

KARAKTERISASI *BCK*-ALJABAR IMPLIKATIF BERDASARKAN *N*-IDEAL IMPLIKATIF NEUTROSOFIK

Devy Gita Kirana

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
email: devy.18039@mhs.unesa.ac.id

Agung Lukito

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
Penulis Korespondensi: agunglukito@unesa.ac.id

Abstrak

Pada artikel ini diperkenalkan konsep *N*-ideal implikatif neutrosodik dalam *BCK*-aljabar, dan diselidiki beberapa sifatnya. Hasil utamanya adalah karakterisasi *BCK*-aljabar implikatif dengan menggunakan *N*-ideal implikatif neutrosodik.

Kata Kunci: *BCK*-aljabar implikatif, *N*-ideal implikatif neutrosodik.

Abstract

This article introduced the idea of neutrosophic implicative N-ideal in BCK-algebra, and numerous features are investigated. The main result was a characterization of the implicative BCK-algebra using a neutrosophic implicative N-ideal as a starting point.

Keywords: *implicative BCK-algebra, neutrosophic implicative N-ideal.*

PENDAHULUAN

K. Iséki (1966) mengungkapkan bahwa dalam matematika *BCK/BCI*-aljabar merupakan struktur aljabar dalam logika matematika yang melibatkan implikasi. *BCK*-aljabar merupakan *BCI*-aljabar. *BCK*-aljabar memiliki banyak aplikasi di berbagai cabang matematika, seperti teori grup, teori probabilitas, topologi dan analisis fungsional.

Jun dkk. (2009) memperkenalkan *N*-struktur ke komunitas aljabar logika. Himpunan neutrosodik yang diperkenalkan oleh Smarandache (1999, 2005) adalah generalisasi dari himpunan intuisisionistik, himpunan klasik, himpunan fuzzy, himpunan parakonsisten, himpunan dialektis, himpunan paradoks, himpunan tautologi berdasarkan neutrosodik. Jun dkk. (2017) memperkenalkan gagasan tentang *N*-struktur neutrosodik ke komunitas dengan menggabungkan struktur neutrosodik dan *N*-struktur. Jun dkk. (2017) dan Song dkk. (2017) menerapkan *N*-struktur neutrosodik pada *BCK/BCI*-aljabar.

Untuk mengembangkan pengetahuan tentang *BCK/BCI*-aljabar, serta menyelidiki hubungannya dengan *N*-ideal implikatif neutrosodik, maka pada artikel ini akan didiskusikan *N*-ideal implikatif neutrosodik yang diaplikasikan pada *BCK*-aljabar.

Kemudian, dijabarkan konsep *N*-struktur neutrosodik dan *N*-ideal implikatif neutrosodik di *BCK*-aljabar, dan menyelidiki sifat-sifatnya. Yang selanjutnya dikarakterisasi *N*-struktur neutrosodik dan *N*-ideal implikatif neutrosodik dan didiskusikan hubungan antara *N*-struktur neutrosodik dan *N*-ideal implikatif neutrosodik. Sehingga dapat diunjukkan bahwa jika dua *N*-ideal neutrosodik X_N dan X_M memiliki hubungan $X_N (=, \leq, =) X_M$, dan jika X_N merupakan *N*-ideal implikatif neutrosodik dari X , maka begitu juga X_M .

KAJIAN PUSTAKA

Definisi 2.1. *BCK/BCI*-aljabar adalah struktur aljabar yang terdiri atas himpunan tak-kosong X dengan operasi biner $*$ dan memiliki anggota istimewa 0. Suatu struktur dapat disebut *BCI*-aljabar jika memenuhi empat aksioma berikut:

(I) $((p * q) * (p * r)) * (r * q) = 0,$

(II) $(p * (p * q)) * q = 0,$

(III) $p * p = 0,$

(IV) $p * q = p * q = 0 \implies p = q$

untuk semua p, q, r anggota X . Jika *BCI*-aljabar X memenuhi

(V) $0 * p = 0$

Maka untuk semua p anggota X , maka X disebut BCK -aljabar.

Proposisi 2.2. BCK/BCI -aljabar X memenuhi $p * 0 = p$ untuk semua p anggota X .

Bukti. Dengan substitusi $q = 0$ pada aksioma (II) diperoleh

$$(p * (p * 0)) * 0 = 0. \quad (2.1)$$

Dengan substitusi $q = p * 0$ dan $r = p$ pada aksioma (I) diperoleh

$$((p * (p * 0)) * (p * p)) * (p * (p * 0)) = 0.$$

Dari aksioma (III), identitas ini menjadi

$$((p * (p * 0)) * 0) * (p * (p * 0)) = 0. \quad (2.2)$$

Substitusikan (2.1) ke (2.2) untuk memperoleh

$$0 * (p * (p * 0)) = 0. \quad (2.3)$$

Dari (2.1) dan (2.3), dengan aksioma (IV), diperoleh

$$p * (p * 0) = 0. \quad (2.4)$$

Dengan substitusi $q = p$ pada aksioma (II) diperoleh

$$(p * (p * p)) * p = 0.$$

Dari aksioma (III), identitas berikut berlaku

$$(p * 0) * p = 0 \quad (2.5)$$

Dari (2.4) dan (2.5), dengan aksioma (IV), diperoleh $p * 0 = p$. \square

Definisi 2.3. Pengurutan parsial \leq pada BCK/BCI -aljabar X didefinisikan untuk setiap p, q anggota X , $p \leq q$ jika dan hanya jika $p * q = 0$.

Proposisi 2.4. Pengurutan parsial \leq pada BCK/BCI -aljabar X bersifat:

- (i) Refleksif ($p \leq p$),
- (ii) Anti-simetris (jika $p \leq q$ dan $q \leq p$, maka $p = q$), dan
- (iii) Transitif (jika $p \leq q$ dan $q \leq r$, maka $p \leq r$).

Bukti. (i) Dengan aksioma (III) dan definisi \leq diketahui $p * p = 0$, sehingga diperoleh

$$p \leq p,$$

sehingga terbukti bahwa pengurutan \leq bersifat refleksif.

(ii) Misalkan $p \leq q$ dan $q \leq p$. Berdasarkan definisi, diperoleh $p * q = 0$, $q * p = 0$ sehingga berdasarkan aksioma (IV) diperoleh $p = q$. Jadi terbukti bahwa pengurutan \leq bersifat anti-simetris.

(iii) Misalkan $p \leq q$ dan $q \leq r$. Berdasarkan definisi \leq , diperoleh

$$p * q = 0 \text{ dan } q * r = 0.$$

Dengan substitusi $q = r$ dan $r = q$ pada aksioma (I) diperoleh

$$((p * r) * (p * q)) * (q * r) = 0,$$

sehingga

$$((p * r) * 0) * 0 = 0.$$

Dengan Proposisi 2.2, diperoleh

$$(p * r) * 0 = 0,$$

dan lagi

$$p * r = 0.$$

Berdasarkan definisi \leq , diperoleh $p \leq r$. Jadi terbukti bahwa pengurutan \leq bersifat transitif. \square

Proposisi 2.5. BCK/BCI -aljabar X memenuhi:

- (i) Untuk setiap p, q, r anggota X . Jika $p \leq q$, maka $r * q \leq r * p$,
- (ii) Untuk setiap p, q, r anggota X , berlaku $(p * q) * r = (p * r) * q$,
- (iii) Untuk setiap p, q, r anggota X . Jika $p \leq q$, maka $p * r \leq q * r$,
- (iv) Untuk setiap p, q, r anggota X , berlaku $(p * r) * (q * r) \leq p * q$,
- (v) Untuk setiap p, q, r anggota X , berlaku $(p * q) * (p * r) \leq r * q$,
- (vi) Untuk setiap p, q anggota X , berlaku $p * (p * (p * q)) = p * q$.

Bukti. (i) Dengan substitusi $r = p$ dan $p = r$ pada aksioma (I), didapat

$$((r * q) * (r * p)) * (p * q) = 0$$

dan karena $p \leq q$, diperoleh

$$((r * q) * (r * p)) * 0 = 0.$$

Berdasarkan Proposisi 2.2, didapat

$$(r * q) * (r * p) = 0$$

sehingga menurut definisi \leq dapat disimpulkan $r * q \leq r * p$.

(ii) Dengan substitusi $q = r$ pada aksioma (II) didapat

$$(p * (p * r)) * r = 0$$

atau dengan definisi pengurutan \leq , $p * (p * r) \leq r$.

