjadi $C^{(m)}(t,S^*)=\bar{C}^{(m)}(t,S^*)$ dengan rumus Feynman-Kac, $\bar{C}^{(m)}(t,s)$ yang memenuhi PDP

$$\begin{aligned}-(r+\lambda(t)+\beta)\bar{C}^{(m)}&+\bar{C}_t^{(m)}+\mathcal{L}\bar{C}^{(m)}\\&+\lambda(t)\sum_{z=1}^{m-1}p_{m,z}\bar{C}^{(m-z)}\\&+(\lambda(t)\bar{p}_m+m\beta)(s-K)=0.\end{aligned}$$

Untuk $m=1,..,M$ dan $(t,s)\in(t_v,T)\times\mathbb{R}_+$ dengan kondisi terminal

$$\bar{C}^{(m)}(t,s)=m(s-K), s\in\mathbb{R}_+.$$

Maka, $\bar{C}^{(m)}(t,s)$ mempunyai solusi ansatz

$$\bar{C}^{(m)}(t,s)=A_m(t)s-B_m(t)K,$$

Dimana $A_m(t)$ dan $B_m(t)$ memenuhi pasangan masing-masing PDB

$$\begin{aligned}-(q+\lambda(t)+\beta)+A_m&+A'_m\\&+\lambda(t)\sum_{z=1}^{m-1}p_{m,z}A_{m-z}\\&+(\lambda(t)\bar{p}_m+m\beta)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-(r+\lambda(t)+\beta)+B_m&+B'_m\\&+\lambda(t)\sum_{z=1}^{m-1}p_{m,z}B_{m-z}\\&+(\lambda(t)\bar{p}_m+m\beta)=0, \quad (12)\end{aligned}$$

dengan kondisi terminal $B_m(T)=A_m(T)=m$, untuk $m=1,\dots,M$. Peneliti dapat memecahkan PDB (12) secara analitis.

Selanjutnya, proses diskritisasi domain $\mathcal{D}$ dengan ukuran grid seragam $\delta t=(T-t_v)/M_0$ dan $\delta S=S_*/N_0$. Kemudian, menerapkan $C_{ij}^{(m)}$ untuk menyatakan aproksimasi diskrit dari $C^{(m)}(t_i,s_j)$ dimana $t_i=t_v+i\delta t$ dan $s_j=j\delta S$. Metode Crank–Nicolson diterapkan untuk menyelesaikan PDP yang dipenuhi oleh $C^{(m)}$, untuk $m=1,\dots,M$. Peneliti memperoleh harga OSK *vested* pada waktu t_v, yang menjadi nilai kondisi terminal untuk masalah penilaian OSK *unvested* dengan bekerja *backward* dalam waktu. Untuk harga OSK *unvested*, peneliti membatasi domain $[0,t_v]\times\mathbb{R}_+$ ke domain hingga $\tilde{\mathcal{D}}=\{(t,s)|0\le t\le t_v, 0\le s\le S_*\}$ di mana S_* relatif sangat besar sehingga

$$\begin{aligned}\tilde{C}^{(m)}(t,S_*)&=\mathbb{E}\{e^{-(r+\alpha)(t_v-t)}C^{(m)}(t_v,S_{t_v})|S_t=S_*\}\\&\approx\mathbb{E}\{e^{-(r+\alpha)(t_v-t)}A_m(T-t_v)S_{t_v}-B_m(T-t_v)K|S_t\\&\quad=S_*\}\\&=e^{-(q+\alpha)(t_v-t)}A_m(T-t_v)S_*\\&\quad-e^{-(r+\alpha)(t_v-t)}B_m(T-t_v)K.\end{aligned}$$

Metode Crank-Nicolson digunakan untuk menyelesaikan PDP yang memenuhi $\tilde{C}^{(m)}(t,s)$ untuk $m=1,\dots,M$.

