

ANALISIS DINAMIK MODEL PREDATOR-PREY DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE II DAN EFEK KETAKUTAN

Alicia Dhea Amara

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia

e-mail: alicia.18065@mhs.unesa.ac.id

Dian Savitri

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia

Penulis Korespondensi: diansavitri@unesa.ac.id

Abstrak

Model *prey-predator* pada artikel ini mengikuti model modifikasi Leslie-Gower dengan fungsi respon tipe Holling II dan mempertimbangkan efek ketakutan. Efek ketakutan merupakan perilaku *prey* terhadap hadirnya *predator* yang dapat menurunkan laju pertumbuhan *predator*. Prosedur dalam penelitian meliputi, menentukan titik kesetimbangan, melakukan analisis kestabilan, dan mengkonfirmasi hasil analisis tersebut melalui simulasi numerik. Hasil analisis kesetimbangan dan kestabilan dari model diperoleh lima titik kesetimbangan yaitu, $E_0 = (0,0)$ adalah tidak stabil, $E_1 = (\frac{r_1}{b}, 0)$ dan $E_2 = (0, \frac{r_2 k}{a_2})$ adalah stabil asimtotik serta E_{3a} dan E_{3a} adalah stabil dengan syarat. Hasil simulasi numerik terhadap solusi sistem yang memvariasikan parameter efek ketakutan menunjukkan kesesuaian dengan hasil analisis kestabilan. Parameter efek ketakutan pada *prey* dapat mempengaruhi kondisi *prey* dan berdampak berkurangnya populasi *prey* tersebut sehingga punah.

Kata Kunci: *prey-predator*, Leslie-Gower, efek ketakutan, Holling II

Abstract

The *prey-predator* model in this article follows a modified Leslie-Gower model with a Holling type II response function and considers the effect of fear. The effect of fear is the behavior of prey to the presence of predators that can reduce the growth rate of predators. The procedures in the research include determining equilibrium, conducting stability analysis, and confirming the results of the analysis through numerical simulations. The results of the analysis and stability of the model obtained five equilibrium, namely, $E_0 = (0, 0)$ unstable $E_1 = (\frac{r_1}{b}, 0)$ & $E_2 = (0, \frac{r_2 k}{a_2})$ are asymptotically stable, E_{3a} and E_{3a} is stable. The results of numerical simulations on systems that vary the parameters of the fear effect show the results of stability analysis. The influence of fear effect on prey can affect the condition of the prey and reduce the prey population that it becomes extinct.

Keywords: *prey-predator*, Leslie-Gower, fear effect, Holling II

PENDAHULUAN

Interaksi antar individu pada habitat terbuka merupakan kejadian alami yang terjadi pada semua organisasi kehidupan. Salah satunya adalah ekosistem. Ekosistem adalah sistem ekologi yang terbentuk oleh hubungan timbal balik antara makhluk hidup dan lingkungannya (Soemawarto, 1983). Ekosistem terdiri dari dua komponen penyusun, yaitu faktor abiotik (tidak hidup) dan biotik (hidup). Makhluk hidup pada dasarnya membutuhkan interaksi dengan makhluk lainnya ataupun dengan lingkungan tempat tinggalnya (Logan dkk, 2015). Salah satu interaksi pada sistem diantaranya adalah interaksi *prey-predator*.

Dinamika hubungan antara *prey* dan *predator* sudah lama menjadi bahasan yang dominan dalam bidang ekologi dan matematika biologi (Volketigoe, 1992). Interaksi *prey-predator* adalah topik penting dalam ekologi dan biologi yang telah diselidiki oleh banyak ilmuwan selama beberapa dekade terakhir. Interaksi tersebut dapat berupa kompetisi dua populasi dan perilaku memangsa *predator* terhadap *prey*. Pemangsaan *predator* terhadap *prey* disebut predasi. Secara ekologis, resiko predasi diakui secara luas sebagai kunci yang membentuk ekologi dan proses evolusi (Abbey-Lee dkk, 2016). *Predator* memangsa *prey* untuk tumbuh dan bereproduksi.

Abrams dan Ginzburg membahas perilaku pemangsaan *predator* terhadap *prey* yang berupa fungsi respon (Abrams dkk, 2000). Selain perilaku pemangsaan, model pertumbuhan populasi dan perilaku tiap populasi juga merupakan kajian menarik dalam matematika biologi. Model matematika berperan penting untuk lebih memahami skenario kompleks kejadian tersebut.

Interaksi antara populasi *prey* dan populasi *predator* pada lingkungan umumnya dimodelkan menggunakan model pertumbuhan Lotka-Volterra (Finnizio dkk, 1982). Dalam pengembangannya, Leslie telah memodifikasi model pertumbuhan Lotka-Volterra menjadi model pertumbuhan Leslie-Gower. Kemudian Aziz dan Okiye mengembangkan model modifikasi Leslie-Gower menggunakan fungsi respon Holling tipe II pada perilaku pemangsaannya (Aziz-Aloui dkk, 2003). Model pertumbuhan Leslie-Gower dengan makanan tambahan telah dibahas (Ulfa dkk, 2018).

Berdasarkan beberapa data lapangan dan eksperimen pada *Drosophila* menunjukkan bahwa ketakutan *prey* terhadap *predator* dapat mengacaukan dinamika populasi dan meningkatkan resiko kepunahan populasi *prey*. Munculnya perilaku ketakutan *prey* dapat mengurangi reproduksi populasi *prey* (Kyle dkk, 2017). Efek ketakutan menunjukkan dapat mempengaruhi sistem *prey-predator* (Hua dkk, 2014). Melanjutkan peneliti terdahulu, Wang dkk mengkonstruksi model *prey-predator* dengan mengikuti pertumbuhan modifikasi Leslie-Gower dan menambahkan efek ketakutan pada *prey*, dimana tingkat ketakutan memainkan peran krusial pada pertumbuhan *prey* (Wang dkk, 2016). Kemudian analisis model *predator-prey* tersebut disempurnakan Tan dan menunjukkan pada kondisi tertentu muncul *limit cycle* serta bifurkasi (Wang dkk, 2020).

