MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 10 No 01
Tahun 2022

BILANGAN KETERHUBUNGAN TITIK PELANGI KUAT PADA GRAF

Muhammad Afifuddin
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
email: muhammadafifuddin.18040@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
Penulis Korespondensi: ketutbudayasa@gmail.com

Abstrak

Graf G dikatakan terhubung titik pelangi jika setiap dua titik di G dihubungkan oleh suatu lintasan yang titik-titik internalnya memiliki warna yang berbeda, lintasan seperti itu disebut lintasan pelangi. Bilangan keterhubungan titik pelangi dari graf terhubung G, dilambangkan dengan $rvc(G)$ merupakan banyaknya warna terkecil yang diperlukan untuk membuat G terhubung titik pelangi. Graf G dikatakan terhubungan titik pelangi kuat jika untuk setiap dua titik u dan v berbeda di G ada sebuah lintasan pelangi terpendek antara u dan v, dilambangkan dengan $srvc(G)$. Amati bahwa $rvc(G) \leq srvc(G)$ untuk sembarang graf terhubung tak trivial G. Jika G graf terhubung dengan n titik dan $n \geq 3$, maka $0 \leq srvc(G) \leq n-2$. Lebih jauh, batas-batas ini "tajam". Misalkan $n \geq 4$ dengan $diam(G) = 1$, maka $G = K_n$ sehingga $srvc(G) = 0 < n-2$. Perhatikan bahwa banyak titik internal P_n adalah $n-2$. Pikirkan sebuah pewarnaan titik W pada P_n sedemikian hingga semua titik internal P_n mendapat warna berbeda dan warnai titik-titik terminal P_n dengan salah satu warna titik internal. Jelas terhadap pewarnaan W lintasan P_n terhubung titik pelangi kuat dengan $(n-2)$ warna, sehingga $srvc(P_n) = n-2$. Dalam artikel ini, akan dibahas bilangan keterhubungan titik pelangi kuat pada graf komplet, graf roda, dan graf lintasan. Graf komplet K_n adalah satu-satunya kelas graf yang mencapai batas bawah $srvc(G)$ dan graf lintasan P_n adalah satu-satunya kelas graf yang mencapai batas atas $srvc(G)$.

Kata Kunci: Pewarnaan titik, keterhubugan titik pelangi, bilangan keterhubungan titik pelangi kuat, graf komplet, graf lintasan.

Abstract

A graph G is said to be rainbow vertex connected if every two vertices in G are connected by a path whose internal vertices have different colors, such a path is called a rainbow path. The rainbow vertex connectedness number of connected graph G, denoted by $rvc(G)$ is the smallest number of colors needed to make G rainbow vertex connected. A graph G is said to be strongly rainbow-connected if for every two distinct vertices u and v in G there is a shortest rainbow path between u and v, denoted by $srvc(G)$. Observe that $rvc(G) \leq srvc(G)$ for any nontrivially connected graph G. If G graph is connected with n vertices and $n \geq 3$, then $0 \leq srvc(G) \leq n-2$. Furthermore, these boundaries are "sharp". Suppose $n \geq 4$ with $diam(G) = 1$, then $G = K_n$ so that $srvc(G) = 0 < n-2$. Note that P_n's internal number of points is $n-2$. Think of a W point coloring on P_n such that all P_n's internal points get a different color and color the P_n terminal points with one of the internal point colors. It is clear that with respect to the W coloring, the P_n path is connected to a strong rainbow vertex with $(n-2)$ colors, so that $srvc(P_n) = n-2$. In this article, we will discuss the number of strong rainbow vertex connectedness in complete graphs, wheel graphs, and path graphs. The complete graph K_n is the only graph class that reaches the lower limit of $srvc(G)$ and the path graph P_n is the only graph class that reaches the upper limit of $srvc(G)$.

Keywords: *Vertex coloring, rainbow vertex connectedness, strong rainbow vertex connectedness number, complete graph, path graph.*

1. PENDAHULUAN

Hingga saat ini, segala bidang ilmu pengetahuan terus mengalami kemajuan. Matematika menjadi ilmu yang mengalami perkembangan yang sangat berguna untuk menyelesaikan masalah-masalah yang terus berkembang seiring dengan berjalannya waktu. Teori graf merupakan bagian dari cabang ilmu matematika yaitu matematika diskrit yang dapat membantu menyatakan atau menggambarkan permasalahan agar lebih mudah dimengerti dan kemudian dapat dengan mudah diselesaikan.

Teori graf dikenalkan oleh Leonhard Euler, serorang ilmuan yang menyelesaikan permasalahan jembatan Konigsberg di Rusia. Permasalah Jembatan Konigsberg adalah mungkin tidaknya melewati tujuh jembatan yang ada dengan setiap jembatan hanya dilewati tepat satu kali (Budayasa, 2007).