Kemudian, dengan bagian (i) diperoleh

$$(p * q) * r \leq (p * q) * (p * (p * r))$$

Dengan substitusi $r = p * r$ pada aksioma (I) didapat

$$((p * q) * (p * (p * r))) * ((p * r) * q) = 0$$

atau

$$(p * q) * (p * (p * r)) \leq (p * r) * q.$$

Karena pengurutan \leq transitif, dari dua hasil terakhir ini dapat disimpulkan bahwa

$$(p * q) * r \leq (p * r) * q.$$

Dengan substitusi $q = r$ dan $r = q$ pada hasil ini diperoleh

$$(p * r) * q \leq (p * q) * r,$$

sehingga dengan aksioma (IV) diperoleh $(p * q) * r = (p * r) * q$.

(iii) Dengan substitusi $q = r$ dan $r = q$ pada aksioma (I) didapat

$$((p * r) * (p * q)) * (q * r) = 0$$

dan karena $p \leq q$, diperoleh

$$((p * r) * 0) * (q * r) = 0.$$

Berdasarkan Proposisi 2.2, didapat

$$(p * r) * (q * r) = 0$$

sehingga menurut definisi \leq disimpulkan $p * r \leq q * r$.

(iv) Dengan substitusi $r = q$ dan $q = r$ pada aksioma (I) didapat

$$((p * r) * (p * q)) * (q * r) = 0$$

dan dengan bagian (ii) setara dengan

$$((p * r) * (q * r)) * (p * q) = 0.$$

Dengan menggunakan definisi \leq , diperoleh $(p * r) * (q * r) \leq p * q$.

(v) Dengan definisi \leq pada aksioma (I), sehingga diperoleh $(p * q) * (p * r) \leq (r * q)$.

(vi) Misalkan $r = p * (p * q)$ pada (v), maka diperoleh

$$(p * q) * (p * (p * (p * q))) \leq ((p * (p * q)) * q).$$

Karena berlaku aksioma (II), sehingga didapat

$$(p * q) * (p * (p * (p * q))) \leq 0.$$

Berdasarkan Definisi 2.3 dan Proposisi 2.2, didapat

$$(p * q) * (p * (p * (p * q))) = 0$$

Dengan Proposisi 2.2, didapat

$$p * q = p * (p * (p * q))$$

Oleh karena itu, terbukti $p * (p * (p * q)) = p * q$ benar. \square

Observasi 2.6. Dengan substitusi $p = p * q$ pada aksioma (V), diperoleh

$$0 * (p * q) = 0,$$

kemudian dengan aksioma (III) didapat

$$(p * p) * (p * q) = 0.$$

Dengan proposisi 2.5 (ii), didapat

$$(p * (p * q)) * p = 0,$$

sehingga dengan aplikasi definisi \leq , diperoleh

$$p * (p * q) \leq p.$$

Definisi 2.7. *BCK*-aljabar X dikatakan *implikatif* jika untuk setiap p, q anggota X , berlaku

$$(p * (p * q) = p). \quad (2.6)$$

Definisi 2.8. Subhimpunan I dari *BCK/BCI*-aljabar X disebut *ideal* pada X jika memenuhi

$$0 \in I \quad (2.7)$$

dan untuk semua p, q anggota X ,

$$\text{jika } p * q \in I \text{ dan } q \in I, \text{ maka } p \in I \quad (2.8)$$

Lemma 2.9. Semua ideal I dari *BCK*-aljabar X memenuhi kondisi untuk setiap p, q anggota X , jika q ideal dan $p \leq q$, maka p juga merupakan ideal.

Bukti. Menurut definisi \leq , $p \leq q$ setara dengan $p * q = 0$, dan karena $0 \in I$, $p * q \in I$. Lagi, karena q ideal, berdasarkan syarat ideal (2.8), diperoleh bahwa p merupakan ideal. \square

Definisi 2.10. Subhimpunan I dari *BCK/BCI*-aljabar X disebut *ideal implikatif positif* pada X jika memenuhi (2.7) dan untuk semua p, q, r anggota X ,

$$((p * q) * r \in I, q * r \in I \Rightarrow p * r \in I). \quad (2.9)$$

Proposisi 2.11 (Meng dan Jun, 1994). Sebarang ideal implikatif positif merupakan ideal, namun tidak berlaku sebaliknya.

Bukti. (\Rightarrow) Dengan substitusi $r = 0$ pada (2.9), didapat

$$(p * q) * 0 \in I, q * 0 \in I \Rightarrow p * 0 \in I.$$

Berdasarkan (2.7) dan (2.8) maka terbukti bahwa sebarang ideal implikatif positif merupakan ideal.

(\Leftarrow) Dengan bantuan contoh, perhatikan $X = \{0,1,2,3,4\}$ dengan tabel Cayley pada Tabel 1.

Tabel 1. Tabel Cayley untuk operasi biner " $*$ ".

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1
2	2	2	0	2	0
3	3	1	3	0	3
4	4	4	4	4	0

Kemudian $(X; *, 0)$ merupakan *BCK*-aljabar. $\{0,1,3\}$ dan $\{0,1,2,3\}$ merupakan ideal implikatif positif X . Sehingga $\{0\}$, $\{0,2\}$ dan $\{0,2,4\}$ merupakan ideal X , tetapi bukan implikatif positif.

Dari contoh diketahui bahwa $\{0,2\}$ ideal, akan tetapi bukan implikatif positif seperti $(3 * 2) * 0 \in \{0,2\}$, $2 * 0 = 2 \in \{0,2\}$ dan $3 * 0 = 3 \in \{0,2\}$. Hal ini menunjukkan bahwa ideal belum tentu merupakan implikatif positif. \square

Lemma 2.12. I merupakan subhimpunan dari BCK/BCI -aljabar X yang tak-kosong, pernyataan berikut ekuivalen:

- (i) I merupakan ideal implikatif positif,
- (ii) I merupakan ideal, dan untuk sebarang p, q anggota X . Jika $(p * q) * q \in I$, maka $p * q \in I$,
- (iii) I merupakan ideal, dan untuk sebarang p, q, r anggota X . Jika $(p * q) * r \in I$, maka $(p * r) * (q * r) \in I$,
- (iv) Jika $0 \in I$ dan $((p * q) * q) * r \in I$, maka $p * q \in I$.

Bukti. $((i) \Rightarrow (ii))$ Misalkan I ideal implikatif positif. Berdasarkan Proposisi 2.11, I merupakan ideal. Misalkan $(p * q) * q \in I$. Dengan substitusi $r = q$ pada (2.9), karena $q * q = 0 \in I$, diperoleh $p * q \in I$.

$((ii) \Rightarrow (iii))$ Asumsikan (ii) dan (2.9) berlaku. Maka dengan $r \in I$ dan Proposisi 2.5 (iv), didapat

$$((p * r) * (q * r)) * r \leq (p * q) * r \in I,$$

berdasarkan Proposisi 2.5 (ii), didapat

$$((p * (q * r)) * r) * r \in I.$$

Dengan (ii) didapat

$$(p * (q * r)) * r \in I, \quad (2.11)$$

sehingga dengan Proposisi 2.5 (ii) pada (2.11), didapat $(p * r) * (q * r) \in I$.

$((iii) \Rightarrow (iv))$ Diketahui bahwa $0 \in I$. Jika $((p * q) * q) * r \in I$ dan $r \in I$, maka $((p * r) * q) * q \in I$. Dengan (iii) didapat

$$((p * r) * q) * (q * q) \in I,$$

dari aksioma (III), identitas berikut berlaku

$$(p * q) * r \in I.$$

Karena I ideal dan $r \in I$, maka $p * q \in I$.

$((iv) \Rightarrow (i))$ Jika I memenuhi (iv), maka I merupakan ideal dari X . Dengan $p * q \in I$ dan $y \in I$, didapat

$$((p * 0) * 0) * q \in I \text{ dan } q \in I.$$

Berdasarkan (iv) didapat $p = p * 0 \in I$. Misalkan I merupakan ideal, $(p * q) * r \in I$ dan $q * r \in I$. Dengan Proposisi 2.5 (ii), diperoleh

$$(p * r) * q \in I. \quad (2.12)$$

Dengan menggunakan Proposisi 2.5 (iv) pada (2.12), didapat

$$((p * r) * r) * (q * r) \leq (p * r) * q \in I,$$

dan diperoleh $((p * r) * r) * (q * r) \in I$. Dengan (iv) didapat $p * r \in I$. Hal ini membuktikan bahwa I merupakan ideal implikatif positif. \square

Lemma 2.13. Misalkan A dan B ideal dari BCK -aljabar X sehingga $A \subseteq B$. Jika A implikatif positif, maka begitu juga B .

