MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 10 No 01
Tahun 2022

BCK-ALJABAR *KUADRUPEL NEUTROSOFIK*

Kevin Alifviansyah
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
e-mail : kevin.18051@mhs.unesa.ac.id

Agung Lukito
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
Penulis Korespondensi : agunglukito@unesa.ac.id

Abstrak

Artikel ini memperkenalkan bilangan kuadrupel neutrosofik yang berbasis pada suatu himpunan untuk mengonstruksi BCK-aljabar kuadrupel neutrosofik. Kemudian diselidiki beberapa sifatnya dan akan dipelajari konsep ideal, ideal implikatif positif, ideal tertutup pada BCK-aljabar kuadrupel neutrosofik. Untuk subhimpunan U dan V dari BCK/BCI-aljabar kuadrupel neutrosofik, akan dikaji himpunan $NQ(U,V)$ yang terdiri atas bilangan kuadrupel neutrosofik dengan syarat tertentu. Akan disajikan beberapa syarat agar himpunan $NQ(U,V)$ menjadi ideal implikatif positif pada BCK-Aljabar kuadrupel neutrosofik dan himpunan $NQ(U,V)$ menjadi ideal tertutup pada BCK-aljabar kuadrupel neutrosofik.

Kata Kunci: BCK-aljabar kuadrupel neutrosofik, bilangan BCK-aljabar kuadrupel neutrosofik, ideal implikatif positif kuadrupel neutrosofik

Abstract

In the discussion of this article, introduces the neutrosophic quadruple-number primarily based totally on a set to construct BCK-Algebra quadrupel neutrosofik, then investigated some its properties and studied the concepts of ideals, closed ideals, and positive implicative ideals in a neutrosophic quadruple BCK-algebra. For subsets U and V of a neutrosophic quadruple BCK/BCI-algebra, the $NQ(U,V)$ set includes of neutrosophic quadruple-numbers with a certain condition. There will be several conditions for $NQ(U,V)$ to be closed ideal in a neutrosophic quadruple BCK-algebra and $NQ(U,V)$ to be a positive implicative ideal in a neutrosophic quadruple BCK-algebra.

Keywords: *neutrosophic quadruple BCK-algebra, neutrosophic quadruple BCK-number, positive implicative neutrosophic quadruple ideal*

PENDAHULUAN

Bagian dari matematika yang berhubungan dengan struktur dan sifat-sifatnya yakni aljabar. Didefinisikan struktur aljabar sebagai himpunan tak kosong dengan satu atau lebih operasi biner serta memenuhi beberapa aksioma tertentu (Iseki, 1966).

Diperkenalkan dua kelas struktur aljabar abstrak, yakni *BCI*-aljabar dan *BCK*-aljabar oleh Y. Imai dan K. Iseki. Kelas aljabar pertama ialah generalisasi kelas aljabar kedua. Kedua jenis aljabar tersebut mulai dipelajari secara mendalam sejak pertama kali gagasan tentang hal tersebut diperkenalkan.

Seiring berjalannya waktu timbul suatu gagasan baru yang dikembangkan oleh Smarandache(1999,2005), yaitu himpunan neutrosofik yang menggeneralisasi lebih umum dan memperluas gagasan tentang himpunan klasik, himpunan fuzzy (intusionistik) dan himpunan fuzzy (intusionistik) bernilai interval.

Untuk memperluas pengetahuan tentang *BCK/BCI*-aljabar serta menyelidiki keterkaitannya dengan bilangan kuadrupel neutrosofik maka pada artikel ini akan didiskusikan bilangan kuadrupel neutrosofik yang diaplikasikan pada *BCK*-aljabar yang berbasis pada suatu himpunan untuk mengonstruksi *BCK*-aljabar kuadrupel neutrosofik. Kemudian, diselidiki beberapa sifatnya dan akan dipelajari konsep ideal, ideal implikatif positif, ideal tertutup pada *BCK*-aljabar kuadrupel neutrosofik. Untuk subhimpunan U dan V dari *BCK/BCI*-aljabar kuadrupel neutrosofik, akan dikaji himpunan $NQ(U,V)$ yang terdiri atas bilangan kuadrupel neutrosofik dengan syarat tertentu. Akan disajikan beberapa syarat agar himpunan $NQ(U,V)$ menjadi ideal implikatif positif pada *BCK*-Aljabar kuadrupel neutrosofik dan himpunan $NQ(U,V)$ menjadi ideal tertutup pada *BCK*-aljabar kuadrupel neutrosofik.