Berdasarkan kajian model *predator-prey* tersebut, peneliti tertarik merekonstruksi ulang model *predator-prey* yang telah dilakukan oleh pendahulu dengan mengubah sedikit model yang digunakan. Analisis dilakukan secara analitik dan secara numerik dengan bantuan *software* Matlab. Analisis yang dilakukan meliputi menentukan titik kesetimbangan, analisis kestabilan titik kesetimbangan dan simulasi numerik. Simulasi numerik diilustrasikan dengan grafik potret fase. Simulasi numerik dilakukan untuk mengkonfirmasi

kesesuaian antara perhitungan analitik dan numerik. Perubahan kestabilan terhadap titik kesetimbangan ditunjukkan oleh variasi nilai parameter efek ketakutan pada populasi *prey*. Parameter yang digunakan mengikuti parameter yang ditentukan oleh Wang dkk, dan ada parameter diasumsikan berdasarkan syarat kestabilan titik kesetimbangan.

KAJIAN TEORI

MODEL PREY-PREDATOR MODIFIKASI LESLIE-GOWER

Aziz-Alaoui dan Okiye membahas model *prey-predator* Leslie-Gower yang telah dimodifikasi:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \left(r_1 - bx - \frac{a_1 y}{x+m}\right)x, \\ \frac{dy}{dt} &= \left(r_2 - \frac{a_2 y}{x+m}\right)y,\end{aligned}\quad (1)$$

dimana $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ menyatakan populasi *prey* dan *predator* pada waktu t .

Secara umum, resiko predasi memberikan banyak pengaruh yang disebut efek konsumtif dan jenis efek ini dimodelkan oleh fungsi respon Leslie-Gower dengan $\frac{a_1 y}{x+m}$ pada persamaan pertama model (1), yang menyatakan kapasitas *predator* memangsa *prey*. Selain itu, ada efek nonkonsumtif lain yang secara tidak langsung mempengaruhi perilaku *prey*, misalnya perubahan habitat, mencari makan, kewaspadaan dan perubahan fisiologis. Modifikasi model Leslie-Gower sesuai model (1) dengan daya dukung yang tumbuh logistik juga menjadi kajian Panigoro dan Rahmi (Panigoro dkk, 2017).

EFEK KETAKUTAN

Efek ketakutan adalah perubahan fisiologis terkait perilaku dan stress karena kehadiran *predator*, sebagai *prey* yang selalu waspada terhadap kemungkinan serangan dari *predator* (Pijush dkk, 2018). Terutama pada tahun 2011, Zanette dkk. melakukan percobaan pada burung pipit (*Melospiza melodia*) selama masa perkembangbiakannya tanpa adanya predasi langsung dengan menggunakan pagar listrik dan menemukan bahwa ada 40% pengurangan jumlah keturunan karena resiko predasi (Zanette dkk, 2011). Suraci dkk memanipulasi ketakutan buatan terhadap karnivora (serigala, beruang hitam) pada mesokarnivora (rakun) dengan melakukan pengulangan selama sebulan dan menemukan bahwa rasa takut mempengaruhi perilaku mencari makan

mesokarnivora (lebih rendah 66%) dan menguntungkan *prey* mesokarnivora.

Wang dkk [2017] pertama kali mengusulkan model *prey-predator* dengan mempertimbangkan efek ketakutan pada *prey*, dan mengadopsi bentuk berikut untuk efek ketakutan $F(f, y)$:

$$F(f, y) = \frac{1}{1 + fy}. \quad (2)$$

Parameter f menyatakan tingkat ketakutan *prey* terhadap *predator* (y).

MODEL PREY - PREDATOR DENGAN EFEK KETAKUTAN

Model Wang dkk [2020], membahas efek ketakutan dengan mengikuti model pertumbuhan modifikasi Leslie-Gower.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{ax}{1 + fy} - bx^2 - \frac{a_1xy}{m + x} - dx, \\ \frac{dy}{dt} &= y \left(r - \frac{a_2y}{m + x} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Model (3) mempertimbangkan kompetisi sesama *prey* dan adanya kematian alami. Bentuk efek ketakutan pada persamaan pertama laju pertumbuhan populasi *prey* merujuk (2). Persamaan kedua model (3) yang berbentuk $\frac{a_2y}{m+x}$, menyatakan berkurangnya populasi *predator* karena kelangkaan (per kapita $\frac{y}{x}$) makanan favoritnya (Wang dkk, 2020).

Model *prey-predator* dengan efek ketakutan juga telah dibahas Savitri, dkk [2021]. Selain efek ketakutan pada *prey*, juga mempertimbangkan makanan tambahan pada predator dan mengikuti model pertumbuhan modifikasi Leslie-Gower. Hasil simulasi menunjukkan perubahan kestabilan solusi saat muncul limit cycle dan terdapat bifurkasi Hopf.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{rx}{1 + fy} - \frac{\alpha xy}{m + x + nA}, \\ \frac{dy}{dt} &= \beta y \left(1 - \frac{y}{x + k} \right) + \frac{\rho nAy}{m + x + nA}. \end{aligned} \quad (4)$$

Pada model (4), fungsi respon yang digunakan merujuk pada fungsi respon Holling tipe II (Holling, 1965) sebagai berikut:

$$p(x) = \frac{\alpha x}{m + x}. \quad (5)$$

Fungsi respon Holling tipe II pada persamaan (5), mengasumsikan *predator* membutuhkan waktu untuk mencari dan mengkonsumsi mangsanya.

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian yang digunakan pada artikel ini yaitu studi literatur. Studi literatur adalah serangkaian kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat, serta mengelolah bahan penelitian (Zed, 2008). Pada penelitian ini mengkaji model interaksi *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe II dan mempertimbangkan adanya efek ketakutan pada *prey*. Analisis yang dilakukan terdiri dari menentukan titik kesetimbangan, menentukan nilai eigen disertai dengan syarat-syarat yang harus dipenuhi agar sistem stabil, kemudian dilakukan simulasi numerik. Simulasi numerik dilakukan menggunakan bantuan *software* Matlab2014b. Berikut adalah prosedur penelitian:

1. Studi Literatur

Bagian ini diawali dengan mengkaji dari artikel dan jurnal peneliti terdahulu terkait model interaksi *prey-predator* dengan fungsi respon Holling tipe II yang mempertimbangkan adanya efek ketakutan pada *prey*.