Bukti. Misalkan $(p * q) * r \in B$ dan $u = (p * q) * r$. Dengan aksioma (III) diketahui bahwa:

$$((p * q) * r) * u = 0 \in A.$$

Dengan Proposisi 2.5 (ii) didapat

$$((p * u) * q) * r = 0 \in A. \quad (2.10)$$

Dengan Definisi 2.10 dan Lemma 2.12 (iii) didapat

$$((p * u) * r) * (q * r) \in A,$$

dan lagi dengan Proposisi 2.5 (ii),

$$((p * r) * u) * (q * r) \in A,$$

dan juga

$$((p * r) * (q * r)) * u \in A,$$

dengan substitusi $u = (p * q) * r$, diperoleh

$$((p * r) * (q * r)) * ((p * q) * r) \in A.$$

Karena $A \subseteq B$, diperoleh

$$((p * r) * (q * r)) * ((p * q) * r) \in B.$$

Karena $(p * q) * r \in B$ dan B ideal, diperoleh

$$(p * r) * (q * r) \in B.$$

Berdasarkan Lemma 2.12 (iii), B merupakan implikatif positif. \square

Definisi 2.14. Subhimpunan I dari BCK -aljabar X disebut *ideal implikatif* pada X jika memenuhi (2.7) dan untuk setiap p, q, r anggota X , memenuhi

$$((p * (q * p)) * r \in I, r \in I \Rightarrow p \in I). \quad (2.13)$$

Lemma 2.15 (Meng dan Jun, 1994). Subhimpunan I dari BCK -aljabar X adalah ideal implikatif pada X jika dan hanya jika I adalah ideal dari X yang untuk setiap p, q anggota X , memenuhi syarat berikut:

$$(p * (q * p)) \in I \Rightarrow p \in I). \quad (2.14)$$

Bukti. (\Rightarrow) Misalkan I ideal implikatif dan $r \in I$. Substitusi $q = p$ pada (2.13), sehingga didapat

$$(p * (p * p)) * r = p * z.$$

Berdasarkan (2.13) diperoleh $p \in I$. sehingga I merupakan ideal.

(\Leftarrow) Diberikan I ideal dan memenuhi (2.14). Misalkan $(p * (q * p)) * r \in I$ dan $r \in I$. Dengan (2.8) didapat

$$p * (q * p) \in I.$$

Maka dengan (2.14) diperoleh $p \in I$. \square

Lemma 2.16. Setiap ideal implikatif merupakan implikatif positif, namun ideal implikatif positif tidak harus implikatif.

Bukti. (\Rightarrow) Misalkan I ideal implikatif, $(p * q) * r \in I$, dan $q * r \in I$. Proposisi 2.5 (ii) dan (iv) mengakibatkan

$$((p * r) * r) * (q * r) \leq (p * r) * q = (p * q) * r \in I.$$

Berdasarkan Lemma 2.8, diperoleh

$$((p * r) * r) * (q * r) \in I.$$

Karena $q * r \in I$ dan I ideal, maka didapat

$$(p * r) * r \in I.$$

Berdasarkan Proposisi 2.5(vi),

$$p * r = (p * (p * (p * r))),$$

sehingga diperoleh

$$(p * (p * (p * r))) * r \in I$$

dan dengan Proposisi 2.5 (ii), didapat

$$(p * r) * (p * (p * r)) \in I,$$

sehingga $((p * r) * (p * (p * r))) * 0 \in I$. Karena I implikatif dan $0 \in I$, maka didapat $p * r \in I$. Hal ini menunjukkan bahwa I merupakan ideal implikatif positif.

(\Leftarrow) Dengan bantuan contoh, perhatikan $X = \{0,1,2,3,4\}$ dengan tabel Cayley pada Tabel 2.

Tabel 2. Tabel Cayley untuk operasi biner “*”.

*	0	1	2	3	4
0	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1
2	2	2	0	2	0
3	3	1	3	0	3
4	4	4	4	4	0

Maka $(X; *, 0)$ merupakan BCK-aljabar. Dari tabel dapat diketahui bahwa $\{0,1,3\}$ merupakan ideal, tetapi tidak implikatif. \square

Lemma 2.17. Misalkan I ideal implikatif positif dari X . Maka I implikatif jika dan hanya jika untuk setiap p, q anggota X , berlaku

$$(q * (q * r)) \in I \Rightarrow p * (p * q) \in I). \quad (2.16)$$

Bukti. (\Rightarrow) Misalkan I ideal implikatif positif, dan $q * (q * p) \in I$. Berdasarkan Observasi 2.6, $p * (p * q) \leq p$, sehingga dengan Proposisi 2.5 (i) didapat

$$q * p \leq q * (p * (p * q)),$$

dan juga

$$\begin{aligned} (p * (p * q)) * (q * (p * (p * q))) \\ \leq (p * (p * q)) * (q * p). \end{aligned}$$

Berdasarkan Proposisi 2.5 (ii),

$$(p * (p * q)) * (q * p) = (p * (q * p)) * (p * q).$$

Dengan Proposisi 2.5 (v),

$$(p * (q * p)) * (p * q) \leq q * (q * p).$$

Dengan sifat transitif \leq , kombinasi ketiga hasil terakhir ini mengakibatkan

$$(p * (p * q)) * (q * (p * (p * q))) \leq q * (q * p).$$

Berdasarkan Observasi 2.6 dan karena $q * (q * p) \in I$ ideal, diperoleh

$$(p * (p * q)) * (q * (p * (p * q))) \in I.$$

Dengan Proposisi 2.2,

$$(p * (p * q)) * (q * (p * (p * q))) * 0 \in I.$$

Dari Definisi 2.14 dan $0 \in I$ didapat $p * (p * q) \in I$.

(\Leftarrow) Misalkan I memenuhi (2.16) dan misalkan $(p * (q * p)) * r \in I$ dan $r \in I$. Sekarang akan dibuktikan bahwa $p \in I$. Karena I ideal, $p * (q * p) \in I$. Substitusi $p = q$ dan $q = p$ pada aksioma (II), diperoleh

$$(q * (q * p)) * p = 0.$$

Berdasarkan definisi \leq diperoleh $(q * (q * p)) \leq p$, kemudian dengan Proposisi 2.5 (iii),

$$(q * (q * p)) * (q * p) \leq p * (q * p) \in I,$$

sehingga berdasarkan Lemma 2.9 $(q * (q * p)) * (q * p) \in I$. Dari Lemma 2.12 (ii), didapat $q * (q * p) \in I$.

Dengan (2.16) didapat

$$p * (p * q) \in I. \quad (2.17)$$

Dengan substitusi $p = q$, $q = 0$, dan $r = p$ pada Proposisi 2.5 (iv), diperoleh

$$(q * p) * (0 * p) \leq q * 0,$$

karena berlaku aksioma (V), maka

$$(q * p) * 0 \leq q * 0$$

dan berdasarkan Proposisi 2.2, diperoleh

$$q * p \leq q.$$

Dengan Proposisi 2.5 (i)

$$p * q \leq p * (q * p) \in I,$$

Kemudian, dengan Proposisi 2.5 (iii) didapat

$$(p * q) * r \leq (p * (q * p)) * r \in I.$$

Maka berdasarkan Lemma 2.9 $(p * q) * r \in I$.

Berdasarkan (2.8) karena $r \in I$, maka $p * q \in I$.

Kemudian pada (2.17) berdasarkan (2.8) didapat $p \in I$, maka terbukti I merupakan ideal implikatif \square

Lemma 2.18. Pada X BCK-aljabar, pernyataan berikut ekuivalen:

- (i) X merupakan BCK-aljabar implikatif positif,
- (ii) $\{0\}$ merupakan ideal implikatif positif dari X ,
- (iii) Semua ideal X merupakan implikatif positif,
- (iv) Untuk sebarang $a \in X$, $A(a) = \{p \in X : p \leq a\}$ merupakan ideal.

Bukti. ((i) \Rightarrow (ii)) Jelas $\{0\}$ ideal, kemudian asumsikan bahwa X merupakan BCK-aljabar

implikatif positif, maka didapat $(p * q) * q = p * q$. Oleh karena itu, jika $(p * q) * q \in \{0\}$ berarti $p * q \in \{0\}$. Dengan Lemma 2.12 (ii), diketahui bahwa $\{0\}$ ideal implikatif positif.

(ii) \Rightarrow (iii) Dengan Lemma 2.13 didapat bahwa untuk $\{0\}$ ideal implikatif positif, maka semua ideal X merupakan implikatif positif.