KAJIAN TEORI

Definisi 2.1. BCI-***aljabar*** *adalah struktur aljabar yang terdiri dari operasi biner* $*$ *pada himpunan tak kosong* X *serta elemen istimewa* 0 *dan juga berlaku empat aksioma berikut:*

(I) $\big((k * l) * (k * m)\big) * (m * l) = 0,$

(II) $\big(k * (k * l)\big) * l = 0,$

(III) $k * k = 0,$

(IV) $k * l = l * k = 0 \Longrightarrow k = l$

untuk semua $k, l, m \in X$. Jika BCI-aljabar X memenuhi

(V) $0 * k = 0$

untuk semua $k \in X$, maka X disebut BCK-aljabar.

(K. H. Kim dan Y. H. Yon, 2007)

Proposisi 2.2. BCK-*aljabar* X *juga memenuhi*

$$(\forall\, k \in X)(k * 0 = k).$$

(Huang Y, 2006)

Bukti. Dengan substitusi $l = 0$ pada Aksioma (II) diperoleh

$$\big(k * (k * 0)\big) * 0 = 0. \qquad (2.1)$$

Dengan mengganti $l = k * 0$ serta $m = k$ pada Aksioma (I) didapatkan

$$\Big(\big(k * (k * 0\,)\big) * (k * k)\Big) * \big(k * (k * 0\,)\big) = 0.$$

Dari Aksioma (III), identitas ini menjadi

$$\Big(\big(k * (k * 0\,)\big) * 0\Big) * \big(k * (k * 0\,)\big) = 0. \qquad (2.2)$$

Substitusikan (2.1) ke (2.2) untuk memeroleh

$$0 * \big(k * (k * 0\,)\big) = 0. \qquad (2.3)$$

Dari (2.1) dan (2.3), dengan Aksioma (IV), diperoleh

$$k * (k * 0\,) = 0. \qquad (2.4)$$

Dengan substitusi $l = k$ pada Aksioma (II) diperoleh

$$\big(k * (k * k)\big) * k = 0.$$

Dari Aksioma (III), identitas berikut berlaku

$$(k * 0) * k = 0 \qquad (2.5)$$

Dari (2.4) dan (2.5), dengan Aksioma (IV) diperoleh $k * 0 = k$. ∎

Definisi 2.3. *Pengurutan parsial* $\leq$ *pada* BCK/BCI-*aljabar* X *didefinisikan* $\forall\, k, l \in X$,

$$(k \leq l \Leftrightarrow k * l = 0).$$

(Huang Y, 2006)

Proposisi 2.4. *Pengurutan parsial* $\leq$ *pada* BCK/BCI-*aljabar* X *bersifat:*

(i) Refleksif $(k \leq k)$

(ii) Anti-simetris $(\, k \leq l\,, l \leq k \;\Rightarrow\; k = l)$

(iii) Transitif $(k \leq l,\; l \leq m \;\Rightarrow\; k \leq m)$

(Huang Y, 2006)

Bukti. (i) Dengan Aksioma (III) dan Definisi $\leq$ diketahui $k * k = 0$, sehingga diperoleh

$$k \leq k,$$

sehingga terbukti bahwa pengurutan $\leq$ bersifat refleksif. ∎

(ii) Misal $k \leq l$ serta $l \leq k$. Menurut Definisi $\leq$, berlaku $k * l = 0$, $l * k = 0$, sehingga dengan Aksioma (IV) diperoleh $k = l$. Jadi terbukti bahwa pengurutan $\leq$ bersifat anti-simetris. ∎

(iii) Misal $k \leq l$ serta $l \leq m$. Berdasarkan Definisi $\leq$, berlaku

$$k * l = 0 \text{ dan } l * m = 0.$$

Kemudian mengganti $l = m$ dan $m = l$ pada Aksioma (I) didapat

$$\big((k * m) * (k * l)\big) * (l * m) = 0,$$

sehingga

$$\big((k * m) * 0\big) * 0 = 0.$$

Dengan Proposisi 2.2, diperoleh

$$(k * m) * 0 = 0,$$

dan lagi,

$$k * m = 0.$$

Berdasarkan definisi $\leq$, diperoleh $k \leq m$. Jadi terbukti bahwa pengurutan $\leq$ bersifat transitif. ∎