3. ***Stochastic Exercise Intensity***

Sekarang peneliti membahas intensitas *exercise* stokastik, perpanjangan dari model sebelumnya, bahwa $\lambda_t=\lambda(t,S_t)$, yang merupakan fungsi tidak hanya bergantung pada waktu t juga bergantung pada harga saham S_t. Harga $C^{(m)}(t,s)$ akan memenuhi:

$$\begin{aligned}-(r+\lambda(t,s)+\beta)C^{(m)}&+C_t^{(m)}+\mathcal{L}C^{(m)}\\&+\lambda(t,s)\sum_{z=1}^{m-1}p_{m,z}C^{(m-z)}\\&+(\lambda(t,s)\bar{p}_m+m\beta)(s-K)^+\\&=0. \quad (13)\end{aligned}$$

Untuk $m = 1, \dots, M$, dan $(t,s) \in [t_v, T] \times \mathbb{R}_+$, dengan kondisi terminal $C^{(m)}(T,s) = m(s-K)^+$ untuk $s \in \mathbb{R}_+$.

Artikel ini hanya membahas intensitas *exercise* stokastik dan karyawan tidak akan menggunakan opsi selama *vesting period*, PDP untuk OSK yang *unvested* tidak akan berubah. Untuk menerapkan transformasi fourier, peneliti menggunakan notasi yang sama bahwa

$$f^{(m)}(t,x) = C^{(m)}(t, Ke^x),$$

untuk $m = 1, \dots, M, (t,x) \in [t_v, T] \times \mathbb{R}$ dan

$$\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(t,x)e^{i\omega x}dx, \tag{14}$$

untuk $m = 1, \dots, M$. Pada bagian ini, dapat diasumsikan bahwa $\lambda(t,x) = A(t) - B(t)x$, untuk beberapa fungsi bergantung waktu positif $A(t)$ dan $B(t)$. Untuk implementasi, diasumsikan $B(t)$ relatif kecil, sehingga $\lambda(t,x)$ tetap positif di *truncated space* $(t_v, T) \times [-x_{max}, x_{max}]$. Kemudian, $f^{(m)}(t,x)$ memenuhi

$$\begin{aligned}-(r + A(t) - B(t)x + \beta)f^{(m)} + f_t^{(m)} + \tilde{\mathcal{L}}f^{(m)} \\ + (A(t) - B(t)x)\sum_{z=1}^{m-1} p_{m,z}f^{(m-z)} \\ + \big((A(t) - B(t)x)\,\bar{p}_m \\ + m\beta\big)(Ke^x - K)^+ \\ = 0,\end{aligned} \tag{15}$$

Dimana $\tilde{\mathcal{L}}$ didefinisikan di (5). Kondisi terminalnya adalah $f^{(m)}(T,x) = m(Ke^x - K)^+$ untuk $x \in [-x_{max}, x_{max}]$.

Menggunakan persamaan (14) dan sifat transformasi fourier bahwa $\mathcal{F}[xf](t,\omega) = i\partial_\omega \mathcal{F}[f](t,\omega)$. Peneliti mentransformasikan PDP (15) ke dalam

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](t,\omega) + iB(t)\frac{\partial}{\partial \omega}\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](t,\omega) \\ - h(t,\omega)\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](t,\omega) + \psi^{(m)}(t,\omega) \\ = 0,\end{aligned} \tag{16}$$

Dimana

$$h(t,\omega) = -\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)i\omega + \frac{\sigma^2\omega^2}{2} + r + A(t) + \beta,$$

$$\begin{aligned}\psi^{(m)}(t,\omega) = \sum_{z=1}^{m-1} p_{m,z}\mathcal{F}\left[\lambda f^{(m-z)}\right](t,\omega) \\ + \mathcal{F}[(\lambda\bar{p}_m + m\beta)(Ke^x - K)^+](t,\omega),\end{aligned}$$

Untuk $(t,\omega) \in [t_v, T) \times \mathbb{R}$.