(iii) \Rightarrow (iv) Untuk $a \in X$ dan $p * q$, dengan $q \in A(a)$, maka diperoleh $p * q \leq a$ dan $q \leq a$. Oleh karena itu $(p * q) * a = 0 \in \{0\}$ dan $q * a = 0 \in \{0\}$. Dengan (iii), didapat bahwa $\{0\}$ merupakan ideal implikatif positif dan $p * a = 0$. Oleh karena itu, $p \in A(a)$. Sehingga, untuk sebarang X , $A(a) = \{p \in X : p \leq a\}$ merupakan ideal.

(iv) \Rightarrow (i) Misalkan untuk sebarang $a \in X$, $A(a) = \{p \in X : p \leq a\}$ ideal dan $(p * q) * q = 0$, maka $p * q \in A(q)$. Karena $A(q)$ merupakan ideal dan $q \in A(q)$, sehingga didapat $p \in A(q)$, $p * q = 0$. Oleh karena itu terbukti bahwa untuk X BCK-aljabar, $(p * q) * q = 0$ berarti $p * q = 0$. Berdasarkan Lemma 2.16, maka X merupakan BCK-aljabar implikatif positif. \square

Lemma 2.19 (Meng dan Jun, 1994). Misalkan A dan B ideal dari BCK-aljabar X dan $A \subseteq B$. Jika A merupakan ideal implikatif X , maka begitu juga B .

Bukti. Berdasarkan Lemma 2.16, didapat bahwa A merupakan ideal implikatif positif. Dengan Lemma 2.13, didapat bahwa B merupakan ideal implikatif positif. Untuk membuktikan bahwa B implikatif, maka B harus memenuhi (2.16). Misalkan $p * (p * q) \in B$ dan tetapkan $u = p * (p * q)$. Berdasarkan aksioma (III),

$$(p * (p * q)) * u = 0 \in A,$$

dan karena A implikatif positif, dengan Lemma 2.12 (iii) didapat

$$(p * u) * ((p * q) * u) \in A.$$

Dengan Proposisi 2.5 (ii) diperoleh

$$(p * u) * ((p * u) * q) \in A.$$

Berdasarkan implikativitas A dan Lemma 2.17, diperoleh $q * (q * (p * u)) \in A$. Karena $A \subseteq B$, maka $q * (q * (p * u)) \in B$. Kemudian, dengan Proposisi 2.5 (v) didapat

$$(q * (q * p)) * (q * (q * (p * u))) \leq (q * (p * u)) * (q * p).$$

Lagi dengan Proposisi 2.5 (v), diperoleh

$$(q * (p * u)) * (q * p) \leq p * (p * u).$$

Karena

$$p * (p * u) = p * (p * (p * (p * q))),$$

berdasarkan Proposisi 2.5 (vi),

$$p * (p * u) = p * (p * q) \in B.$$

Dengan sifat transitif \leq , kombinasi ketiga hasil terakhir ini mengakibatkan

$$(q * (q * p)) * (q * (q * (p * u))) \leq p * (p * q) \in B.$$

Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 2.9 didapat

$$(q * (q * p)) * (q * (q * (p * u))) \in B.$$

Karena $q * (q * (p * u)) \in B$, didapat $q * (q * p) \in B$.

Berdasarkan Lemma 2.17, B merupakan ideal implikatif. \square

Definisi 2.20. Notasi $F(X, [-1, 0])$ menyatakan kumpulan fungsi dari himpunan X ke $[-1, 0]$. Anggota di $F(X, [-1, 0])$ disebut *fungsi bernilai negatif* dari X ke $[-1, 0]$ (singkatnya, \mathcal{N} -fungsi pada X). Pasangan terurut (X, f) dengan himpunan X dan \mathcal{N} -fungsi f pada X disebut \mathcal{N} -struktur (Jun dkk., 2009).

Definisi 2.21. \mathcal{N} -struktur neutrosodik atas semesta tak-kosong X (Khan dkk., 2017) didefinisikan sebagai struktur

$$X_N := \frac{X}{(T_N, I_N, F_N)} = \left\{ \frac{X}{(T_N(p), I_N(p), F_N(p))} \mid p \in X \right\} \quad (2.18)$$

dengan T_N, I_N , dan F_N adalah \mathcal{N} -fungsi pada X yang berturut-turut disebut *fungsi keanggotaan kebenaran negatif*, *fungsi keanggotaan ketidakpastian negatif*, dan *fungsi keanggotaan kesalahan negatif* pada X .

Catat bahwa untuk setiap \mathcal{N} -struktur neutrosodik X_N pada X memenuhi syarat untuk setiap $p \in X$, maka $-3 \leq T_N(p) + I_N(p) + F_N(p) \leq 0$.

Definisi 2.22 (Jun dkk., 2017). \mathcal{N} -struktur neutrosodik X_N pada BCK/BCI-aljabar X disebut \mathcal{N} -subaljabar neutrosodik dari X jika untuk setiap p, q anggota X tiga syarat berikut dipenuhi:

$$\left(\begin{array}{l} T_N(p * q) \leq \max\{T_N(p), T_N(q)\} \\ I_N(p * q) \geq \min\{I_N(p), I_N(q)\} \\ F_N(p * q) \leq \max\{F_N(p), F_N(q)\} \end{array} \right). \quad (2.19)$$

Definisi 2.23 (Jun dkk., 2017). \mathcal{N} -struktur neutrosodik X_N pada BCK/BCI-aljabar X disebut \mathcal{N} -ideal neutrosodik dari X jika untuk setiap p anggota X memenuhi syarat

$$(T_N(0) \leq T_N(p), I_N(0) \geq I_N(p), F_N(0) \leq F_N(p)), \quad (2.20)$$

dan untuk setiap p, q anggota X tiga syarat berikut dipenuhi

$$\begin{pmatrix} T_N(p) \leq \max\{T_N(p * q), T_N(q)\} \\ I_N(p) \geq \min\{I_N(p * q), I_N(q)\} \\ F_N(p) \leq \max\{F_N(p * q), F_N(q)\} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk selanjutnya, X menyatakan BCK-aljabar kecuali ada ketentuan khusus.

Definisi 3.1. X_N \mathcal{N} -struktur neutrosodik pada X disebut \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X untuk setiap p anggota X memenuhi syarat

$$(T_N(0) \leq T_N(p), I_N(0) \geq I_N(p), F_N(0) \leq F_N(p)), \quad (3.1)$$

dan untuk setiap p, q, r anggota X tiga syarat berikut dipenuhi

$$\begin{pmatrix} T_N(p) \leq \max\{T_N(p * (q * p) * r), T_N(r)\} \\ I_N(p) \geq \min\{I_N(p * (q * p) * r), I_N(r)\} \\ F_N(p) \leq \max\{F_N(p * (q * p) * r), F_N(r)\} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Contoh 3.2. Perhatikan BCK-aljabar $X = \{0,1,2,3,4\}$ dengan tabel Cayley pada Tabel 3.

\mathcal{N} -struktur neutrosodik

$$X_N = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \overline{(-0.7, -0.1, -0.6)}, \overline{(-0.7, -0.1, -0.6)} \\ 2 \\ \overline{(-0.7, -0.1, -0.6)}, \overline{(-0.3, -0.6, -0.4)} \\ 4 \\ \overline{(-0.5, -0.4, -0.2)} \end{array} \right\}$$

pada X merupakan \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X .

Tabel 2. Tabel Cayley untuk operasi biner " $*$ ".

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
2	2	1	0	1	1
3	3	3	3	0	3
4	4	4	4	4	0

Teorema 3.3. Setiap \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik merupakan \mathcal{N} -ideal neutrosodik.