Akan menjadi suatu yang menarik, mengaitkan antara keterhubungan dan pewarnaan pada suatu graf. Dimana sebuah graf dikatakan terhubung jika dua titik pada graf dihubungkan oleh sebuah lintasan. Begitu juga dengan konsep pewarnaan sisi maupun pewarnaan titik pada graf mempunyai terapan yang luas.

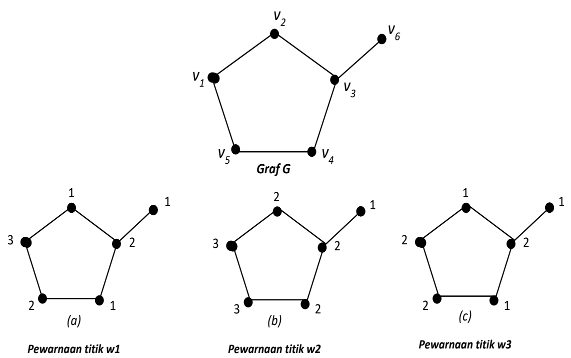
Graf G dikatakan terhubung titik pelangi jika setiap dua titik G dihubungkan oleh sebuah lintasan pelangi, yaitu sebuah lintasan yang semua titik internalnya berwarna berbeda. Beberapa konsep keterhubungan pelangi telah banyak dikembangkan dalam menyelesaikan beberapa masalah, misalnya Keterhubungan pelangi pada graf merupakan salah satu pengembangan konsep pewarnaan sisi yang diperkenalkan oleh G. Chartrand, G. L. Johns, K. A. McKeon dan P. Zhang pada tahun 2006. Ditemukannya konsep ini akibat kelemahan pengiriman informasi agen pemerintahan keamanan dalam negeri Amerika Serikat. Pengembangan terus dilakukan salah satunya oleh Krivelevich dan Yuster yang mendefinisikan varian alami pada graf pewarnaan titik. Lintasan dalam graf adalah lintasan titik pelangi jika semua simpul internalnya memiliki warna yang berbeda. Uchiawa dkk (2011) memperkenalkan konsep terhubung total pelangi, jika setiap dua titik $x, y \in V(G)$ dengan setiap sisi dan setiap titik diberi warna yang berbeda, lintasan tersebut dinamakan lintasan total pelangi. Dari beberapa konsep tersebut, penulis menjadikannya sebagai rujukan penyusunan makalah untuk dipubikasikan.

2. KAJIAN TEORI

Definisi 2.1:

Misalkan G graf terhubung. Graf G dikatakan terhubung titik pelangi jika setiap dua titik G dihubungkan oleh sebuah lintasan pelangi, yaitu sebuah lintasan yang semua titik internalnya berwarna berbeda.

Contoh 2.1:



Gambar 1

Perhatikan graf G pada Gambar 1. G adalah graf terhubung.

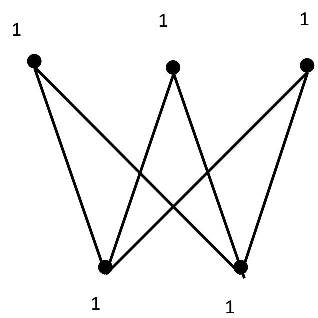
a. Terhadap pewarnaan titik w_1, G terhubung titik pelangi dengan menggunakan 3 warna.
b. Terhadap pewarnaan titik w_2, G tidak terhubung titik pelangi, karena tidak ada lintasan pelangi yang menghubungkan titik v_1 dan titik v_6.
c. Terhadap pewarnaan titik w_3, G terhubung titik pelangi, dengan menggunakan 2 warna.

Definisi 2.2:

Misalkan G graf terhubung. Minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik G agar graf G terhubung titik pelangi disebut bilangan keterhubungan titik pelangi G, dilambangkan dengan $rvc(G)$.

Contoh 2.2:

Perhatikan graf G pada Gambar 1. Terhadap pewarnaan titik w_3, graf G terhubung titik pelangi dengan menggunakan 2 warna. Perhatikan bahwa tidak ada pewarnaan titik G dengan hanya satu warna membuat G terhubung titik pelangi. Sehingga dalam hal ini, $rvc(G) = 2$.



Graf $K_{3,2}$ terhubung-titik Pelangi dengan 1 warna

Gambar 2

Perhatikan Gambar 2. Sebuah pewarnaan titik pada graf bipartit komplet $K_{3,2}$ hanya dengan satu warna, yaitu dengan warna 1 dan terhadap pewarnaan tersebut $K_{3,2}$ terhubung titik pelangi. Akibatnya $rvc\ (K_{3,2}) = 1$.

Definisi 2.3:

Misalkan G graf terhubung dan $u, v \in V(G)$. Jarak titik u dan titik v pada G dilambangkan dengan $d_G(u,v)$ atau $d(u,v)$, adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan titik u dan titik v di graf G.

Diameter graf G, dilambangkan dengan $diam(G)$, didefinisikan sebagai:

$$diam(G) = \max\{d(u,v) \mid u, v \in V(G)\}\{/\}$$

Contoh 2.3:

Perhatikan graf G pada Gambar 1. Mudah dicek bahwa $diam(G) = 3$. Begitu juga untuk graf bipartit $K_{3,2}$ pada Gambar 2, diperoleh $diam(K_{3,2}) = 2$.