Proposisi 2.5. BCK/BCI-*aljabar* X *memenuhi:*

(i) *untuk setiap* k, l, m *anggota* X, $k \leq l \Longrightarrow m * l \leq m * k$,

(ii) *untuk setiap* k, l, m *anggota* X, $(k * l) * m = (k * m) * l$,

(iii) *untuk setiap* k, l, m *anggota* X, $k \leq l \Longrightarrow k * m \leq l * m$,

(iv) *untuk setiap* k, l, m *anggota* X, $(k * m) * (l * m) \leq k * l$.

Bukti. (i) mengganti $m = k$ serta $k = m$ pada Aksioma (I), didapat

$$\big((m * l) * (m * k)\big) * (k * l) = 0$$

serta karena $k \leq l$, diperoleh

$$\big((m * l) * (m * k)\big) * 0 = 0.$$

Berdasarkan Proposisi 2.2,

$$(m * l) * (m * k) = 0$$

berdasarkan Definisi $\leq$ dapat disimpulkan

$$m * l \leq m * k.$$ ∎

(ii) Dengan substitusi $l = m$ pada Aksioma (II), didapat

$$\big(k * (l * m)\big) * m = 0$$

atau dengan Definisi $\leq$,

$$k * (k * m) \leq m.$$

Kemudian, dengan bagian (i) didapat

$$(k * l) * m \leq (k * l) * \big(k * (k * m)\big).$$

Dengan substitusi $m = k * m$ pada Aksioma (I) didapat

$$\Big((k * l) * \big(k * (k * m)\big)\Big) * \big((k * m) * l\big) = 0$$

atau

$$(k * l) * \big(k * (k * m)\big) \leq (k * m) * l.$$

Karena pengurutan bersifat transitif, dari dua hasil terakhir ini kita dapat menyimpulkan bahwa:

$$(k * l) * m \leq (k * m) * l.$$

Dengan substitusi $l = m$ dan $m = l$ pada hasil diatas didapat

$$(k * m) * l \leq (k * l) * m,$$

dengan Aksioma (IV) didapat

$$(k * l) * m = (k * m) * l. \qquad \blacksquare$$

(iii) Dengan substitusi $l = m$ dan $m = l$ pada Aksioma (I) didapat

$$\big((k * m) * (k * l)\big) * (l * m) = 0$$

dan sebab $l \geq k$, diperoleh

$$\big((k * m) * 0\big) * (l * m) = 0.$$

Berdasarkan Proposisi 2.2, dihasilkan

$$(k * m) * (l * m) = 0$$

Serta berdasarkan Definisi ≤ bisa disimpulkan

$$k * m \leq l * m. \qquad \blacksquare$$

(iv) Dengan mengganti $m = l$ dan $l = m$ pada Aksioma (I) didapat

$$\big((k * m) * (k * l)\big) * (l * m) = 0$$

dan dengan bagian (ii) pada Proposisi 2.5 didapat

$$\big((k * m) * (l * m)\big) * (k * l) = 0.$$

Dengan menggunakan definisi $\leq$, didapat

$$(k * m) * (l * m) \leq k * l. \qquad \blacksquare$$

Lemma 2.6. *BCI-Aljabar X juga memenuhi beberapa kondisi berikut :*

(i) $(k * \big(k * (k * l)\big) = k * l$,
(ii) $\big(0 * (k * l) = (0 * k) * (0 * l)\big)$,

(Huang Y, 2006)

Bukti. (i) Jika terdapat elemen yang kurang dari atau sama dengan 0, maka elemen tersebut haruslah sama dengan 0. Berdasarkan Aksioma (I) dan Definisi $\leq$,

$$(k * l) \; * \; (k * m) \; \leq \; m * l$$

Berdasarkan Aksioma (II), dengan mengganti

$$m = (k * (k * l),$$

diperoleh

$$(k * l) * \Big(k * \big(k * (k * l)\big)\Big) \leq \big(k * (k * l)\big) * l = 0.$$