Bukti. Misalkan X_N \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X . Substitusi $r = q$ dan $q = p$ pada (3.2), didapat

$$\begin{aligned} T_N(p) &\leq \max\{T_N(p * (p * p) * q), T_N(q)\}, \\ I_N(p) &\geq \min\{I_N(p * (p * p) * q), I_N(q)\}, \\ F_N(p) &\leq \max\{F_N(p * (p * p) * q), F_N(q)\}, \end{aligned}$$

Untuk semua $p, q \in X$ dengan aksioma (III) dan Proposisi 2.2, didapat

$$\begin{aligned} T_N(p) &\leq \max\{T_N(p * q), T_N(q)\}, \\ I_N(p) &\geq \min\{I_N(p * q), I_N(q)\}, \\ F_N(p) &\leq \max\{F_N(p * q), F_N(q)\}. \end{aligned}$$

Maka X_N merupakan \mathcal{N} -ideal neutrosodik dari X . \square

Kebalikan dari Teorema 3.3 tidak selalu benar seperti yang terlihat pada contoh berikut:

Contoh 3.4. Perhatikan BCK-aljabar $X = \{0,1,2,3,4\}$ dengan tabel Cayley pada Tabel 4. Misalkan

$$X_N = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \overline{(\xi_T^1, 0, \xi_F^1)}, \overline{(\xi_T^1, 0, \xi_F^1)}, \overline{(\xi_T^2, 0, \xi_F^1)}, \overline{(\xi_T^3, \xi_I, \xi_F^2)} \\ 4 \\ \overline{(\xi_T^3, \xi_I, \xi_F^2)} \end{array} \right\}$$

\mathcal{N} -struktur pada X di mana $\xi_T^1 < \xi_T^2 < \xi_T^3$ berada pada $[-1,0]$, $\xi_I \in [-1,0)$ dan $\xi_F^1 < \xi_F^2$ berada pada $[-1,0]$. Maka X_N adalah \mathcal{N} -ideal neutrosodik dari X , tetapi bukan \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X , karena $I_N(1) \not\geq \min\{I_N((1 * (3 * 1)) * 2), I_N(2)\}$.

Pada Teorema berikut dapat dilihat bahwa kebalikan dari Teorema 3.3 juga berlaku di BCK-aljabar implikatif.

Tabel 4. Tabel Cayley untuk operasi biner " $*$ ".

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0
2	2	2	0	0	0
3	3	3	3	0	0
4	4	3	4	1	0

Teorema 3.5. Jika X BCK-aljabar implikatif, maka setiap \mathcal{N} -ideal neutrosodik adalah \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik.

Bukti. Misalkan \mathcal{N} -ideal neutrosodik X_N pada X . Dengan substitusi $q = r$ pada (2.21), didapat

$$\begin{aligned} T_N(p) &\leq \max\{T_N(p * r), T_N(r)\}, \\ I_N(p) &\geq \min\{I_N(p * r), I_N(r)\}, \\ F_N(p) &\leq \max\{F_N(p * r), F_N(r)\}. \end{aligned}$$

Karena X implikatif, maka $(p * r) = p, \forall p, r \in X$.

$$\begin{aligned} T_N(p) &\leq \max\{T_N(x * (y * x) * z), T_N(r)\}, \\ I_N(p) &\geq \min\{I_N(x * (y * x) * z), I_N(r)\}, \\ F_N(p) &\leq \max\{F_N(x * (y * x) * z), F_N(r)\}, \end{aligned}$$

untuk semua $p, q \in X$. Maka X_N merupakan \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik X . \square

Misalkan X_N \mathcal{N} -struktur neutrosodik pada X dan $\alpha, \beta, \gamma \in [-1,0]$. Perhatikan himpunan berikut:

$$\begin{aligned} T_N^\alpha &:= \{p \in X \mid T_N(p) \leq \alpha\}, \\ I_N^\beta &:= \{p \in X \mid I_N(p) \leq \beta\}, \\ F_N^\gamma &:= \{p \in X \mid F_N(p) \leq \gamma\}. \end{aligned}$$

Himpunan

$$X_N(\alpha, \beta, \gamma) := \{p \in X \mid T_N(p) \leq \alpha, I_N(p) \leq \beta, F_N(p) \leq \gamma\}$$

disebut *himpunan level-* (α, β, γ) dari X_N (Jun dkk., 2017). Catat bahwa

$$X_N(\alpha, \beta, \gamma) = T_N^\alpha \cap I_N^\beta \cap F_N^\gamma.$$

Teorema 3.6. Jika X_N \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X , maka $T_N^\alpha, I_N^\beta, F_N^\gamma$ adalah ideal implikatif dari X untuk semua $\alpha, \beta, \gamma \in [-1, 0]$ merupakan himpunan tak-kosong.

Bukti. Asumsikan $T_N^\alpha, I_N^\beta, F_N^\gamma$ himpunan tak-kosong untuk setiap $\alpha, \beta, \gamma \in [-1, 0]$. Maka $p \in T_N^\alpha, q \in I_N^\beta$, dan $r \in F_N^\gamma$ untuk $p, q, r \in X$. Jadi $T_N(0) \leq T_N(p) \leq \alpha$, $I_N(0) \geq I_N(p) \geq \beta$, $F_N(0) \leq F_N(p) \leq \gamma$, dan $0 \in T_N^\alpha \cap I_N^\beta \cap F_N^\gamma$. Misalkan $(p * (q * p)) * r \in T_N^\alpha$ dan $r \in T_N^\alpha$. Maka $T_N((p * (q * p)) * r) \leq \alpha$ dan $T_N(r) \leq \alpha$, yang menunjukkan bahwa

$$T_N(p) \leq \max\{T_N((p * (q * p)) * r), T_N(r)\} \leq \alpha,$$

sehingga didapat $p \in T_N^\alpha$. Misalkan $(x * (y * x)) * z \in I_N^\beta$ dan $z \in I_N^\beta$. Maka $I_N((x * (y * x)) * z) \geq \beta$ dan $I_N(z) \geq \beta$, sehingga

$$I_N(x) \geq \min\{I_N((x * (y * x)) * z), I_N(z)\} \geq \beta,$$

yaitu, $x \in I_N^\beta$. Jika $(a * (b * a)) * c \in F_N^\gamma$ dan $c \in F_N^\gamma$, maka $F_N((a * (b * a)) * c) \leq \gamma$ dan $F_N(c) \leq \gamma$. Jadi

$$F_N(a) \leq \max\{F_N((a * (b * a)) * c), F_N(c)\} \leq \gamma,$$

sehingga didapat $c \in F_N^\gamma$. Karena itu, terbukti T_N^α, I_N^β , dan F_N^γ merupakan ideal implikatif pada X . \square

Akibat 3.7. Misalkan X_N \mathcal{N} -struktur neutrosodik pada X dan $\alpha, \beta, \gamma \in [-1, 0]$. Jika X_N \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X , maka himpunan level- (α, β, γ) tak-kosong dari X_N merupakan ideal implikatif dari X .

Bukti. Misalkan X_N \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X dan $\alpha, \beta, \gamma \in [-1, 0]$. Berdasarkan Teorema 3.6, himpunan tak-kosong $T_N^\alpha, I_N^\beta, F_N^\gamma$ adalah ideal implikatif dari X . Jelas bahwa $X_N(\alpha, \beta, \gamma) = T_N^\alpha \cap I_N^\beta \cap F_N^\gamma$ merupakan ideal implikatif dari X . \square

Lemma 3.8 (Jun dkk., 2017). Untuk semua \mathcal{N} -ideal neutrosodik X_N dari X dengan p, q merupakan anggota X , memenuhi syarat berikut:

$$(p \leq q \Rightarrow T_N(p) \leq T_N(q), I_N(p) \geq I_N(q), F_N(p) \leq F_N(q)). \quad (3.3)$$

Bukti. Misalkan $p, q \in X$ dengan $p \leq q$. Maka $p * q = 0$ pada (2.21) dan didapat

$$\begin{aligned} T_N(p) &\leq \max\{T_N(0), T_N(q)\}, \\ I_N(p) &\geq \min\{I_N(0), I_N(q)\}, \\ F_N(p) &\leq \max\{F_N(0), F_N(q)\}. \end{aligned}$$

Karena $T_N(0) \leq T_N(q)$, $I_N(0) \geq I_N(q)$, dan $F_N(0) \leq F_N(q)$ berdasarkan (2.20), sehingga $T_N(p) \leq T_N(q)$, $I_N(p) \geq I_N(q)$, $F_N(p) \leq F_N(q)$ untuk setiap $p \leq q$. \square

Syarat \mathcal{N} -ideal neutrosodik untuk menjadi \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dituangkan dalam teorema berikut:

Teorema 3.9. Misalkan X_N \mathcal{N} -ideal neutrosodik pada X . Tiga pernyataan berikut ekuivalen:

- (1) X_N merupakan \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X
- (2) Untuk setiap p, q anggota X , berlaku tiga petidaksamaan berikut:

$$\begin{pmatrix} T_N(p) \leq T_N(p * (q * p)), \\ I_N(p) \geq I_N(p * (q * p)), \\ F_N(p) \leq F_N(p * (q * p)) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