Lemma 2.1:

Jika G graf terhubung dan tak trivial, maka

$$rvc(G) \geq diam(G) - 1$$

Bukti:

Misalkan G graf terhubung dan $diam(G) = d$. Maka ada lintasan P dengan panjang d yang menghubungkan dua titk u dan v di graf G. Karena panjang lintasan P adalah d , maka banyak titik internal P adalah $d - 1$.

Pikirkan sebuah pewarnaan titik W pada G sedemikian hingga G terhubung titik pelangi terhadap pewarnaan W, P harus merupakan lintasan pelangi. Artinya, semua titik internal P harus berwarna berbeda. Sehingga, berdasarkan Definisi 2.2,

$$\begin{aligned} rvc\ (G) &\geq d - 1 \\ &= diam(G) - 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian, Lemma terbukti. ■

Definisi 2.4:

Misalkan G graf terhubung dan tak trivial. Sebuah pewarnaan titik pelangi kuat graf G dikatakan terhubung titik pelangi kuat jika untuk setiap dua titik u dan v berbeda di G ada sebuah lintasan pelangi terpendek antara u dan v. Minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik G agar graf G terhubung titik pelangi kuat dari graf G, dilambangkan dengan $srvc\ (G)$.

Lemma 2.2:

Jika G graf terhubung dan tak trivial, maka

$$srvc\ (G) \geq rvc\ (G).$$

Bukti:

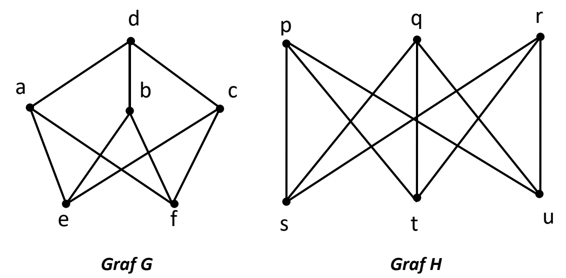
Misalkan G graf terhubung dan tak trivial. Perhatikan sebuah pewarnaan titik W pada G jika terhadap pewarnaan W, graf G terhubung-titik pelangi kuat, maka graf G juga terhubung-titik pelangi. Sehingga berdasarkan Definisi 2.2 dan Definisi 2.4, diperoleh

$$rvc\ (G) \leq srvc\ (G)$$

Dengan demikian bukti Lemma lengkap. ■

Definisi 2.5:

Dua graf G dan H dikatakan isomorfik, ditulis $G \cong H$, jika terdapat fungsi bijektif $f : V(G) \to V(H)$ sedemikian hingga $u, v \in V(G)$ jika dan hanya jika $f\ u\ , f(v) \in V(H)$ berhubungan langsung. Misal pada gambar 3, graf G isomorfik dengan graf H.



Gambar 3

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari definisi dan lemma yang sudah disebutkan, akan dijabarkan beberapa teorema dan lemma pada bagian ini. Menggunakan Lemma 2.1 dan Lemma 2.2, diperoleh teorema berikut.

Teorema 3.1:

Jika G graf terhubung dan tak trivial,maka

$$diam(G) \leq rvc\ (G) \leq srvc\ (G)$$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 2.1, diperoleh

$$rvc\ (G) \geq diam(G) - 1 \qquad \ldots (1)$$

Dari Lemma 2.2, didapat

$$rvc\ (G) \leq srvc(G) \qquad \ldots (2)$$

Dari (1) dan (2), diisimpulkan

$$diam(G) - 1 \leq rvc(G) \leq srvc(G)$$

Teorema terbukti. ■

Lemma 3.2:

Misalkan graf G terhubung dan tak trivial

a. $srvc(G) = 0$ jhj G graf komplet
b. $srvc(G) = 1$ jhj $diam(G) = 2$

Bukti:

a. (⇒)

Jika $srvc(G) = 0$, berdasarkan Teorema 3.1,

$$diam(G) - 1 \leq 0$$

Ekuivalen dengan

$$diam(G) \leq 1 \qquad \cdots (1)$$

Karena G terhubung dan tak trivial, maka

$$diam(G) \geq 1 \qquad \cdots (2)$$

Dari (1) dan (2), diperoleh

$$diam(G) = 1$$

Ini berarti, setiap dua titik G berhubungan langsung. Akibatnya, G graf komplet. □

(⇐)

G graf komplet, maka setiap dua titik G berhubungan langsung. Berdasarkan Definisi 2.3,

$$diam(G) = 1$$

Berdasarkan Teorema 3.1, diperoleh

$$srvc(G) \geq diam(G) - 1 = 1 - 1 = 0 \qquad \cdots (1)$$

Berdasarkan Definisi 2.4,

$$srvc(G) \leq 0 \qquad \cdots (2)$$

Dari (1) dan (2), diperoleh $srvc(G) = 0$ □

b. (⇒)