Perhatikan bahwa (16) adalah PDP orde satu dengan kondisi terminal $\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](T,\omega) = m\varphi(\omega)$ (lihat (6)). Oleh karena itu, peneliti menerapkan metode karakteristik dan mendapatkan

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](t,\omega) \\ = e^{-\int_t^T h\left(s,\omega - i\int_s^t B(u)du\right)ds}\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right]\left(T, \omega + i\int_t^T B(u)du\right) \\ + \int_t^T g^{(m)}(\tau,\omega;t)d\tau\end{aligned} \tag{17}$$

Dimana

$$\begin{aligned}g^{(m)}(\tau,\omega;t) = e^{-\int_t^T h\left(s,\omega - i\int_s^t B(u)du\right)ds}\,\psi^{(m)}\Bigg(\tau,\omega \\ + i\int_t^T B(u)du\Bigg)\end{aligned} \tag{18}$$

Hasil penelitian ini berbeda dengan penelitian yang dilakukan oleh (Leung & Zhou, 2020), karena pada penelitian ini metode numerik yang digunakan untuk menentukan harga saham adalah *fast fourier transform* dan metode beda hingga tanpa memperkenalkan metode baru berupa *maturity randomization.* Hal ini dilakukan peneliti, karena kedua metode yang disebutkan sebelumnya lebih baik dalam menentukan penyelesaian model PDP *vested* dan *unvested* suatu opsi. Perbedaan lainnya terdapat pada simulasi numerik. Dalam penelitian ini, peneliti memodelkan opsi saham karyawan dengan menggunakan pendekatan *top-down* dan tidak melakukan simulasi numerik seperti pada penelitian yang dilakukan oleh (Leung & Zhou, 2020). Sehingga, hasil yang diperoleh dalam artikel ini berupa model dan hasil analisis.

SIMPULAN

Semua opsi yang dilakukan pada waktu yang sama, memotivasi peneliti untuk menemukan model penilaian baru yang memungkinkan pemegang OSK untuk melakukan *exercise* dalam jumlah yang berbeda dari waktu ke waktu. Penerima opsi *multiple random exercise* dimodelkan oleh proses lompatan eksogen. Distribusi *multiple-date exercise* konsisten dengan bukti empiris. Fitur tambahan yang disertakan adalah risiko pemutusan hubungan kerja selama dan setelah *vesting period*.

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dua metode numerik yang digunakan dapat menentukan penghitungan harga, pemeriksaan dampak resiko pemutusan kerja, intensitas *exercise*, *vesting period* dan fitur lainnya. Metode numerik yang diusulkan tidak hanya berlaku untuk pengeluaran OSK seperti yang dipersyaratkan, tetapi juga berguna untuk memahami efek gabungan dari intensitas *exercise* dan risiko pemutusan hubungan kerja pada harga OSK.

SARAN

Penelitian ini hanya membahas pendekatan penilaian top-down yang menggunakan dua metode numerik yakni *fast fourier transformation* dan metode beda hingga. Bagi banyak perusahaan, estimasi risiko untuk kumpulan OSK sangat penting dan menantang. Masalah terkait lainnya menyangkut efek insentif dan desain OSK yang optimal sehingga perusahaan dapat menyelaraskan kepentingan karyawan dengan lebih baik dalam jangka waktu yang lebih lama.

DAFTAR PUSTAKA

Chairunnisa, U. H., Hoyyi, A., & Yasin, H. (2021). Pemodelan Transformasi Fast-Fourier Pada Valuasi Obligasi Korporasi (Studi Kasus: PT. Bank Danamon Tbk, PT. Bank CIMB Niaga Tbk, dan PT. Bank UOB Indonesia Tbk). *Jurnal Gaussian*, 10 (1), 85-93.

Chrysanthus, O. S. (2021). Pengaruh analisis fundamental terhadap keputusan membeli saham: studi empiris pada perusahaan yang terdaftar di LQ45 periode 2015-2019.