- (3) Untuk setiap p, q anggota X , berlaku tiga persamaan berikut:

$$\begin{pmatrix} T_N(p) = T_N(p * (q * p)), \\ I_N(p) = I_N(p * (q * p)), \\ F_N(p) = F_N(p * (q * p)) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Bukti. ((1) \Rightarrow (2)) Asumsikan X_N \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X . Substitusi $r = 0$ pada (3.2) menghasilkan

$$\begin{aligned} T_N(p) &\leq \max\{T_N(p * (q * p) * 0), T_N(0)\}, \\ I_N(p) &\geq \min\{I_N(p * (q * p) * 0), I_N(0)\}, \\ F_N(p) &\leq \max\{F_N(p * (q * p) * 0), F_N(0)\}. \end{aligned}$$

Berdasarkan Proposisi 2.2, didapat

$$\begin{aligned} T_N(p) &\leq \max\{T_N(p * (q * p)), T_N(0)\}, \\ I_N(p) &\geq \min\{I_N(p * (q * p)), I_N(0)\}, \\ F_N(p) &\leq \max\{F_N(p * (q * p)), F_N(0)\}. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan (3.1) diperoleh pernyataan bahwa $\forall p, q \in X$

$$\begin{aligned} T_N(p) &\leq T_N(p * (q * p)), \\ I_N(p) &\geq I_N(p * (q * p)), \\ F_N(p) &\leq F_N(p * (q * p)). \end{aligned}$$

((2) \Rightarrow (3)) Misalkan X_N \mathcal{N} -ideal neutrosodik dari X dan memenuhi (3.4). Dengan definisi pengurutan \leq dan Proposisi 2.2 diketahui bahwa $p * (p * q) \leq p$ berlaku untuk semua $p, q \in X$ dan dengan Lemma 3.8, didapat $\forall p, q \in X$

$$\begin{aligned} T_N(p) &\geq T_N(p * (q * p)), \\ I_N(p) &\leq I_N(p * (q * p)), \\ F_N(p) &\geq F_N(p * (q * p)). \end{aligned}$$

Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa

$$(\forall p, q \in X) \begin{pmatrix} T_N(p) = T_N(p * (q * p)), \\ I_N(p) = I_N(p * (q * p)), \\ F_N(p) = F_N(p * (q * p)) \end{pmatrix}.$$

((3) \Rightarrow (1)) Misalkan X_N \mathcal{N} -ideal neutrosodik dari X dan memenuhi (3.5) pada (2.21), diperoleh

$$\begin{aligned} T_N(p * (q * p)) &\leq \max\{T_N(p * (q * p) * r), T_N(r)\}, \\ I_N(p * (q * p)) &\geq \min\{I_N(p * (q * p) * r), I_N(r)\}, \\ F_N(p * (q * p)) &\leq \max\{F_N(p * (q * p) * r), F_N(r)\}, \end{aligned}$$

untuk semua $p, q, r \in X$. Berdasarkan Definisi 2.22 dapat dinyatakan bahwa X_N merupakan \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X . \square

Lemma 3.10 (Jun dkk., 2017). Misalkan X_N \mathcal{N} -struktur neutrosodik pada X dan asumsikan T_N^α, I_N^β , dan F_N^γ ideal dari X untuk semua $\alpha, \beta, \gamma \in [-1, 0]$. Maka X_N merupakan \mathcal{N} -ideal neutrosodik dari X .

Bukti. Jika ada $a, b, c \in X$ sehingga $T_N(0) > T_N(a)$, $I_N(0) < I_N(b)$, dan $F_N(0) > F_N(c)$, maka $T_N(0) > a_i \geq T_N(a)$, $I_N(0) < b_u \leq I_N(b)$, dan $F_N(0) > c_e \geq F_N(c)$ untuk suatu $a_i, c_e \in [-1, 0]$ dan $b_u \in (-1, 0]$. Maka $0 \notin T_N^{a_i}$, $0 \notin I_N^{b_u}$, dan $0 \notin F_N^{c_e}$. Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $T_N^{a_i}, I_N^{b_u}$, dan $F_N^{c_e}$ adalah ideal dari X . Oleh karena itu, $T_N(0) \leq T_N(p)$, $I_N(0) \geq I_N(p)$, dan $F_N(0) \leq F_N(p)$ untuk semua $p \in X$. Asumsikan ada $a_i, b_i, a_u, b_u, a_e, b_e \in X$ sedemikian hingga

$$\begin{aligned} T_N(a_i) &> \max\{T_N(a_i * b_i), T_N(b_i)\}, \\ I_N(a_u) &< \min\{I_N(a_u * b_u), I_N(b_u)\}, \\ F_N(a_e) &> \max\{F_N(a_e * b_e), F_N(b_e)\}. \end{aligned}$$

Maka terdapat $s_i, s_e \in [-1, 0]$ dan $s_u \in (-1, 0]$ dengan

$$\begin{aligned} T_N(a_i) &> s_i \geq \max\{T_N(a_i * b_i), T_N(b_i)\}, \\ I_N(a_u) &< s_u \leq \min\{I_N(a_u * b_u), I_N(b_u)\}, \\ F_N(a_e) &> s_e \geq \max\{F_N(a_e * b_e), F_N(b_e)\}. \end{aligned}$$

Akibatnya, $a_i * b_i \in T_N^{s_i}$, $b_i \in T_N^{s_i}$, $a_u * b_u \in I_N^{s_u}$, $b_u \in I_N^{s_u}$, $a_e * b_e \in F_N^{s_e}$, dan $b_e \in F_N^{s_e}$. Akan tetapi, $a_i \notin T_N^{s_i}$, $a_u \notin I_N^{s_u}$, dan $a_e \notin F_N^{s_e}$. Hal ini bertentangan dengan fakta bahwa $a_i \in T_N^{s_i}$, $a_u \in I_N^{s_u}$, dan $a_e \in F_N^{s_e}$ sebab $T_N^{s_i}, I_N^{s_u}$, dan $F_N^{s_e}$ merupakan ideal dari X . Jadi,

$$\begin{aligned} T_N(p) &\leq \max\{T_N(p * q), T_N(q)\}, \\ I_N(p) &\geq \min\{I_N(p * q), I_N(q)\}, \\ F_N(p) &\leq \max\{F_N(p * q), F_N(q)\}. \end{aligned}$$

untuk semua $p, q, r \in X$. Karena itu, X_N merupakan \mathcal{N} -ideal neutrosodik dari X . \square

Teorema 3.11 Misalkan X_N \mathcal{N} -struktur neutrosodik pada X dan asumsikan T_N^α, I_N^β , dan F_N^γ ideal implikatif dari X untuk setiap $\alpha, \beta, \gamma \in [-1, 0]$. Maka X_N merupakan \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X .

Bukti. Misalkan T_N^α, I_N^β , dan F_N^γ ideal implikatif dari X . Berdasarkan Lemma 2.15, maka T_N^α, I_N^β , dan F_N^γ merupakan ideal dari X . Oleh karena itu, dengan Lemma 3.10, X_N merupakan \mathcal{N} -ideal neutrosodik pada X . Misalkan $p, q \in X$ dan $\alpha, \beta, \gamma \in [-1, 0]$ sehingga $T_N(p * (q * p)) = \alpha$, $I_N(p * (q * p)) = \beta$, dan $F_N(p * (q * p)) = \gamma$. Maka $p * (q * p) \in T_N^\alpha \cap I_N^\beta \cap F_N^\gamma$. Karena $T_N^\alpha \cap I_N^\beta \cap F_N^\gamma$ merupakan ideal implikatif dari X , dengan Lemma 2.15 dan $x \in T_N^\alpha \cap I_N^\beta \cap F_N^\gamma$, maka didapat

$$\begin{aligned} T_N(p) &\leq \alpha = T_N(p * (q * p)), \\ I_N(p) &\geq \beta = I_N(p * (q * p)), \\ F_N(p) &\leq \gamma = F_N(p * (q * p)). \end{aligned}$$

Oleh karena itu, terbukti X_N merupakan \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X berdasarkan Teorema 3.9. \square

Untuk sebarang bilangan tetap $\xi_T, \xi_F \in [-1, 0]$, $\xi_I \in (-1, 0]$ dan subhimpunan tak-kosong G , didefinisikan X_N^G sebagai \mathcal{N} -struktur neutrosodik pada X dengan struktur

$$X_N^G := \frac{X}{(T_N^G, I_N^G, F_N^G)} = \left\{ \frac{x}{(T_N^G(p), I_N^G(p), F_N^G(p))} \mid p \in X \right\}, \quad (3.6)$$

di mana T_N^G, I_N^G , dan F_N^G sebagai \mathcal{N} -fungsi pada X yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} T_N^G: X &\rightarrow [-1, 0], \quad p \mapsto \begin{cases} \xi_T & \text{jika } p \in G, \\ 0 & \text{jika } p \notin G, \end{cases} \\ I_N^G: X &\rightarrow [-1, 0], \quad p \mapsto \begin{cases} \xi_I & \text{jika } p \in G, \\ -1 & \text{jika } p \notin G, \end{cases} \\ F_N^G: X &\rightarrow [-1, 0], \quad p \mapsto \begin{cases} \xi_F & \text{jika } p \in G, \\ 0 & \text{jika } p \notin G. \end{cases} \end{aligned}$$