Karena $srvc(G) = 1$, maka berdasarkan pembuktian pada Teorema 3.1,

$$diam(G) - 1 \leq 1$$

Ekuivalen dengan,

$$diam(G) \leq 2 \qquad \cdots (1)$$

Karena $srvc(G) = 1$, berdasarkan (a), G bukan graf komplet. Selanjutnya, karena G graf terhubung dan bukan graf komplet, maka $diam(G) > 1$. Karena $diam(G)$ bilangan bulat, maka

$$diam(G) \geq 2 \qquad \cdots (2)$$

Dari (1) dan (2) disimpulkan $diam(G) = 2$ □

(⇐)

Misalkan $diam(G) = 2$. Berdasarkan Definisi 2.3, setiap dua titik dihubungkan oleh sebuah lintasan panjang maksimum 2 dan ada sebuah lintasan P di G dengan panjang 2. Sehingga lintasan P memiliki hanya satu titik internal, sehingga ada pewarnaan titik W pada G dengan satu warna sedemikian hingga terhadap W, graf G terhubung titik pelangi sehingga berdasarkan Definisi 2.4,

$$srvc(G) \leq 1 \qquad \cdots (1)$$

Karena $diam(G) = 2$, maka G bukan graf komplet, sehingga berdasarkan (a),

$$srvc(G) \geq 1 \qquad \cdots (2)$$

Dari (1) dan (2), disimpulkan $srvc(G) = 1$ ■

Lemma 3.3:

a. Jika graf multipartit komplet $K_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ dengan $n_i \geq 2$ untuk suatu i, $1 \leq i \leq k$, maka

$$srvc(K_{n_1,n_2,\dots,n_k}) = 1$$

b. Jika W_n graf roda dengan $n+1$ titik dengan $n \geq 3$, maka

$$srvc(W_n) = \begin{cases} 0, & jika\ n = 3 \\ 1, & jika\ n \geq 4 \end{cases}$$

c. Jika P_n adalah lintasan dengan n titik dan $n \geq 2$, maka

$$srvc(P_n) = n - 2$$

Bukti:

a. Misalkan $u, v \in V(K_{n_1,n_2,\dots,n_k})$ dengan $u \neq v$. Jika titik u dan titik v terletak pada partisi yang berbeda, maka u dan v berhubungan langsung, sehingga

$$d(u,v) = 1 \qquad \cdots (1)$$

Jika titik u dan titik v terletak pada partisi yang sama, katakan partisi i dengan $1 \leq i \leq k$, maka ada titik w di partisi j dengan $j \neq i$ sedemikian hingga u berhubungan langsung dengan w dan v berhubungan langsung dengan w. Karena u dan v tidak berhubungan langsung, maka (u, w, v) adalah sebuah lintasan terpendek dengan panjang 2. Akibatnya,

$$d(u,v) = 2 \qquad \cdots (2)$$

Dari (1) dan (2) dan Definisi 2.3, diperoleh

$$diam(K_{n_1,n_2,\dots,n_k}) = 2$$

Berdasarkan Lemma 3.2(b), disimpulkan

$$srvc(K_{n_1,n_2,\dots,n_k}) = 1$$

b. Misalkan u titik pusat W_n dan sikel $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ pembentuk roda W_n. Jika $n = 3$, maka $W_3 \cong K_4$, sehingga berdasarkan Lemma 3.2(a),

$$srvc(W_3) = srvc(K_4) = 0$$

Misalkan $n \geq 4$ dan x, y dua titik berbeda di roda W_n. Jika $x = v$ dan y pada sikel C_n, maka x dan y berhubungan langsung, sehingga

$$d(x,y) = 1 \qquad \cdots (1)$$

Jika x dan y terletak pada C_n, maka ada dua kemungkinan,

Kemungkinan pertama, x dan y behubungan langsung, maka

$$d(x,y) = 1 \qquad \cdots (2)$$

Kemungkinan kedua, x dan y tidak berhubungan langsung, maka (x, v, y) adalah sebuah lintasan terpendek pada W_n dengan panjang 2, sehingga

$$d(x,y) = 2 \qquad \cdots (3)$$

Dari (1), (2), (3) dan Definisi 2.3, disimpulkan

$$diam(W_n) = 2$$

Berdasarkan Lemma 3.2(b), diperoleh untuk $n \geq 4$,

$$srvc(W_n) = 1$$

c. Panjang lintasan P_n adalah $n-1$, sehingga
$$diam(P_n) = n-1$$
Berdasarkan Teorema 3.1,
$$srvc(P_n) \geq (n-1) - 1 = n-2 \quad \cdots (1)$$
Perhatikan bahwa banyak titik internal P_n adalah $n-2$. Pikirkan sebuah pewarnaan titik W pada P_n sedemikian hingga semua titik internal P_n mendapat warna berbeda dan warnai titik-titik terminal P_n dengan salah satu warna titik internal. Jelas terhadap pewarnaan W lintasan P_n terhubung titik pelangi kuat dengan $(n-2)$ warna. Berdasarkan Definisi 2.4,
$$srvc(P_n) \leq n-2 \qquad \cdots (2)$$
Dari (1) dan (2), disimpulkan,
$$srvc(P_n) = n-2$$
Dengan demikian, bukti lemma lengkap. ■

Lemma 3.4:

Misalkan G graf terhubung dan $u, v \in V(G)$. Jika $d(u,v) \geq diam(G) - 1$, maka tidak ada lintasan terpendek pada G yang memuat u dan v sebagai titik internalnya.