2. Mengkonstruksi Model *Predator-Prey* dengan adanya Efek Ketakutan pada *Prey*

Pada tahap ini, peneliti mengkonstruksi model berdasarkan asumsi beberapa parameter berpengaruh pada interaksi *prey-predator*. Model yang dikonstruksi terinspirasi dari peneliti sebelumnya, yaitu kajian Wang (2016) tentang model *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe II dan menambahkan efek ketakutan pada *prey*, model Wang, dkk (2020) dengan efek ketakutan mengikuti model Leslie-Gower dan model *prey-predator* dengan efek ketakutan yang telah dibahas Savitri, dkk (2021) yang mempertimbangkan makanan tambahan pada fungsi respon Holling tipe II.

3. Menentukan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan didapatkan dengan membuat semua persamaan pada sistem sama dengan nol.

4. Analisis Kestabilan Titik

Analisis kestabilan titik kesetimbangan diawali dengan melakukan pelinearannya pada sistem dilanjutkan mencari nilai eigennya. Nilai eigen diperoleh dengan cara mensubstitusikan titik kesetimbangan pada matriks Jacobi.

5. Simulasi Numerik

Untuk mengilustrasikan perilaku kestabilan di sekitar titik kesetimbangan model diperlukan simulasi numerik. Simulasi numerik juga mengkonfirmasi kesesuaian dengan hasil analisis kestabilan. Hasil tersebut ditampilkan dalam potret fase menggunakan *software* Matlab.

HASIL DAN PEMBAHASAN

PERTUMBUHAN PADA POPULASI PREY

Kepadatan pada populasi *prey* direpresentasikan sebagai x pada waktu t . Laju pertumbuhan populasi *prey* dipengaruhi oleh tingkat pertumbuhan populasi, daya dukung lingkungan (*carrying capacity*) dan berkurang karena persaingan antar spesies dan adanya predasi *predator* terhadap *prey*. Tingkat ketakutan *prey* terhadap *predator* juga berperan dalam pertumbuhan populasi *prey*. Fungsi respon yang digunakan adalah fungsi respon Holling tipe II. Parameter r_1, b, m, a_1 , dan f berturut-turut menyatakan pertumbuhan intrinsik *prey*, persaingan antar *prey*, waktu yang dihabiskan predator dalam memangsa, nilai maksimum yang dapat dicapai oleh tingkat pengurangan x karena y , dan tingkat ketakutan *prey* terhadap *predator*. Sehingga laju pertumbuhan *prey* dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{r_1}{1 + fy} - bx - \frac{a_1 y}{x + m} \right) x \quad (6)$$

PERTUMBUHAN PADA POPULASI PREDATOR

Kepadatan populasi *predator* direpresentasikan sebagai y dengan waktu t . Laju pertumbuhan populasi *predator* dipengaruhi tingkat pertumbuhan populasi *prey*, daya dukung lingkungan dan berkurang karena kelangkaan makanan favoritnya. Parameter r_2 dan a_2 masing-masing menyatakan pertumbuhan intrinsik *predator*, dan nilai maksimum yang dapat dicapai oleh tingkat pengurangan per kapita y karena x . Bentuk $\frac{a_2 y}{x + k}$ menyatakan berkurangnya populasi *predator* karena kelangkaan makanan favoritnya (per kapita $\frac{y}{x}$), k menyatakan *carrying capacity* atau daya dukung lingkungan. Sehingga laju pertumbuhan *predator* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} = \left(r_2 - \frac{a_2 y}{x + k} \right) y \quad (7)$$

HASIL KONSTRUKSI

Berdasarkan asumsi yang telah diuraikan pada laju pertumbuhan populasi *prey* (6) dan laju pertumbuhan populasi *predator* (7), maka diperoleh model interaksi *prey-predator* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left(\frac{r_1}{1 + fy} - bx - \frac{a_1 y}{x + m} \right) x \\ \frac{dy}{dt} &= \left(r_2 - \frac{a_2 y}{x + k} \right) y \end{aligned} \quad (8)$$

Pada model (8), $x(t)$ menyatakan kepadatan populasi *prey* dan $y(t)$ menyatakan kepadatan populasi *predator*. Parameter r_1 menyatakan pertumbuhan intrinsik *prey* dan r_2 menyatakan pertumbuhan intrinsik *predator*. Laju pertumbuhan predator mempertimbangkan modifikasi Leslie-Gower dan fungsi respon Holling II, yang menyatakan bahwa populasi *predator* berkurang karena kelangkaan makanan favoritnya. Ditambah dengan asumsi efek ketakutan pada *prey* terhadap *predator* yang dapat mempengaruhi pertumbuhan kedua populasi, *prey* maupun *predator*.

Semua parameter yang digunakan dalam sistem (8) bernilai positif. Secara lengkap diuraikan dalam Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Keterangan parameter

Parameter	Keterangan
r_1	Pertumbuhan intrinsik <i>prey</i>
r_2	Pertumbuhan intrinsik <i>predator</i>
F	Tingkat ketakutan <i>prey</i> terhadap <i>predator</i>
B	Persaingan antar <i>prey</i>
a_1	Nilai maksimum yang dapat dicapai oleh tingkat pengurangan x karena y
a_2	Nilai maksimum yang dapat dicapai oleh tingkat pengurangan y karena x
m	Waktu yang dihabiskan predator dalam memangsa
k	Daya dukung lingkungan (<i>carrying capacity</i>)

TITIK KESETIMBANGAN

Titik kesetimbangan E pada persamaan (6) dan (7) didapatkan dengan menyelesaikan $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$. Sehingga dari sistem persamaan (8) diperoleh:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{r_1}{1 + fy} - bx - \frac{a_1 y}{x + m} \right) x = 0, \quad (9)$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(r_2 - \frac{a_2 y}{x + k} \right) y = 0. \quad (10)$$

Berdasarkan persamaan (9) diperoleh:

$$\left(\frac{r_1}{1+fy} - bx - \frac{a_1y}{x+m} \right) = 0, \quad (11)$$

atau

$$x = 0. \quad (12)$$

Berdasarkan persamaan (10) didapat:

$$\left(r_2 - \frac{a_2y}{x+k} \right) = 0, \quad (13)$$

atau

$$y = 0. \quad (14)$$

Ketika berlaku persamaan (12) dan (14), maka diperoleh titik kesetimbangan $E_0(0,0)$. Disaat berlaku persamaan (11) dan (14) diperoleh $E_1(\frac{r_1}{b}, 0)$.