Menurut Aksioma(II) didapat

$$(k * l) * \Big(k * \big(k * (k * l)\big)\Big) \leq 0.$$

Jadi,

$$(k * l) * \Big(k * \big(k * (k * l)\big)\Big) * 0 = 0.$$

Berdasarkan Proposisi 2.2 dimana $k * 0 = k$, pastilah

$$(k * l) * \Big(k * \big(k * (k * l)\big)\Big) = 0.$$

Menurut Definisi $\leq$, didapat

$$(k * l) \leq \Big(k * \big(k * (k * l)\big)\Big)$$

Kemudian, dari Aksioma (II) juga diperoleh

$$\Big(k * \big(k * (k * l)\big)\Big) * (k * l) = 0.$$

Dengan demikian, berdasarkan Aksioma (IV),

$$(k * \big(k * (k * l)\big) = k * l. \qquad \blacksquare$$

(ii) Menggunakan Aksioma (III), diperoleh

$$\begin{aligned} 0 * (k * l) &= \big((0 * l) * (0 * l)\big) * (k * l) \\ &= \big(((k * k) * l) * (0 * l)\big) * (k * l) \end{aligned}$$

Menurut Proposisi 2.5.(ii), berlaku

$$\begin{aligned} &\big(((k * k) * l) * (0 * l)\big) * (k * l) \\ &= \big(((k * k) * l) * (k * l)\big) * (0 * l) \\ &= \big(((k * l) * k) * (k * l)\big) * (0 * l) \\ &= \Big(\big((k * l) * (k * l)\big) * k\Big) * (0 * l). \end{aligned}$$

Menurut Aksioma (III), berlaku

$$\Big(\big((k * l) * (k * l)\big) * k\Big) * (0 * l) = (0 * k) * (0 * l).$$

Terbukti bahwa

$$\big(0 * (k * l) = (0 * k) * (0 * l)\big). \qquad \blacksquare$$

Contoh A. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}, -, 0)$ merupakan BCI-aljabar.

Bukti. Untuk Aksioma (I), perhatikan bahwa

$\big((k-l)-(k-m)\big)-(m-l)=(m-l)-(m-l)=0.$

Untuk Aksioma (II), perhatikan bahwa

$$\big(k-(k-l)\big)-l=l-l=0$$

Untuk Aksioma (III), perhatikan bahwa

$$(k-k)=0.$$

Untuk Aksioma (IV), perhatikan bahwa

$$k-l=0\,,l-k=0\ \Rightarrow k=l.$$

Sehingga $(\mathbb{Z},-,0)$ memenuhi semua Aksioma BCI-aljabar. ■

Contoh B. Asumsikan $(Y,*,0)$ BCI-aljabar. Contoh A menunjukkan bahwa $(\mathbb{Z},-,0)$ adalah BCI-aljabar. Pada contoh ini, akan ditunjukkan bahwa $X=Y\times\mathbb{Z}$ merupakan BCI-aljabar.

Misalkan $z=(z_1,z_2), a=(a_1,a_2)$, dan $b=(b_1,b_2)$ elemen di X. Maka $z*a=(z_1*a_1,z_2-a_2)$.
Untuk Aksioma (I), perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}&\big((z_1*a_1,z_2-a_2)*(z_1*b_1,z_2-b_2)\big)\\&\qquad*(b_1*a_1,b_2-a_2)\\&=\big((z_1*a_1)*(z_1*b_1),(z_2-a_2)-(z_2-b_2)\big)\\&\qquad*(b_1*a_1,b_2-a_2)\\&=\Big(\big((z_1*a_1)*(z_1*b_1)\big)\\&\qquad*(b_1*a_1),\big((z_2-a_2)-(z_2-b_2)\big)\\&\qquad-(b_2-a_2)\Big)\\&=(0,0).\end{aligned}$$

Untuk Aksioma (II), perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}&(z*(z*a))*a\\&=\big((z_1,z_2)*(z_1*a_1,z_2-a_2)\big)*(a_1,a_2)\\&=\big(z_1*(z_1*a_1)\big),\big(z_2-(z_2-a_2)\big)*(a_1,a_2)\\&=\big((z_1*(z_1*a_1)*a_1)\big),\big((z_2-(z_2-a_2)-a_2)\big)\\&=(0,0).\end{aligned}$$

Untuk Aksioma (III), perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}z*z&=(z_1,z_2)*(z_1,z_2)\\&=(z_1*z_1),(z_2-z_2)\\&=(0,0).\end{aligned}$$