Bukti:

Andaikan ada lintasan terpendek P dari titik x ke titik y pada graf G yang memuat u dan v sebagai titik internalnya. Maka
$$\begin{aligned} d_G(x,y) &= d_G(x,u) + d_G(u,v) + d_G(v,y) \\ &\geq 1 + (diam(G) - 1) + 1 \\ &= diam(G) + 1 \end{aligned}$$
Pengandaian tersebut kontradiksi dengan definisi diameter G. ■

Teorema 3.5:

Jika G graf terhubung dengan n titik dan $n \geq 3$, maka $0 \leq srvc(G) \leq n-2$. Lebih jauh, batas-batas ini "tajam".

Bukti:

a. Untuk $n = 3$, karena G terhubung (dan sederhana), maka ada dua kemungkinan graf G, yaitu $G = K_3$ atau $G = P_3$

Jika $G = K_3$, berdasarkan Lemma 3.2 (a),
$$srvc(G) = srvc(K_3) = 0 < 3 - 2 = n-2$$
Jadi $G = K_3$ memenuhi teorema. □

Jika $G = P_3$, berdasarkan Lemma 3.3 (c),
$$srvc(G) = srvc(P_3) = 1 = n-2$$
Jadi $G = P_3$ juga memenuhi teorema. □

b. Selanjutnya, misalkan $n \geq 4$. Jika $diam(G) = 1$, maka $G = K_n$, sehingga berdasarkan Lemma 3.2(a),
$$srvc(G) = 0 < n-2$$
Bukti teorema benar. □

Jika $diam(G) = 2$, maka berdasarkan Lemma 3.2(b),
$$srvc(G) = 1 < n-2$$
Bukti teorema benar. □

Misalkan $diam(G) = k \geq 3$

Misalkan $u, v \in V(G)$ dengan $d(u,v) = k$ dan $P = (u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = v)$ sebuah lintasan terpendek dari u ke v di G dengan panjang k.

Pikirkan sebuah pewarnaan titik W pada graf G dengan menggunakan $n-2$ warna sebagai berikut:

1) Warnai titik u dan titik x_{k-1} dengan warna 1, atau $W(u) = W(x_{k-1}) = 1$
2) Warnai titik $v = x_k$ dan titik x_1 dengan warna 2, atau $W(v) = W(x_1) = 2$
3) Warnai $(n-4)$ titik G yang lain dengan menggunakan $(n-4)$ warna berbeda, yaitu himpunan warna $\{3, 4, \dots, n-2\}$.

Perhatikan bahwa ada sebanyak $n-2$ warna yang digunakan untuk mewarnai semua titik G. Karena $d_G(u, x_{k-1}) = k - 1 = diam(G) - 1$, maka berdasarkan Lemma 3.4, tidak ada lintasan terpendek pada G yang memuat u dan x_{k-1} sebagai titik internalnya.

Demikian juga, karena $d_G(x_1, v) = k - 1 = diam(G) - 1$, maka tidak ada lintasan terpendek pada G yang memuat x_1 dan v sebagai titik internalnya. Akibatnya, setiap lintasan terpendek yang menghubungkan dua titik G, terhadap pewarnaan W, pasti merupakan lintasan pelangi. Karena banyak warna dalam pewarnaan titik W adalah $n-2$, maka berdasarkan Definisi 2.4,
$$0 \leq srvc(G) \leq n-2$$
Batas bawah dalam teorema dicapai, jika $G = K_n$ (Lemma 3.2(a)), dan batas atas dalam teorema dicapai jika $G = P_n$ (Lemma 3.3 (c)). Dengan demikian, bukti teorema lengkap. ■

Lemma 3.6:

Misalkan G graf terhubung dengan n titik dan $n \geq 3$. Jika G bukan lintasan, maka
$$srvc(G) \leq n-3$$

Bukti:

Untuk $n = 3$, karena G terhubung (dan sederhana) dan bukan lintasan, maka $G = K_3$. Berdasarkan Lemma 3.2 (a),
$$srvc(G) = srvc(K_3) = 0 = n-3$$
Lemma benar. □

Untuk $n \geq 4$, misalkan $diam(G) = k$. Ditinjau dua kasus berdasarkan derajat minimum G, $\delta(G)$.

a. **Kasus 1**: $\delta(G) \geq 2$

Karena $\delta(G) \geq 2$, maka $\forall v \in V(G), d_G(v) \geq 2$.