Ketika persamaan (12) dan (13) berlaku, diperoleh $E_2(0, \frac{r_2k}{a_2})$. Kemudian ambil $x = x^*$ dimana x merupakan nilai dari titik kesetimbang x^* . Dengan menyederhanakan persamaan (13) didapatkan,

$$y^* = \frac{r_2(x^* + k)}{a_2},$$

y^* harus positif. Mengikuti Cai dkk [2015], x^* adalah solusi positif dari persamaan kubik berikut:

$$(x^*)^3 + 3\Lambda_1(x^*)^2 + 3\Lambda_2(x^*) + \Lambda_3 = 0. \quad (15)$$

Dimana:

$$\Lambda_1 = \frac{a_2bfkr_2 + a_2bfmr_2 + a_1fr_2^2 + a_2^2b}{a_2bfr_2},$$

$$\Lambda_2 = \frac{(a_2bfkmr_2 + 2a_1fkr_2^2 + a_2^2bm + a_1a_2r_2 - a_2^2r_1)}{a_2bfr_2},$$

$$\Lambda_3 = \frac{a_1fk^2r_2^2 + a_1r_2a_2k - r_1ma_2^2}{a_2bfr_2}.$$

Mengikuti transformasi $z = x^* + \Lambda_1$, maka persamaan (14) disederhanakan menjadi

$$h(z) = z^3 + 3pz + q = 0. \quad (16)$$

Dimana

$$p = \Lambda_2 - \Lambda_1^2,$$

$$q = \Lambda_3 - 3\Lambda_1\Lambda_2 + 3\Lambda_1^3.$$

Berdasarkan Cai dkk [2015], eksistensi akar positif dalam persamaan adalah sebagai berikut:

1. Jika $q < 0$, maka persamaan (16) memiliki satu akar positif
2. Jika $q > 0$ dan $p < 0$, maka:
Jika $q^2 + 4p^3 = 0$, maka persamaan (16) memiliki akar positif
Jika $q^2 + 4p^3 < 0$, maka persamaan (16) memiliki dua akar positif yang berbeda
3. Jika $q = 0$ dan $p < 0$, maka persamaan (16) memiliki akar positif

Jika persamaan (16) memiliki dua akar positif, maka akar-akarnya adalah

$$z_1 = \frac{\sqrt[3]{(-4q + 4\sqrt{4p^3 + q^2})^2 - 4p}}{2\sqrt[3]{-4q + 4\sqrt{4p^3 + q^2}}}$$

$$z_2 = -\frac{z_1}{2}$$

Jika persamaan (16) hanya memiliki satu akar positif, maka akarnya adalah

$$z_1 = \frac{\sqrt[3]{(-4q + 4\sqrt{4p^3 + q^2})^2 - 4p}}{2\sqrt[3]{-4q + 4\sqrt{4p^3 + q^2}}}$$

Berdasarkan hasil analisis, diperoleh lima titik kesetimbangan:

- 1) $E_0(0,0)$ kedua populasi *prey* dan *predator* mengalami kepunahan.
- 2) $E_1(\frac{r_1}{b}, 0)$ hanya populasi *prey* yang bertahan hidup
- 3) $E_2(0, \frac{r_2k}{a_2})$ hanya populasi *predator* yang bertahan hidup
- 4) $E^*(x^*, y^*)$ kedua populasi *prey* dan *predator* eksis.

ANALISIS KESTABILAN

Analisis kestabilan dapat ditentukan dengan melihat nilai eigen yang dihasilkan dari hasil linearisasi yang dilakukan pada sistem. Linearisasi sistem menggunakan matriks Jacobian berikut:

$$J = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Dimana

$$c_{11} = \left(-b + \frac{a_1y}{(x+m)^2} \right) x + \frac{r_1}{1+fy} - bx - \frac{a_1y}{x+m},$$

$$c_{12} = \left(-\frac{r_1f}{(fy+1)^2} - \frac{a_1}{x+m} \right) x,$$

$$c_{21} = \frac{a_2y^2}{(x+k)^2},$$

$$c_{22} = -\frac{2a_2y}{x+k} + r_2.$$

Kestabilan titik kesetimbangan $E_0(0,0)$

Substitusi $x = 0, y = 0$ ke dalam matriks Jacobi, maka:

$$J = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}.$$

Dengan menghitung $\det(\lambda I - J) = 0$ diperoleh persamaan karakteristik matriks sebagai berikut:

$$(\lambda - r_1)(\lambda - r_2) = 0.$$

Kemudian didapat nilai eigen

$$\lambda = r_1 \text{ dan } \lambda = r_2.$$

Semua nilai parameter diasumsikan positif, dari hasil perhitungan diperoleh $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 > 0$. Kedua nilai eigen bernilai positif, sehingga titik kesetimbangan pada $E_0(0,0)$ tidak stabil.

Kestabilan titik kesetimbangan pada $E_1(0, \frac{r_2 k}{a_2})$

Substitusi $x = 0, y = \frac{r_2 k}{a_2}$ ke matriks Jacobi, maka:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{r_1}{\frac{f r_2 k}{a_2} + 1} - \frac{a_1 r_2 k}{a_2 m} & 0 \\ r_2^2 + a_2 & -r_2 \end{bmatrix}.$$

Dengan $\det(\lambda I - J) = 0$ diperoleh persamaan karakteristik matriks sebagai berikut:

$$(a_1 f k^2 r_2^2 + a_2 f k \lambda m r_2 + a_1 a_2 k r_2 + a_2^2 \lambda m - a_2^2 m r_1)(\lambda + r_2).$$

Kemudian, didapatkan nilai eigen:

$$\lambda_1 = -\frac{(a_1 f k r_2^2 + a_1 a_2 k r_2 - a_2^2 m r_1)}{(f k r_2 + a_2) a_2 m}, \text{ dan } \lambda_2 = -r_2.$$

Semua nilai parameter diasumsikan positif, maka λ_2 selalu bernilai negatif. Maka, ketika nilai eigen $\lambda_1 < 0$ kesetimbangan pada E_1 stabil asimtotik atau *node*.