Untuk Aksioma (IV), misalkan $z*a=0$ dan $a*z=0$. Didapat

$$(z_1*a_1,z_2-a_2)=(0,0),$$

dan

$$(z_1*a_1,a_2-z_2)=(0,0).$$

Jadi $z_1*a_1=0$ dan $z_1*a_1=0$, sehingga $z_1=a_1$ dan $z_2-a_2=0$,karena Y BCI-aljabar, dan juga $a_2=z_2=0$. Oleh karena itu, $z=a$. Dengan demikian, X merupakan BCI-aljabar.

Definisi 2.7. *BCK-Aljabar X dikatakan* ***implikatif positif*** *bila untuk semua* m,n,o anggota X, *memenuhi*

$$(m*n)*(n*o)=(m*n)*o \tag{2.6}$$

(Jun dkk., 2018).

Definisi 2.8. *Subhimpunan tak kosong S pada BCK/BCI-aljabar dikatakan* ***subaljabar*** *pada X bila memenuhi*

$$m*n\in S,\ \text{untuk setiap}\ m,n\ \in S \tag{2.7}$$

(Jun dkk., 2018).

Definisi 2.9. *Subhimpunan I pada BCK/BCI-aljabar X* ***ideal*** *dari X bila memenuhi*

$$0\in I \tag{2.8}$$

dan untuk $m\in X, n\in I$

$$m*n\in I\ \Rightarrow m\in I \tag{2.9}$$

(Jun dkk., 2018).

Definisi 2.10. *Subhimpunan I pada BCI-aljabar X dikatakan* ***ideal tertutup*** *pada X bila memenuhi*

$$m\in I\ \Rightarrow 0*m\in I \tag{2.10}$$

untuk setiap $m\in X$.

(Jun dkk., 2018).

Definisi 2.11. *Subhimpunan I pada BCK-aljabar X dikatakan* ***ideal implikatif positif*** *pada X bila memenuhi (2.7) dan untuk semua* m,n,o *elemen* X,

$$\big((m*n)*o\in I,n*o\in I\Rightarrow m*o\in I\big) \tag{2.11}$$

(Jun dkk., 2018).

Catatan: Dengan mengganti $o=0$ pada persamaan (2.11), jelas bahwa setiap ideal implikatif positif pada BCK-aljabar X adalah ideal.

Lemma 2.12. *Misalkan I subhimpunan tak-kosong dari* BCK*-aljabar* X. *Semua pernyataan di bawah ini ekuivalen:*

(i) *I adalah ideal implikatif positif.*
(ii) *I adalah ideal, dan untuk setiap* $m,n\in X$, *jika* $(m*n)*n\in I$, *maka* $m*n\in I$.
(iii) *I adalah ideal, dan untuk setiap* $m,n,o\in X$, *jika* $(m*n)*o\in I$, *maka* $(m*o)*(n*o)\in I$.
(iv) *Jika* $0\in I$ *dan jika* $\big((m*n)*n\big)*o\in I$, *dan* $o\in I$, *maka* $m*n\in I$.

Bukti. $((\text{i}) \Rightarrow (\text{ii}))$ Misalkan I ideal implikatif positif. Berdasarkan catatan setelah Definisi 2.11, I merupakan ideal. Misal $(m * n) * n \in I$. Dengan mengganti $o = n$ pada (2.11), karena $n * n = 0 \in I$, didapat $m * n \in I$.

$((\text{ii}) \Rightarrow (\text{iii}))$ Asumsikan (ii) dan $(m * n) * o \in I$. Maka dengan Proposisi 2.5 (iv) didapat

$$\big((m * o) * (n * o)\big) * o \leq (m * n) * o \in I,$$

sehingga $\big((m * o) * (n * o)\big) * o \in I$.

Kemudian dengan Proposisi 2.5 (ii) didapat

$$\Big(\big(m * (n * o)\big) * o\Big) * o = \big((m * o) * (n * o)\big) * o \in I.$$

Jadi, dengan (ii) didapatkan

$$\big(m * (n * o)\big) * o \in I,$$

sehingga dengan Proposisi 2.5 (ii) didapat $(m * o) * (n * o) \in I$.