1) Untuk $n = 4$ atau $n = 5$,

$$diam(G) = k \leq 2$$

Sehingga berdasarkan Lemma 3.2,

$$srvc(G) \leq 1 \leq n - 3$$

Lemma dipenuhi oleh graf G. □

2) Misalkan $n \geq 6$.

- Jika $k = 1$, maka $G = K_n$, berdasarkan Lemma 3.2 (a),

$$srvc(G) = 0 < n - 3$$

Lemma benar. □

- Jika $k = 2$, maka berdasarkan Lemma 3.2 (b),

$$srvc(G) = 1 \leq n - 3$$

Lemma benar. □

- Misalkan $diam(G) = k \geq 3$.

Misalkan $u, v \in V(G)$, $d_G(u, v) = k$ dan $P = (u = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = v)$ sebuah lintasan terpendek dari u ke v di G dengan panjang k. Karena $\delta(G) \geq 2$, maka ada titik $u' \neq x_1$ di G berhubungan langsung dengan titik u dan ada titik $v' \neq x_{k-1}$ di G berhubungan langsung dengan titik v. Selanjutnya, dicek apakah terdapat sebuah lintasan terpendek di G yang memuat titik u' dan titik x_{k-1} sebagai titik-titik internalnya, atau memuat x_1 dan v' sebagai titik-titik internalnya. Jika G mempunyai lintasan terpendek tersebut, pilih satu, katakan lintasan dari y_1 ke y_2 memuat u' dan x_{k-1} sebagai titik-titik internalnya. Perhatikan bahwa y_1 berhubungan langsung dengan u' dan y_2 berhubungan langsung dengan x_{k-1}. Selanjutnya ditinjau empat subkasus.

Subkasus 1.1: $y_1 \neq u$ dan $y_2 = v$.

Karena P sebuah lintasan terpendek di G,

$$\begin{aligned} d_G(x_1, v) &= d_G(u, v) - d_G(u, x_1) \\ &\geq k - 1 = diam(G) - 1 \end{aligned}$$

Sehingga berdasarkan Lemma 3.4, tidak ada lintasan terpendek di G yang memuat x_1 dan v sebagai titik internalnya.

Perhatikan bahwa,

$$d_G(u, v') + d_G(v', v) \geq d_G(u, v) = k$$

Maka

$$d_G(u, v') \geq k - 1 = diam(G) - 1$$

Berdasarkan Lemma 3.4, tidak ada lintasan terpendek di G yang memuat titik u dan v' sebagai titik-titik internalnya. Demikian juga,

$$d_G(x_{k-1}, u') + d_G(u', u) \geq k - 1$$

Atau

$$d_G(x_{k-1}, u') + 1 \geq k - 1$$

Ekuivalen dengan

$$d_G(x_{k-1}, u') \geq k - 2$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} d_G(y_1, x_{k-1}) &= d_G(y_1, u') + d_G(u', x_{k-1}) \\ &\geq 1 + (k - 2) \\ &= k - 1 \end{aligned}$$

Berdasarkan Lemma 3.4, tidak ada lintasan terpendek di G yang memuat titik y_1 dan x_{k-1} sebagai titik-titik internalnya. Selanjutnya, konstruksi sebuah pewarnaan titik W_1 pada graf G sebagai berikut:

i. $W_1(u) = W_1(v') = 1;$
ii. $W_1(v) = W_1(x_1) = 2;$
iii. $W_1(y_1) = W_1(x_{k-1}) = 3;$
iv. Warnai $(n - 6)$ titik-titik G yang lain dengan warna-warna berbeda yaitu warna-warna $4, 5, 6, \dots, n - 3$.

Perhatikan bahwa, terhadap pewarnaan titik W_1 graf G terhubung titik pelangi kuat dengan menggunakan $(n - 3)$ warna. Berdasarkan Definisi 2.4, $srvc(G) \leq n - 3$.□

Subkasus 1.2: $y_1 \neq u$ dan $y_2 \neq v$.

Dalam hal ini,

$$\begin{aligned} d_G(y_1, x_{k-1}) &\geq d_G(y_1, u') + d_G(u', u) \\ &\quad + d_G(u, x_{k-1}) \\ &= 1 + 1 + (k - 1) \\ &= k + 1 \\ &> k - 1 = diam(G) - 1 \end{aligned}$$

Berdasarkan Lemma 3.4, tidak ada lintasan terpendek di G yang memuat y_1 dan x_{k-1} sebagai titik-titik internalnya.

Karena

$$d_G(u, y_2) + d_G(y_2, x_{k-1}) \geq d_G(u, x_{k-1})$$

dan

$$d_G(y_2, x_{k-1}) = 1;\ d_G(u, x_{k-1}) = k - 1$$

Maka

$$d_G(u, y_2) \geq k - 2$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} d_G(u', y_2) &= d_G(u', u) + d_G(u, y_2) \\ &\geq 1 + (k - 2) \\ &= k - 1 \\ &= diam(G) - 1 \end{aligned}$$

Akibatnya, berdasarkan Lemma 3.4, tidak ada lintasan terpendek di G yang memuat u' dan y_2 sebagai titik-titik internalnya. Karena $d_G(u,v) = k \geq k-1$, maka tidak ada lintasan terpendek di G yang memuat u dan v sebagai titik-titik internalnya.