Kestabilan titik kesetimbangan pada $E_2(\frac{r_1}{b}, 0)$

Substitusi $x = \frac{r_1}{b}, y = 0$ ke matriks Jacobi, maka:

$$J = \begin{bmatrix} -r_1 & \left(-r_1 f - \frac{a_1}{\frac{r_1}{b} + m}\right) r_1 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}.$$

Dengan $\det(\lambda I - J) = 0$ diperoleh persamaan karakteristik matriks sebagai berikut:

$$(\lambda + r_1)(\lambda - r_2).$$

Kemudian, diperoleh nilai eigen:

$$\lambda_1 = -r_1 \text{ dan } \lambda_2 = r_2$$

Semua nilai parameter diasumsikan positif, dari hasil perhitungan diperoleh $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$. Kedua nilai eigen memiliki tanda berbeda yang artinya titik kesetimbangan $E_0 = (0, \frac{r_2 k}{a_2})$ bersifat tidak stabil atau *saddle point*.

Kestabilan titik kesetimbangan pada $E^*(x^*, y^*)$

Substitusikan $x = x^*, y = y^*$ ke matriks Jacobi, maka:

$$J = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Dimana

$$c_{11} = \left(\frac{-b + a_1 a_2 y^*}{(a_2 x^* + m)^2 x^* + r_1} \right) \left(\frac{a_2 x^* + m}{f y^* + 1 - b x^* - a_1 a_2 y^*} \right),$$

$$c_{12} = \left(-\frac{r_1 f}{(f y^* + 1)^2} - \frac{a_1}{(x^* + m)} \right) x^*,$$

$$c_{21} = \frac{r_2^2}{a_2}.$$

$$c_{22} = -r_2.$$

Kemudian diperoleh persamaan karakteristik matriks sebagai berikut:

$$\lambda^2 - \left(\left(\frac{-b + a_1 a_2 y^*}{(a_2 x^* + m)^2 x^* + r_1} \right) \left(\frac{a_2 x^* + m}{f y^* + 1 - b x^* - a_1 a_2 y^*} \right) + (-r_2) \right) \lambda + \left(\left(\frac{-b + a_1 a_2 y^*}{(a_2 x^* + m)^2 x^* + r_1} \right) \left(\frac{a_2 x^* + m}{f y^* + 1 - b x^* - a_1 a_2 y^*} \right) (-r_2) \right) - \left(\left(-\frac{r_1 f}{(f y^* + 1)^2} - \frac{a_1}{(x^* + m)} \right) x^* \right) \left(\frac{r_2^2}{a_2} \right) = 0.$$

Kemudian, diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = \frac{(c_{11} - c_{22}) + \sqrt{(-c_{11} + c_{22})^2 - 4((c_{12} - c_{21}) - c_{11} c_{22})}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{(c_{11} - c_{22}) - \sqrt{(-c_{11} + c_{22})^2 - 4((c_{12} - c_{21}) - c_{11} c_{22})}}{2}.$$

Karena semua nilai parameter bernilai positif, maka berikut syarat kestabilan $E^*(x^*, y^*)$ yang dipenuhi:

Tabel 2. Syarat kestabilan pada $E^*(x^*, y^*)$

Syarat	Sifat
$(c_{11} - c_{22}) > \sqrt{(-c_{11} + c_{22})^2 - 4((c_{12} - c_{21}) - c_{11} c_{22})},$ $(-c_{11} + c_{22})^2 - 4((c_{12} - c_{21}) - c_{11} c_{22}) > 0$	<i>Node</i> Tidak stabil
$(c_{11} - c_{22}) < \sqrt{(-c_{11} + c_{22})^2 - 4((c_{12} - c_{21}) - c_{11} c_{22})},$ $(-c_{11} + c_{22})^2 - 4((c_{12} - c_{21}) - c_{11} c_{22}) > 0$	<i>Saddle</i> atau <i>Node</i> stabil
$(c_{11} - c_{22}) = 0,$ $(-c_{11} + c_{22})^2 - 4((c_{12} - c_{21}) - c_{11} c_{22}) > 0$	<i>Saddle</i>
$(c_{11} - c_{22}) = 0,$ $(-c_{11} + c_{22})^2 - 4((c_{12} - c_{21}) - c_{11} c_{22}) < 0$	<i>Center</i>
$(c_{11} - c_{22}) > 0,$ $(-c_{11} + c_{22})^2 - 4((c_{12} - c_{21}) - c_{11} c_{22}) < 0$	<i>Spiral</i> tidak stabil
$(c_{11} - c_{22}) < 0,$ $(-c_{11} + c_{22})^2 - 4((c_{12} - c_{21}) - c_{11} c_{22}) < 0$	<i>Spiral</i> stabil

SIMULASI NUMERIK

Simulasi numerik dilakukan untuk mengetahui kesesuaian antara hasil perhitungan analisis dengan hasil perhitungan secara numerik. Beberapa parameter yang dirujuk berdasarkan artikel Wang, dkk (2019). Nilai parameter yang digunakan disajikan pada tabel sebagai berikut:

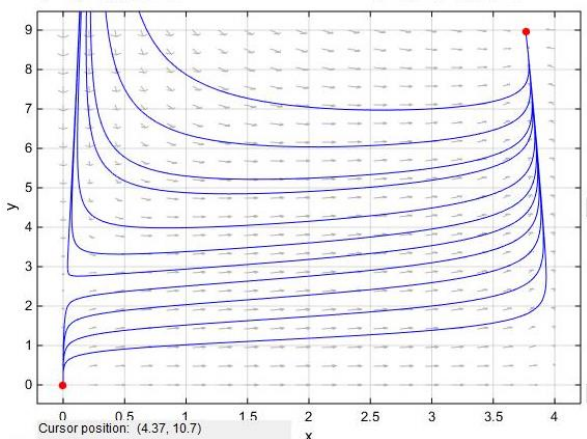
Tabel 3. Nilai parameter

Parameter	Nilai	Keterangan
r_1	2	Asumsi
r_2	0.34	Wang dkk 2019
f	0	Wang dkk 2019
	0.1	Wang dkk 2019
	0.7841	Asumsi
	0.7842	Asumsi
b	0.5	Asumsi
a_1	0.05	Wang dkk 2019
a_2	0.2	Wang dkk 2019
m	0.04	Wang dkk 2019
k	1.5	Asumsi

Simulasi numerik digunakan untuk mengilustrasikan bagaimana kestabilan dan titik kesetimbangan disaat nilai parameter yang digunakan berbeda. Simulasi numerik juga digunakan untuk mengkonfirmasi hasil perhitungan analisis menggunakan *software* Pplane pada Matlab.