$((\text{iii}) \Rightarrow (\text{iv}))$ karena I ideal, jelaslah $0 \in I$. Sekarang asumsikan $\big((m * n) * n\big) * o \in I$ dan $0 \in I$, maka dengan (iii) didapat

$$\big((m * n) * (n * n)\big) * o = \big((m * n) * n\big) * o \in I.$$

berdasarkan pada Aksioma (III) dan Proposisi 2.2, didapat

$$\big((m * n) * 0\big) * o = (m * n) * o \in I.$$

Sebab I ideal dan $o \in I$, bisa disimpulkan $m * n \in I$.

$((\text{iv}) \Rightarrow (\text{i}))$ Asumsikan I memenuhi (iv), maka I merupakan ideal dari X. Dengan subtitusi
$o = n$ dan $n = 0$.

Selanjutnya, misalkan $(m * n) * o \in I$ dan $n * o \in I$. Proposisi 2.5 (ii) mengakibatkan $(m * o) * n \in I$.

Dengan Proposisi 2.5 (iv) didapat

$$\big((m * o) * o\big) * (n * o) \leq (m * o) * n \in I,$$

sehingga $\big((m * o) * o\big) * (n * o) \in I$. Kemudian dengan (iv) disimpulkan bahwa $m * o \in I$. Hal ini membuktikan bahwa ideal I implikatif positif. ∎

Lemma 2.13. *Misalkan I dan U ideal dari BCK-aljabar X sehingga $I \subseteq U$. Jika I implikatif positif, maka begitu juga U.*

Bukti. Misal $(m * n) * o \in U$ dan $k = (m * n) * o$. Dengan Aksioma (III) diketahui bahwa:

$$\big((m * n) * o\big) * k = 0 \in I.$$

Dengan Proposisi 2.5 (ii) didapat

$$\big((m * k) * n\big) * o = 0 \in I.$$

Karena I implikatif positif, dengan Lemma 2.12 (iii) didapat

$$\big((m * k) * o\big) * (n * o) \in I,$$

dan lagi dengan Proposisi 2.5 (ii),

$$\big((m * o) * k\big) * (n * o) \in I,$$

dan juga

$$\big((m * o) * (n * o)\big) * k \in I,$$

dengan substitusi $k = (m * n) * o$, diperoleh

$$\big((m * o) * (n * o)\big) * \big((m * n) * o\big) \in I.$$

Karena $I \subset U$, maka

$$\big((m * o) * (n * o)\big) * \big((m * n) * o\big) \in U.$$

Karena $(m * n) * o \in U$ serta U ideal, diperoleh

$$(m * o) * (n * o) \in U.$$

Berdasarkan Lemma 2.12 (iii), ideal U implikatif positif. ∎

Lemma 2.14. *Pada BCK-aljabar X, pernyataan berikut ekuivalen:*

(i) *BCK-aljabar X implikatif positif.*
(ii) *$\{0\}$ merupakan ideal implikatif positif dari X.*
(iii) *Setiap ideal X merupakan implikatif positif.*
(iv) *Untuk setiap $a \in X$,*

$$U(a) = \{k \in X : k \leq a\}$$

merupakan ideal pada X

Bukti. $((\text{i}) \Rightarrow (\text{ii}))$ Jelaslah bahwa $\{0\}$ ideal. Asumsikan bahwa X adalah BCK-aljabar implikatif positif. Misalkan $(k * l) * l \in \{0\}$. Dengan Definisi 2.7 dan Aksioma (III), didapat

$$\begin{aligned} k * l &= (k * l) * 0 \\ &= (k * l) * (l * l) \\ &= (k * l) * l \in \{0\} \end{aligned}$$

Dengan Lemma 2.12(ii), dapat disimpulkan bahwa ideal $\{0\}$ implikatif positif.

$((\text{ii}) \Rightarrow (\text{iii}))$ Dengan Lemma 2.13 disimpulkan bahwa karena $\{0\}$ ideal implikatif positif, semua ideal dari X adalah implikatif positif.

$\big((\text{iii}) \Rightarrow (\text{iv})\big)$ Untuk $a \in X$ serta $k * l, l \in U(a)$, berlaku $k * l \leq a$ dan$l \leq a$. Oleh karena itu $(k * l) * a = 0 \in \{0\}$ dan $l * a = 0 \in \{0\}$. Dengan (iii), karena $\{0\}$ merupakan ideal implikatif positif, $k * a \in \{0\}$. Oleh karena itu, $k \in U(a)$. jadi, untuk setiap $a \in X$, himpunan $U(a) = \{k \in X : k \leq a\}$ ideal.