Konstruksi pewarnaan titik W_2 pada graf G sebagai berikut:

i. $W_2(u') = W_2(y_2) = 1$;
ii. $W_2(y_1) = W_2(x_{k-1}) = 2$;
iii. $W_2(u) = W_2(v) = 3$;
iv. Warnai $n-6$ titik G yang lain dengan warna-warna berbeda yaitu dengan warna-warna $4, 5, \ldots, n-3$.

Terhadap W_2 graf G terhubung titik pelangi kuat dengan $n-3$ warna. Akibatnya, berdasarkan Definisi 2.4, $srvc(G) \leq n-3$. □

Subkasus 1.3: $y_1 = u$ dan $y_2 \neq v$.

Mudah ditunjukkan, bahwa

$$d_G(u, x_{k-1}) \geq k-1;$$
$$d_G(y_2, x_1) \geq k-1;$$
$$d_G(u', v) \geq k-1;$$

Berdasarkan Lemma 3.4, tidak ada lintasan terpendek di G yang memuat:

a) u dan x_{k-1} sebagai titik-titik internalnya, atau
b) y_2 dan x_1 sebagai titik-titik internalnya, atau
c) u' dan v sebagai titik-titik internalnya.

Konstruksi pewarnaan titik W_3 pada G sebagai berikut.

i. $W_3(u') = W_3(v) = 1$;
ii. $W_3(u) = W_3(x_{k-1}) = 2$;
iii. $W_3(x_1) = W_3(y_2) = 3$;
iv. Warnai himpunan titik-titik yang lain dengan himpunan warna $\{4, 5, \ldots, n-3\}$.

Terhadap pewarnaan W_3 graf G terhubung titik pelangi kuat dengan $n-3$ warna, sehingga berdasarkan Definisi 2.4, $srvc(G) \leq n-3$. □

Subkasus 1.4: $y_1 = u$ dan $y_2 = v$.

Dalam hal ini, konstruksi pewarnaan titik W_4 pada G sebagai berikut:

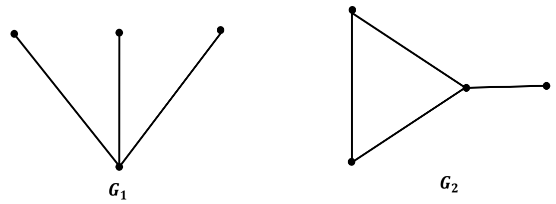
i. $W_4(u) = W_4(v) = 1$;
ii. $W_4(u') = W_4(x_{k-1}) = 2$;
iii. $W_4(x_1) = W_4(v') = 3$;
iv. Warnai himpunan titik-titik yang lain dengan $(n-6)$ warna yang berbeda yaitu $\{4, 5, \ldots, n-3\}$.

Dapat ditunjukkan, terhadap pewarnaan W_4 graf G terhubung titik pelangi kuat dengan $n-3$ warna. Sehingga berdasarkan Definisi 2.4, $srvc(G) \leq n-3$.□

b. **Kasus 2:** $\delta(G) = 1$

Karena $\delta(G) = 1$, maka ada $v \in V(G)$ demikian $d(v) = 1$. Selanjutnya titik v dengan $d(v) = 1$ disebut titik terminal (titik "pendant"). Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $srvc(G) \leq n-3$ dengan menggunakan induksi pada n.

Untuk $n = 4$, maka ada dua kemungkinan graf G, yaitu $G = G_1$ dan $G = G_2$ dimana G_1 dan G_2



Gambar 4

seperti Gambar 4 berikut:

Perhatikan bahwa,

$$diam(G) = diam(G_1) = diam(G_2)$$

Sehingga berdasarkan Lemma 3.2(b),

$$srvc(G) = 1 \leq n-3$$

Jadi untuk $n = 4$, pernyataan dalam teorema benar.

Asumsikan pernyataan benar untuk graf H dengan kurang dari n titik. Misalkan graf G mempunyai n titik dan v sebuah titik terminal G. Titik terminal v dipilih sedemikian hingga graf $H = G - 1$ bukan lintasan. Karena graf H terhubung, bukan lintasan dan banyak titik $n-1$. Selanjutnya ditinjau dua subkasus.