Wang dkk. [2020] melakukan simulasi dengan meningkatkan nilai parameter efek ketakutan. Dimulai dari $f = 0, f = 1, f = 2$, sampai ke $f = 6$. Mengikuti peneliti terdahulu, penulis melakukan simulasi dengan mengubah nilai parameter efek ketakutan yang digunakan dengan tujuan untuk mengetahui bagaimana perubahan yang terjadi pada kestabilan tiap solusi sistem pada nilai parameter yang berbeda. Berikut adalah hasil simulasi numerik berdasarkan nilai parameter pada Tabel 3.

Simulasi numerik dengan $f = 0$ diilustrasikan melalui potret fase menggunakan *software* Pplane, berikut adalah hasil dari simulasi yang dilakukan:

Gambar 1. Potret fase $f = 0$

Ketika nilai parameter $f = 0$ artinya tanpa adanya efek ketakutan, pada Gambar 1 menunjukkan potret fase ke titik kesetimbangan $E_{3b}(3.7647, 8.9501)$ dan titik kesetimbangan $E_1(0, 2.55)$. Hal ini berarti tanpa adanya efek ketakutan solusi sistem (8) menuju dua titik kesetimbangan yang stabil, dimana populasi predator tetap ada.

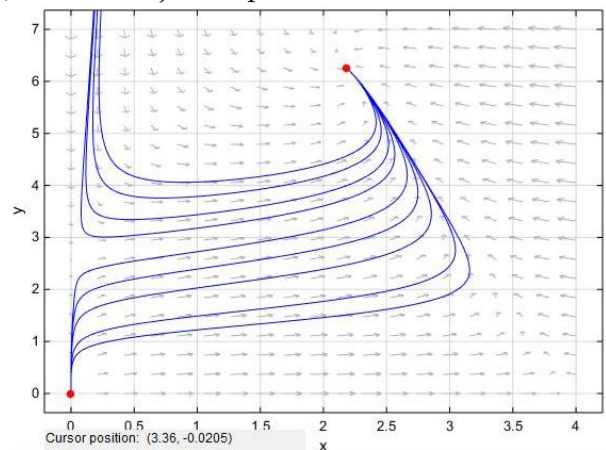
Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 3, dengan $f = 0$ diperoleh lima titik kesetimbangan secara lengkap ditampilkan pada Tabel 4 berikut:

Tabel 4. Kestabilan pada $f = 0$

Titik Kesetimbangan	Nilai eigen	Sifat
$E_0(0, 0)$	$\lambda_1 = 0.34$ $\lambda_2 = 2$	Tidak stabil
$E_1(0, 2.55)$	$\lambda_1 = -0.34$ $\lambda_2 = -1.1875$	Stabil
$E_2(4, 0)$	$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 0.34$	Tidak stabil
$E_{3a}(0.0252, 2.5928)$	$\lambda_1 = 0.74585229$ $\lambda_2 = -0.329704$	Tidak stabil
$E_{3b}(3.7647, 8.9501)$	$\lambda_1 = -1.745658$ $\lambda_2 = -0.360343$	Stabil

Ketika $f = 0$, didapatkan bahwa syarat stabilitas E_1 dan E_{3a} terpenuhi. Pada kasus ini titik $E_1(0, 2.55)$ dan $E_{3b}(3.7647, 8.9501)$ stabil asimtotik.

Kemudian dilakukan simulasi dengan nilai parameter efek ketakutan $f = 0.1$. Potret fase saat $f = 0.1$ ditunjukkan pada Gambar 2 berikut:

Gambar 2. Potret fase $f = 0.1$

Ketika nilai parameter $f = 0.1$ pada Gambar 2 menunjukkan potret fase menuju ke titik kesetimbangan $E_{3b}(2.17902, 6.254349)$ dan $E_1(0, 0.255)$ stabil. Solusi sistem (8) menuju dua titik kesetimbangan yang stabil saat $f = 0.1$ dan populasi

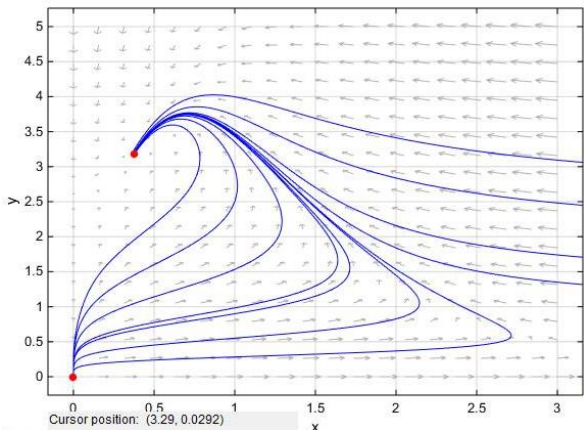
predator tetap ada. Berdasarkan syarat titik E_1 dan E_{3b} terpenuhi dan juga menunjukkan kesesuaian dengan potret fase pada simulasi Gambar 2. Pada kasus ini titik $E_1(0, 2.55)$ dan $E_{3b}(3.7647, 8.9501)$ stabil asimtotik.