Misalkan X_N^G \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X . Berdasarkan Teorema 3.6 didapat $(T_N^G)^{\frac{\xi_T}{2}} = G$, $(I_N^G)^{\frac{\xi_I}{2}} = G$, dan $(F_N^G)^{\frac{\xi_F}{2}} = G$ merupakan ideal implikatif dari X . Jadi, G adalah ideal implikatif dari X . Sekarang asumsikan bahwa G ideal implikatif dari X . Maka $0 \in G$, sehingga $T_N^G(0) = \xi_T \leq T_N^G(p)$, $I_N^G(0) = \xi_I \geq I_N^G(p)$, dan $F_N^G(0) = \xi_F \leq F_N^G(p)$ untuk setiap $p \in X$. Untuk sebarang $p, q, r \in X$, perhatikan empat kasus berikut:

- Kasus 1. $(p * (q * p)) * r \in G$ dan $r \in G$,
- Kasus 2. $(p * (q * p)) * r \in G$ dan $r \notin G$,
- Kasus 3. $(p * (q * p)) * r \notin G$ dan $r \in G$,

Kasus 4. $(p * (q * p)) * r \notin G$ dan $r \notin G$.

Kasus 1 mengakibatkan $p \in G$, sehingga

$$\begin{aligned} T_N^G(p) &= T_N^G((p * (q * p)) * r) = T_N^G(r) = \xi_T, \\ I_N^G(p) &= I_N^G((p * (q * p)) * r) = I_N^G(r) = \xi_I, \\ F_N^G(p) &= F_N^G((p * (q * p)) * r) = F_N^G(r) = \xi_F. \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} T_N^G(p) &\leq \max\{T_N^G((p * (q * p)) * r), T_N^G(r)\}, \\ I_N^G(p) &\geq \min\{I_N^G((p * (q * p)) * r), I_N^G(r)\}, \\ F_N^G(p) &\leq \max\{F_N^G((p * (q * p)) * r), F_N^G(r)\}. \end{aligned}$$

Jika Kasus 2 benar, maka $T_N^G(r) = 0$, $I_N^G(r) = -1$, dan $F_N^G(r) = 0$. Jadi

$$\begin{aligned} T_N^G(p) &\leq 0 = \max\{T_N^G((p * (q * p)) * r), T_N^G(r)\}, \\ I_N^G(p) &\geq -1 = \min\{I_N^G((p * (q * p)) * r), I_N^G(r)\}, \\ F_N^G(p) &\leq 0 = \max\{F_N^G((p * (q * p)) * r), F_N^G(r)\}. \end{aligned}$$

Jika Kasus 3 benar, maka $T_N^G((p * (q * p)) * r) = 0$, $I_N^G((p * (q * p)) * r) = -1$, dan $F_N^G((p * (q * p)) * r) = 0$. Karena itu,

$$\begin{aligned} T_N^G(p) &\leq 0 = \max\{T_N^G((p * (q * p)) * r), T_N^G(r)\}, \\ I_N^G(p) &\geq -1 = \min\{I_N^G((p * (q * p)) * r), I_N^G(r)\}, \\ F_N^G(p) &\leq 0 = \max\{F_N^G((p * (q * p)) * r), F_N^G(r)\}. \end{aligned}$$

Untuk Kasus 4, jelaslah bahwa

$$\begin{aligned} T_N^G(p) &\leq \max\{T_N^G((p * (q * p)) * r), T_N^G(r)\}, \\ I_N^G(p) &\geq \min\{I_N^G((p * (q * p)) * r), I_N^G(r)\}, \\ F_N^G(p) &\leq \max\{F_N^G((p * (q * p)) * r), F_N^G(r)\}. \end{aligned}$$

Jadi, X_N^G merupakan \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X . Oleh karena itu, didapatkan teorema berikut:

Teorema 3.12. Misalkan G subhimpunan tak-kosong dari X . Maka X_N^G \mathcal{N} -struktur neutrosodik pada X merupakan \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X jika dan hanya jika G merupakan ideal implikatif dari X .

Definisi relasi $(=, \leq, =)$ antara \mathcal{N} -struktur neutrosodik X_N dan X_M pada X sebagai berikut:

$$X_N(=, \leq, =)X_M \Leftrightarrow (\forall p \in X) \begin{pmatrix} T_N(p) = T_M(p), \\ I_N(p) \leq I_M(p), \\ F_N(p) = F_M(p) \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Misalkan

$$X_N := \frac{X}{(T_N, I_N, F_N)} = \left\{ \frac{X}{(T_N(p), I_N(p), F_N(p))} \mid p \in X \right\}$$

dan

$$X_M := \frac{X}{(T_M, I_M, F_M)} = \left\{ \frac{X}{(T_M(p), I_M(p), F_M(p))} \mid p \in X \right\}$$

merupakan \mathcal{N} -ideal neutrosodik dari X sehingga memenuhi $X_N(=, \leq, =)X_M$, dan asumsikan X_N merupakan \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X . Maka berdasarkan Teorema 3.6, T_N^α , I_N^β , dan F_N^γ merupakan ideal implikatif dari X untuk semua $\alpha, \beta, \gamma \in [-1, 0]$. Syarat $X_N(=, \leq, =)X_M$ menunjukkan bahwa $T_N^\alpha = T_M^\alpha$, $I_N^\beta \subseteq I_M^\beta$, dan $F_N^\gamma = F_M^\gamma$. Dengan Lemma 2.19, didapat bahwa T_N^α , I_N^β , dan F_N^γ merupakan ideal implikatif dari X untuk semua $\alpha, \beta, \gamma \in [-1, 0]$. Oleh karena itu, X_M merupakan \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X berdasarkan Teorema 3.11. Dengan demikian didapatkan teorema berikut:

Teorema 3.13 (Meng dan Jun, 1994). Misalkan

$$X_N := \frac{X}{(T_N, I_N, F_N)} = \left\{ \frac{X}{(T_N(p), I_N(p), F_N(p))} \mid p \in X \right\}$$

dan

$$X_M := \frac{X}{(T_M, I_M, F_M)} = \left\{ \frac{X}{(T_M(p), I_M(p), F_M(p))} \mid p \in X \right\}$$

\mathcal{N} -ideal neutrosodik dari X yang memenuhi $X_N(=, \leq, =)X_M$. Jika X_N merupakan \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X , maka begitu juga X_M .

Karakterisasi BCK -aljabar implikatif dengan menggunakan \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik ditunjukkan sebagai berikut.

Lemma 3.14 (Meng dan Jun, 1994). BCK -aljabar X implikatif jika dan hanya jika semua ideal dari X merupakan ideal implikatif dari X .

Bukti. (\Rightarrow) Misalkan I ideal dari X , dan misalkan $(p * (q * p)) * r \in I$, $r \in I$. Harus ditunjukkan bahwa $p \in I$. Karena X implikatif, $p * (q * p) = p$, sehingga $p * r \in I$. Akibatnya, karena I Ideal dan $r \in I$, pastilah $p \in I$. Jadi I implikatif.

(\Leftarrow) Jelaslah $\{0\}$ ideal, dan karenanya merupakan ideal implikatif. Berdasarkan Lemma 2.16, didapat bahwa $\{0\}$ merupakan ideal implikatif positif. Dengan substitusi $q = (p * (q * p))$ pada sistem di Lemma 2.18, maka didapat $A(p * (q * p))$ merupakan ideal, dan juga merupakan implikatif. Kemudian, karena $p * (q * p) \in A(p * (q * p))$ didapat $p \in A(p * (q * p))$, oleh karena itu $p \leq p * (q * p)$. Kebalikan dari pertidaksamaan tersebut jelas benar, sehingga

$p = p * (q * p)$. Hal ini menunjukkan bahwa X merupakan BCK -aljabar implikatif. \square

Teorema 3.15. BCK -aljabar X adalah implikatif jika dan hanya jika semua \mathcal{N} -ideal neutrosodik dari X merupakan \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X .