Subkasus 2.1: $\delta(H) = 1$

Dalam hal ini, H terhubung, bukan lintasan, $|V(H)| = n-1$, dan $\delta(H) = 1$. Sehingga berdasarkan asumsi

$$\begin{aligned} srvc(H) &\leq |V(H)| - 3 \\ &= (n-1) - 3 \\ &= n-4 \end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.4, ada pewarnaan titik W pada graf H dengan menggunakan $n-4$ warna sedemikian hingga terhadap W graf H terhubung titik pelangi kuat. Selanjutnya, perluas pewarnaan titik W pada H ke pewarnaan titik W_1 pada graf G dengan mewarnai titik v dengan sebuah warna "baru" yang tidak ada dalam pewarnaan W. Jelas terhadap W_1 graf G terhubung titik pelangi kuat dengan menggunakan $(n-4)+1=n-3$ warna. Berdasarkan Definisi 2.4, $srvc(G) \leq n-3$. □

Subkasus 2.2: $\delta(H) \geq 2$.

Berdasarkan Kasus 1,

$$srvc(H) \leq |V(H)| - 3 = n - 4$$

Berdasarkan Definisi 2.4, ada pewarnaan titik W pada H dengan $n-4$ warna sedemikian hingga H terhubung titik pelangi kuat.

Seperti Subkasus 2.1, ada pewarnaan titik W_1 pada G dengan $n-3$ warna sedemikian hingga G terhubung titik pelangi kuat. Sehingga, berdasarkan Definisi 2.4,

$$srvc(G) \leq n-3$$

Dengan demikian, bukti lemma lengkap. ■

Dari Lemma 3.3 dan Lemma 3.6, diperoleh teorema berikut.

Teorema 3.7:

Misalkan G graf terhubung dengan n titik dan $n \geq 3$. $srvc(G) = n-2$ jika dan hanya jika $G \cong P_n$.

Bukti:

(=>)

Berdasarkan Lemma 3.6, jika $G \ncong P_n$ maka

$$srvc(G) \leq n-3.$$

(<=)

Jika G isomorfik dengan lintasan P_n, berdasarkan Lemma 3.3(c),

$$srvc(G) = n-2.$$

Teorema terbukti. ■

4. PENUTUP

SIMPULAN

Dari pembahasan dapat disimpulkan:

1) Jika G graf terhubung dan tak trivial, diperoleh $diam(G) - 1 \leq rvc(G) \leq srvc(G)$.
2) $srvc(K_{n_1,n_2,\dots,n_k}) = 1$.
3) $srvc(W_n) = \begin{cases} 0, & jika\ n = 3 \\ 1, & jika\ n \geq 4 \end{cases}$
4) $srvc(P_n) = n-2$.
5) $srvc(G) = 0$ jhj G graf komplet.
6) Jika G graf terhubung dengan n titik dan $n \geq 3$, maka $0 \leq srvc(G) \leq n-2$
7) Graf komplet K_n adalah satu-satunya kelas graf yang mencapai batas bawah $srvc(G)$.
8) Graf lintasan P_n adalah satu-satunya kelas graf yang mencapai batas atas $srvc(G)$.

SARAN

Dengan ditulisnya artikel ini diharapkan untuk para akademisi dapat mengembangkan ilmu matematika yang berhubungan dengan teori graf dan berkaitan dengan bilangan keterhubungan titik pelangi. Ada kemungkinan batas atas dan batas bawah juga ditemukan pada graf yang lain selain dari graf yang disebutkan dalam artikel ini.

5. DAFTAR PUSTAKA

Li, X., Mao, Y., & Shi, Y. (2014). The strong rainbow vertex-connection of graphs. Utilitas Mathematica, 93, 213–223.

A Bondy, USR Murty, Graph Theory, GTM 244, Springer, 2008.

G. Chartrand, P. Zhang: Introduction to Graph Theory. McGraw-Hill, Boston, 2005.

Budayasa, I. K. (2007). Teori Graph dan Aplikasinya (I. K. Budayasa (ed.)). Unesa University Press

Chartrand, G. L. (2008). Rainbow Connection in Graph. Mathematica Bohemica, 85-98.

Yuliani, W. (2018). Bilangan Keterhubunngan Pelangi Pada Graf Roda dan Graf Kubik. Jurnal Matematika UNAND, 72-79.

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2010). Graphs & digraphs. In Graphs and Digraphs.

Mladenović, P. (2019). *Graph Theory: Part 2*. *15*, 127–140. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00831-4_9

Heggernes, P., Issac, D., Lauri, J., Lima, P. T., & Van Leeuwen, E. J. (2018). Rainbow vertex coloring bipartite graphs and chordal graphs. *Leibniz International Proceedings in Informatics, LIPIcs*, *117*(83), 1–13. https://doi.org/10.4230/LIPIcs.MFCS.2018.83

Liu, H., Mestre, Â., & Sousa, T. (2013). Rainbow vertex k-connection in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, *161*(16–17), 2549–2555. https://doi.org/10.1016/j.dam.2013.04.025

L. Chen, X. Li, Y. Shi, The complexity of determining the rainbow vertex-connection of a graph, Theoret. Comput. Sci. 412(2011), 4531–4535.

X. Li, Y. Shi, On the rainbow vertex-connection, arXiv:1012.3504 [math.CO] 2010

G. Chartrand, G.L. Johns, K.A. McKeon, P. Zhang, Rainbow connection in graphs, Math. Bohem. 133(2008), 85-98.