Berdasarkan data pada Tabel 3 dengan $f = 0.1$ diperoleh lima titik kesetimbangan secara lengkap yang ditampilkan pada Tabel 5 berikut:

Tabel 5. Kestabilan pada $f = 0.1$

Titik Kesetimbangan	Nilai eigen	Sifat
$E_0(0, 0)$	$\lambda_1 = 0.34$ $\lambda_2 = 2$	Tidak stabil
$E_1(0, 0.2.55)$	$\lambda_1 = -0.34$ $\lambda_2 = -1.593874$	Stabil
$E_2(4, 0)$	$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 0.34$	Tidak stabil
$E_{3a}(0.44011, 2.62482)$	$\lambda_1 = 0.7800122$ $\lambda_2 = -0.326322$	Tidak stabil
$E_{3b}(2.17902, 6.254349)$	$\lambda_1 = -0.64556 + 0.1742144i$ $\lambda_2 = -0.64556 - 0.1742144i$	Stabil

Dilanjutkan dengan mengubah nilai parameter efek ketakutan $f = 0.7841$. Potret fase saat efek ketakutan $f = 0.7841$ ditunjukkan pada Gambar 3 berikut:



Gambar 3. Potret fase $f = 0.7841$

Gambar 3 menunjukkan potret fase menuju ke titik kesetimbangan $E_{3b}(0.3775, 3.1919)$ dan $E_1(0, 0.2.55)$ tetap stabil dengan efek ketakutan yang meningkat. Artinya solusi sistem (8) menuju dua titik kesetimbangan yang stabil dimana populasi predator masih tetap terjaga saat nilai $f = 0.7841$.

Berdasarkan Tabel 3 dengan nilai parameter $f = 0.7841$ diperoleh lima titik kesetimbangan yang eksis dan menunjukkan kesesuaian dengan syarat stabilitas titik E_1 dan E_{3b} terpenuhi stabil. Berikut Tabel 6 keadaan kestabilan saat nilai parameter $f = 0.7841$ terdapat efek ketakutan yang semakin meningkat.

Tabel 6. Kestabilan untuk $f = 0.7841$

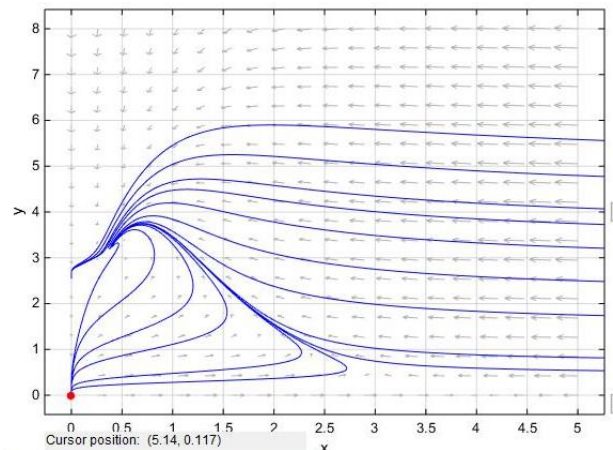
Titik Kesetimbangan	Nilai eigen	Sifat
$E_0(0, 0)$	$\lambda_1 = 0.34$ $\lambda_2 = 2$	Tidak stabil
$E_1(0, 0.2.55)$	$\lambda_1 = -0.34$ $\lambda_2 = -2.5207$	Stabil
$E_2(4, 0)$	$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 0.34$	Tidak stabil
$E_{3a}(0.37414, 3.18604)$	$\lambda_1 = 0.00395393$ $\lambda_2 = -0.1835208$	Tidak stabil
$E_{3b}(0.3775, 3.1919)$	$\lambda_1 = -0.0040519$ $\lambda_2 = -0.1791797$	Stabil

Kemudian nilai parameter efek ketakutan menjadi $f = 0.7842$, titik kesetimbangan E_{3a} dan E_{3b} tidak eksis. Berikut ditunjukkan pada Tabel 7.

Tabel 7. Kestabilan untuk $f = 0.7842$

Titik Kesetimbangan	Nilai eigen	Sifat
$E_0(0, 0)$	$\lambda_1 = 0.34$ $\lambda_2 = 2$	Tidak stabil
$E_1(0, 0.2.55)$	$\lambda_1 = -0.34$ $\lambda_2 = -2.5207$	Stabil
$E_2(4, 0)$	$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 0.34$	Tidak stabil

Solusi sistem (8) dapat ditunjukkan dalam potret fase berikut.



Gambar 4. Potret fase $f = 0.7842$

Pada Gambar 4 bisa dilihat kestabilan hanya menuju ke titik kesetimbangan E_1 . Berdasarkan syarat yang terpenuhi hanya titik E_1 yang stabil. Titik kesetimbangan $E^*(x^*, y^*)$ untuk kedua populasi tidak eksis saat nilai $f = 0.7842$.

Dari hasil simulasi dapat diambil kesimpulan bahwa tingkat efek ketakutan dapat mempengaruhi perubahan kestabilan dari solusi sistem dan menunjukkan adanya kestabilan ganda, yaitu ketika efek ketakutan $0 < f < 0.7842$. Kemudian disaat $f > 0.7842$ titik kedua populasi menjadi tidak eksis. Adanya efek ketakutan dapat membuat perubahan kestabilan bahkan menjadi kedua populasi tidak eksis.

PENUTUP

SIMPULAN

Model *prey-predator* dengan fungsi respon Holling tipe II dan efek ketakutan pada artikel ini diperoleh dari mengkonstruksi model *prey-predator* dari peneliti sebelumnya. Menggabungkan model *prey-predator* dari Wang dkk. [2020] dan Savitri dkk. [2021] diperoleh model *prey-predator* dengan fungsi respon Holling tipe II dan efek ketakutan dengan mengasumsikan tidak terdapat kematian alami pada *prey* dan membedakan *carrying capacity* pada dua populasi. Berdasarkan hasil penelitian, terdapat lima titik kesetimbangan $E_0 (0, 0)$ menyatakan kepunahan kedua populasi, $E_1 \left(\frac{r_1}{b}, 0\right)$ menyatakan kepunahan populasi *predator*, $E_2 \left(0, \frac{r_2 k}{a_2}\right)$ menyatakan kepunahan populasi *prey*, serta E_{3a} dan E_{3b} menyatakan kedua populasi, yaitu *prey* dan *predator* bertahan hidup. Kelima titik tetap memiliki kestabilan yang berbeda-beda. E_0 dan E_2 selalu tidak stabil, E_1 dan E_{3a} dan E_{3b} stabil pada kondisi tertentu. Pemilihan parameter f yang berbeda-beda dilakukan untuk mengetahui bagaimana pengaruh efek ketakutan terhadap perubahan solusi sistem. Berdasarkan hasil simulasi numerik ditunjukkan bahwa terdapat kestabilan ganda saat nilai parameter $f < 0.7842$. Efek ketakutan dapat menyebabkan perubahan kestabilan sistem, dari stabil menjadi tidak stabil, dan sebaliknya hal ini selaras dengan penelitian Wang dkk [2020] yang menyatakan bahwa efek ketakutan efek ketakutan bisa membuat sistem berubah-ubah dari stabil menjadi tidak stabil dan sebaliknya.