Bukti. (\Rightarrow) Asumsikan bahwa BCK -aljabar X implikatif. Berdasarkan Lemma 3.14, semua ideal dari X adalah implikatif. Misalkan X_N \mathcal{N} -ideal neutrosodik dari X . Maka T_N^α , I_N^β , dan F_N^γ merupakan ideal dari X untuk semua $\alpha, \beta, \gamma \in [-1, 0]$ oleh Jun dkk. (2017), sehingga dengan Lemma 3.14, T_N^α , I_N^β , dan F_N^γ merupakan ideal implikatif dari X untuk semua $\alpha, \beta, \gamma \in [-1, 0]$. Berdasarkan Teorema 3.11, X_N merupakan \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X . (\Leftarrow) Misalkan X BCK -aljabar di mana setiap \mathcal{N} -ideal neutrosodik adalah \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik. Untuk sebarang ideal A dari X , definisikan \mathcal{N} -struktur neutrosodik X_N pada X sebagai berikut:

$$T_N: X \rightarrow [-1, 0], \quad p \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{jika } p \in A, \\ 0 & \text{jika } p \notin A. \end{cases}$$

$$I_N: X \rightarrow [-1, 0], \quad p \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{jika } p \in A, \\ -1 & \text{jika } p \notin A. \end{cases}$$

dan

$$F_N: X \rightarrow [-1, 0], \quad p \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{jika } p \in A, \\ 0 & \text{jika } p \notin A. \end{cases}$$

Dapat dilihat bahwa X_N merupakan \mathcal{N} -ideal neutrosodik dari X . Berdasarkan hipotesis, X_N merupakan \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X . Berdasarkan Teorema 3.6, $T_N^{-\frac{1}{2}} = A$, $I_N^{-\frac{1}{2}} = A$, dan $F_N^{-\frac{1}{2}} = A$ merupakan ideal implikatif dari X , sehingga A ideal implikatif dari X . Kemudian asumsikan bahwa A ideal implikatif dari X . Maka didapat $0 \in A$ dan $T_N(0) = -\frac{1}{2} \leq T_N(p)$, $I_N(0) = -\frac{1}{2} \geq I_N(p)$, dan $F_N(0) = -\frac{1}{2} \leq F_N(p)$ untuk setiap $p \in X$. Untuk sebarang $p, q, r \in X$, perhatikan empat kasus berikut:
 Kasus 1. $(p * q) \in A$ dan $q \in A$,
 Kasus 2. $(p * q) \in A$ dan $q \notin A$,
 Kasus 3. $(p * q) \notin A$ dan $q \in A$,
 Kasus 4. $(p * q) \notin A$ dan $q \notin A$.
 Kasus 1 menunjukkan bahwa $p \in A$, sehingga

$$T_N(p) = T_N(p * q) = T_N(q) = -\frac{1}{2},$$

$$I_N(p) = I_N(p * q) = I_N(q) = -\frac{1}{2},$$

$$F_N(p) = F_N(p * q) = F_N(q) = -\frac{1}{2}.$$

Jadi

$$T_N(p) \leq \max\{T_N(p * q), T_N(q)\},$$

$$I_N(p) \geq \min\{I_N(p * q), I_N(q)\},$$

$$F_N(p) \leq \max\{F_N(p * q), F_N(q)\}.$$

Jika Kasus 2 benar, maka $T_N(q) = 0$, $I_N(q) = -1$, dan $F_N(q) = 0$. Karena itu,

$$T_N(p) \leq 0 = \max\{T_N(p * q), T_N(q)\},$$

$$I_N(p) \geq -1 = \min\{I_N(p * q), I_N(q)\},$$

$$F_N(p) \leq 0 = \max\{F_N(p * q), F_N(q)\}.$$

Jika Kasus 3 benar, maka $T_N(p * q) = 0$, $I_N(p * q) = -1$, dan $F_N(p * q) = 0$. Akibatnya,

$$T_N(p) \leq 0 = \max\{T_N(p * q), T_N(q)\},$$

$$I_N(p) \geq -1 = \min\{I_N(p * q), I_N(q)\},$$

$$F_N(p) \leq 0 = \max\{F_N(p * q), F_N(q)\}.$$

Untuk Kasus 4,

$$T_N(p) \leq \max\{T_N(p * q), T_N(q)\},$$

$$I_N(p) \geq \min\{I_N(p * q), I_N(q)\},$$

$$F_N(p) \leq \max\{F_N(p * q), F_N(q)\}.$$

$T_N = I_N = F_N$. Oleh karena itu, X merupakan BCK -aljabar implikatif berdasarkan Lemma 3.14. \square

PENUTUP

SIMPULAN

Dengan menggunakan konsep \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik telah dikonstruksi karakterisasi BCK -aljabar implikatif berdasarkan \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik. Hasil dari konstruksi yaitu, BCK -aljabar X adalah implikatif jika dan hanya jika semua \mathcal{N} -ideal neutrosodik dari X merupakan \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X . Untuk syarat perlu, alat utama yang berperan adalah pernyataan bahwa BCK -aljabar X implikatif jika dan hanya jika semua ideal dari X merupakan ideal implikatif dari X yang terbukti pada Lemma 3.14 dan pernyataan bahwa jika X_N \mathcal{N} -struktur neutrosodik pada X dan asumsi $T_N^\alpha, I_N^\beta, F_N^\gamma$ ideal implikatif dari X untuk setiap $\alpha, \beta, \gamma \in [-1, 0]$, maka X_N merupakan \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X pada Teorema 3.11. Dan untuk syarat cukup, alat utama yang berperan adalah pernyataan bahwa BCK -aljabar X implikatif jika dan hanya jika semua ideal dari X merupakan ideal implikatif dari X yang terbukti pada Lemma 3.14 dan jika X_N \mathcal{N} -ideal implikatif neutrosodik dari X , maka $T_N^\alpha, I_N^\beta, F_N^\gamma$ adalah ideal implikatif dari X untuk semua $\alpha, \beta, \gamma \in [-1, 0]$ merupakan himpunan tak-kosong pada Teorema 3.6.

SARAN

J. Pure Appl. Math. 24(3) 287–297.

Untuk memperkaya pengetahuan tentang *BCK*-aljabar, perlu diselidiki hubungan antara \mathcal{N} -struktur neutrosodik dan \mathcal{N} -ideal implikatif positif neutrosodik.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih disampaikan kepada Profesor Muhiuddin dari Universitas Tabuk, Saudi Arabia atas bantuan untuk melengkapi bukti beberapa lemma dan teorema penting sehingga penulis dapat memahami isi artikel beliau sebagai sumber utama artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

- G. Muhiuddin, S. J. Kim, dan Y. B. Jun. (2019). Implicative \mathcal{N} -ideal of BCK-algebras based on neutrosophic \mathcal{N} -structure. doi:10.1142/S1793830919500113.
- G. Muhiuddin. G. Muhiuddin's Notes: Ideals in BCK-algebra.
- K. Iseki. (1965). Algebraic formulations of propositional calculi. Proc. Japan Acad., 41, 803-807.
- K. Iséki. (1966). An algebra related with a propositional calculus. Proc. Japan Acad., 42, 26–29.
- K. Iseki dan S. Tanaka. (1976). Ideal Theory of BCK-Algebra. Math. Japon. 21, 351-366.
- Y. S. Huang. (2006). BCI-Algebra. Beijing: Science Press.
- Y. B. Jun, K. J. Lee dan S. Z. Song. (2009). \mathcal{N} -ideals of BCK/BCI-algebras. J. Chungcheong Math. Soc. 22, 417–437.
- Y. B. Jun, F. Smarandache dan H. Bordbar. (2017). Neutrosophic \mathcal{N} -structures applied to BCK/BCI-algebras. Information 8 (2017) 128, doi:10.3390/info8040128.
- M. Khan, S. Amis, F. Smarandache dan Y. B. Jun. (2017). Neutrosophic \mathcal{N} -structures and Their Applications in Semigroups. Ann. Fuzzy Math. Inform. 14(6), 583–598.
- J. Meng dan Y. B. Jun. (1994). BCK-Algebras. Seoul:Kyungmoon Sa Co.
- S. Z. Song, F. Smarandache dan Y. B. Jun. (2017). Neutrosophic commutative \mathcal{N} -ideals in BCK-algebras. Information 8(4), 130.
- F. Smarandache. (1999). A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic. Neutrosophy, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability. USA:American Research Press, Rehoboth, NM.
- F. Smarandache. (2005). Neutrosophic set – A generalization of the intuitionistic fuzzy set. Int.