Fadugba, S. E., & Nwozo, C. R. (2016). Valuation of European Call Options via the Fast Fourier Transform and the Improved Mellin Transform. *Journal of Mathematical Finance*.

Fitri, A. (2020). Penentuan Nilai Opsi Saham Karyawan (OSK) dengan Menghitungkan Efek Dilusi Menggunakan Metode Black-Scholes (Doctoral dissertation, Universitas Negeri Padang).

Gusnela, N., & Ahmad, D. (2020). Penentuan Nilai Opsi Saham Karyawan (OSK) dengan Memperhitungkan Efek Dilusi Menggunakan Metode Lattice Trinomial. *UNP Journal of Mathematics, 3(1)*.

Hadriyan, Y. (2020, Oktober 15). *Panduan sederhana analisa top-down dalam investasi saham*. Retrieved from BIG ALPHA: https://bigalpha.id/news/panduan-sederhana-analisa-top-down-dalam-investasi-saham

Irawan, W., Rosha, M., & Permana, D. (2019). Penentuan Harga Opsi dengan Model Black-Scholes Menggunakan Metode Beda Hingga Center Time Center Space (CTCS). *UNP Journal of Mathematics, 2(1)*.

Leung. (2021). *Top-Down Valuation Approach* (Vol. 3). University of Washington, USA: World Scientific.

Leung, T., & Zhou, Y. (2020). A Top-Down Approach for the Multiple Exercises and Valuation. *Jurnal Internasional Keuangan Teoritis dan Terapan*.

Miranti, T., & Rusli Hidayat, K. (2014). The Solution of Laplace Equation Using Crank-Nicholson Method. *Prosiding Seminar Nasional Matematika UNEJ*.

Mustikharima. (2020, juli 15). *Budgeting Approach Bottom-Up Vs Top-Down*. Retrieved from Myco: https://www.myco.co.id/post/bottom-up-vs-top-down

Nurfitroh, M. R. (2013). Aplikasi Metode Crank-Nicolson Pada Penentuan Harga Opsi Saham Eropa.

Nurhani, L. (2020). Analisis Perbandingan Akurasi Penentuan Harga Opsi Saham Dengan Metode Black Scholes dan Metode Simulasi Monte-Carlo Pada Indeks Saham Lq45 (Periode tahun 2015-2018) (Doctoral dissertation, Universitas Pancasakti Tegal).

Nurmawaddah. (2018). Penentuan Harga Opsi Tipe Eropa dengan Harga Saham Menggunakan Simulasi Normal Inverse Gaussian (NIG) (Doctoral Dissertation, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar).

Nurwahida, N. (2018). Analisis Fundamental Perusahaan Dan Manajemen Dalam Memilih Saham. *Universitas Trilogi*.

Redaksi. (2020, Juni 13). *Apa Itu Opsi Saham?* Retrieved from Pluang: https://blog.pluang.com/cerdascuan/opsi-saham-adalah/

Suherman, S., & Fitri, A. (2020). Menentukan Nilai Opsi Saham Karyawan (OSK) dengan Memperhitungkan Efek Dilusi dengan Menggunakan Metode Black-Scholes. *Jurnal Matematika UNP, 3(2)*.

Sukasih, N. K. (2017). Pengambilan Keputusan dalam Investasi Saham dengan Pendekatan Fundamental terhadap Laporan Keuangan di Pasar Modal Indonesia. *Jurnal Bisnis dan Kewirausahaan*, 175.

Vieki, N. (2019). Pengaruh Corporate Social Responsibility (Csr), Kepemilikan Institusional Dan Leverage Terhadap Manajemen Laba (Studi pada Perusahaan Manufaktur yang tercatat di Bursa Efek Indonesia Periode Tahun 2014-2018) (Disertasi Doktor, Universitas Darma Persada).