$\big((\text{iv}) \Rightarrow (\text{i})\big)$ Misalkan untuk sebarang $a \in X$, $U(a) = \{k \in X : k \leq a\}$ ideal serta $(k * l) * l = 0$, mengakibatkan $k * l \in U(l)$. Karena $U(l)$ ideal serta $l \in U(l)$, didapat $k \in U(l)$, sehingga $k * l = 0$. Karena itu, terbukti bahwa untuk BCK-aljabar X, $(k * l) * l = 0$ berakibat $k * l = 0$. Mudah ditunjukkan hasil ini mengakibatkan bahwa pada BCK-aljabar X berlaku $(k * l) * l = k * l$, dan hal ini setara dengan pernyataan bahwa X merupakan BCK-aljabar implikatif positif. ■

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini akan dibahas lebih lanjut mengenai bilangan kuadrupel neutrosofik pada *BCK/BCI*-aljabar.

Definisi 3.1. *Misalkan X himpunan.* ***X-bilangan kuadrupel neutrosofik*** *adalah kuadrupel terurut (s, tT, uI, vF) dimana $s, t, u, v \in X$ serta T, I, F memiliki makna logis neutrosofik biasa.*

Dua kuadrupel$(s, tT, uI, vF) = (b, pT, qI, rF)$ jika dan hanya jika $s = b, t = p, u = q$, dan $v = r$.

Himpunan

$$NQ(X) = \{(a, dT, eI, fF) \mid a, d, e, f \in X\}$$

(Smarandache, F., & Sahin, M., 2016)

disebut **himpunan kuadrupel neutrosofik** yang berbasis pada X. Jika X merupakan *BCK/BCI*-aljabar, maka X-bilangan kuadrupel neutrosofik disebut **BCK/BCI-bilangan kuadrupel neutrosofik**. Himpunan $NQ(X)$ disebut **BCK/BCI-himpunan kuadrupel neutrosofik**.

Definisi 3.2. *Misalkan X BCK/BCI-aljabar. Didefinisikan operasi $\odot$ pada $NQ(X)$ dengan*

$$(s, tT, uI, vF) \odot (b, uT, vI, wF) = (s * b, (t * u)T, (u * v)I, (v * w)F)$$

untuk setiap (s, tT, uI, vF), $(b, pT, qI, rF) \in NQ(X)$.

(Smarandache, F., & Sahin, M., 2016)

Definisi 3.3. *Untuk $a_1, a_2, a_3, a_4 \in X$, BCK/BCI-bilangan kuadrupel neutrosofik (a_1, a_2T, a_3I, a_4F) dinotasikan $\tilde{a}$, yaitu:*

$$\tilde{a} = (a_1, a_2T, a_3I, a_4F),$$

dan BCK/BCI-bilangan kuadrupel neutrosofik nol $(0, 0T, 0I, 0F)$ dinotasikan $\tilde{0}$, yaitu:

$$\tilde{0} = (0, 0T, 0I, 0F).$$

(Jun dkk., 2018)

Definisi 3.4. *Definisikan relasi urutan " $\ll$ " dan kesamaan "=" pada $NQ(X)$ sebagai berikut:*

$$\tilde{d} \ll \tilde{e} \Leftrightarrow d_o \leq e_o \text{ , dimana } o = 1,2,3,4$$
$$\tilde{d} = \tilde{e} \Leftrightarrow d_o = e_o \text{ , dimana } o = 1,2,3,4$$

dimana $\tilde{d}, \tilde{e} \in NQ(X)$.

(Jun dkk., 2018).

Berdasarkan Proposisi 2.4 dan dari Definisi 3.4, mudah diverifikasi bahwa $\ll$ merupakan relasi ekuivalensi pada $NQ(X)$.