SARAN

Peneliti berharap dengan dibuatnya artikel ini dapat menjadi acuan untuk penelitian berikutnya dalam kontruksi model yang berbeda. Simulasi dalam model ini dapat dikembangkan dengan menggunakan parameter yang berbeda serta dilanjutkan dengan kontinuasi numerik sampai muncul bifurkasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Abbey-Lee, R. N., Mathot, K. J. & Dingemanse, N. J. (2016). *Behavioral and Morphological Responses to Perceived Predation Risk: A Field Experiment in Passerines*. *Behav. Ecol.* 27, 857–864. <https://doi.org/10.1093/beheco/arv228>
- Abrams, P. & Ginzburg, L. (2000). *The nature of Predation: Prey Dependent, Ratio Dependent or neither*. *Trends Ecol. Evol.* 15, 337–341. [https://doi.org/10.1016/S0169-5347\(00\)01908-X](https://doi.org/10.1016/S0169-5347(00)01908-X)
- Aziz-Alaoui, M. A., Okiye, M.D. (2003). *Boundness and Global Stability for Predator-Prey model with Modified Leslie-Gower and Holling-Type II*. *Applied Math.* 16, 1069-1075. [https://doi.org/10.1016/S0893-9659\(03\)90096-6](https://doi.org/10.1016/S0893-9659(03)90096-6)
- Cai, Y., Zhao, C., Wang, W. & Wang, J. (2014). *Dynamics of a Leslie-Gower Predator-prey Model with Addictive Alle Effect*. *Appl. Math. Modelling*.
- Finizio, N., Ladas, G. (1982). *An Introduction to Differential Equations with Difference Equation, Fourier Series, and Partial Differential Equations*. Wadsworth Publishing Company. Belmont. California.
- Holling, C. S., 1965. The Functional Response of Predators to Prey Density and its Role in Mimicry and Population Regulation. *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, 97(S45), 5–60. <https://doi.org/10.4039/entm9745fv>
- Hua, F., Sieving, K. E., Fletcher, R. J. & Wright, C. A. (2014). *Increased Perception of Predation Risk to Adults and Offspring alters Avian Reproductive Strategy and Performance*, *Behaviour Ecology*. 25, 509-519. <http://dx.doi.org/10.1093/beheco/aru017>
- Kyle H Elliott, Gustavo S Betini, and D. Ryan Norris. (2017). *Fear creates and Allee Effect: experimental evidence from seasonal populations*. *Proc. R. Soc. B*

- 284: 20170878. <http://dx.doi.org/10.1098/rspb.2017.0878>.
- Logan, M. L., Fernandez, S. G., & Calsbeek, R. (2015). *Abiotic Constraints on The Activity of Tropical Lizards. Functional Ecology.* 29, 694-700. <https://doi.org/10.1111/1365-2435.12379>
- Panigoro, H., Rahmi, E. (2017). *Modifikasi Sistem Predator-Prey: Dinamika Model Leslie Gower dengan Daya Dukung yang Tumbuh Logisitik*. Prosiding SEMIRATA MIPANET 2017. UNSRAT. Manado.
- Pijush, P., Nikhil, P., Sudip, S. & Joydev, C. (2018). *Stability and Bifurcation analysis of a Three-Species Food Chain Model with Fear*, International Journal of Applied and Computational Mathematics. 5, 100-1-260. <https://doi.org/10.1142/S0218127418500098>
- Savitri, D., Abadi., Manuharawati., Jakfar, M. (2021). *The Dynamics of Modified Leslie-Gower the Pest-Predator System with Additional Food and Fear Effect*. Advances in Engineering Research, volume 209. International Joint Conference on Science and Engineering 2021 (IJSCE 2021). DOI:<https://doi.org/10.2991/aer.k.211215.088>
- Soemarwoto, O. (1983). *Ekologi Lingkungan Hidup dan Pembangunan*. Jakarta. Penerbit Djambatan.
- Suraci, J. P., Clinchy, M., Dill, L. M., Roberts, D. & Zanette, L. Y. (2017). *Fear of large carnivores causes a trophic cascade*. Nat. Commun. 7, 10698.1. 115, no. 22, pp. 199-209. <https://doi.org/10.1038/ncomms10698>
- Ulfa, H.M., Suryanto, A., Darti, I. (2018). *Dynamics of Leslie-Gower predator-prey model with Additional Food for Predators*, International Journal of Pure and Applied Mathematics. <http://dx.doi.org/10.12732/ijpam.v115i2.1>
- Volketigoe. M. (1992). *The Origins and Evolution of Predator-prey Theory*. Ecology. 73, 1530-1535.
- Wang, X. & Zou, X. (2017). *Modeling the fear effect in predator-prey interactions with adaptive avoidance of predators*. Bull. Math. Biol. 79, 1325-1359.
- Wang, X., Zanette, L. & Zou, X. (2016). *Modeling the fear effect in predator-prey interactions*. J. Math. Biol. 73, 1179-1204. <https://doi.org/10.1007/s00285-016-0989-1>
- Wang, X., Tan, Y., Cai, Y., Wang, W. (2020). *Impact of the Fear Effect on the Stability and Bifurcation of a Leslie-Gower Predator-Prey Model*. International Journal of Bifurcation and Chaos. 30, 14. <https://doi.org/10.1142/S0218127420502107>
- Zanette, L. Y., White, A. F., Allen, M. C. & Michael, C. (2011). *Perceived predation risk reduces the number of offspring songbirds produce per year*. Science. 334, 1398-1401. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1210908>
- Zed, Mestika. (2008). *Metode Penelitian Kepustakaan*. Jakarta : Yayasan Obor Indonesia.