Teorema 3.5. *Jika X BCK/BCI-aljabar, maka $\big(NQ(X); \odot, \tilde{0}\big)$ juga BCK/BCI-aljabar.*

Bukti. Misalkan X BCK/BCI-aljabar, dan misalkan $\tilde{d}, \tilde{e}, \tilde{f} \in NQ(X)$. Untuk Aksioma (I), perhatikan bahwa dari Definisi 3.2, diperoleh

$$(\tilde{d} \odot \tilde{e}) \odot (\tilde{d} \odot \tilde{f}) = (d_1 * e_1, (d_2 * e_2)T, (d_3 * e_3)I, (d_4 * e_4)F) \odot (d_1 * f_1, (d_2 * f_2)T, (d_3 * f_3)I, (d_4 * f_4)F) = \Big((d_1 * e_1) * (d_1 * f_1), \big((d_2 * f_2) * (d_2 * f_2)\big)T, \big((d_3 * e_3) * (d_3 * f_3)\big)I, \big((d_4 * e_4) * (d_4 * f_4)\big)F\Big)$$

Berdasarkan Proposisi 2.4, untuk $i = 1,2,3,4$ berlaku

$$(d_i * e_i) * (d_i * f_i) \leq (e_i * f_i),$$

dan dengan Definisi $\ll$, didapat

$$(\tilde{d} \odot \tilde{e}) \odot (\tilde{d} \odot \tilde{f}) \ll (\tilde{e} \odot \tilde{f}).$$

Jadi, Aksioma (I) BCK/BCI dipenuhi.

Untuk Aksioma (II), perhatikan bahwa dari Definisi $\odot$, diperoleh

$$\tilde{d} \odot (\tilde{d} \odot \tilde{e}) = (d_1, d_2T, d_3I, d_4F) \odot (d_1 * e_1, (d_2 * e_2)T, (d_3 * e_3)I, (d_4 * e_4)F) = (d_1 * (d_1 * e_1), d_2 * (d_2 * e_2)T, d_3 * (d_3 * e_3)I, d_4 * (d_4 * e_4)F)$$

Menurut Proposisi 2.4, untuk $i = 1,2,3,4$ berlaku

$$d_i * (d_i * e_i) \leq e_i,$$

dan dengan Definisi $\ll$, didapat

$$\tilde{d} \odot (\tilde{d} \odot \tilde{e}) \ll \tilde{e}.$$

Untuk Aksioma (III), dari Definisi $\odot$ diperoleh

$$\tilde{d} \odot \tilde{d} = (d_1 * d_1, (d_2 * d_2)T, (d_3 * d_3)I, (d_4 * d_4)F)$$

Menurut Aksioma (III), $k = 1,2,3,4$ berlaku

$$d_k * d_k = 0,$$

sehingga dengan Definisi $\odot$ didapat

$$\tilde{d} \odot \tilde{d} = \tilde{0}.$$

Untuk Aksioma (IV), asumsikan $\tilde{d} \odot \tilde{e} = \tilde{0}$ dan $\tilde{e} \odot \tilde{d} = \tilde{0}$. Perhatikan bahwa dari definisi $\odot$,

$$(d_1 * e_1, (d_2 * e_2)T, (d_3 * e_3)I, (d_4 * e_4)F) = (0, 0T, 0I, 0F),$$

dan

$$(e_1 * d_1, (e_2 * d_2)T, (e_3 * d_3)I, (e_4 * d_4)F) = (0, 0T, 0I, 0F).$$

Menurut kesamaan dua kuadrupel, untuk $o = 1, 2, 3, 4$ berlaku

$$d_o * e_o = 0 = e_o * d_o,$$

sehingga dengan aksioma (IV) diperoleh $d_o = e_o = 0$. Jadi,

$$\tilde{d} = (d_1, d_2T, d_3I, d_4F) = (e_1, e_2T, e_3I, e_4F) = \tilde{e}.$$

Oleh karena itu, kita tahu bahwa $(NQ(X); \odot, \tilde{0})$ merupakan BCI-aljabar dan disebut BCI-aljabar kuadrupel neutrosofik. ■

Lebih dari itu, jika X merupakan BCK-aljabar maka berlaku:

$$\tilde{0} \odot \tilde{d} = (0,0T,0I,0F) \odot (d_1, d_2T, d_3I, d_4F) = (0 * d_1, (0 * d_2)T, (0 * d_3)I, (0 * d_4)F) = (0, 0T, 0I, 0F) = \tilde{0}.$$

Karena $(NQ(X); \odot, \tilde{0})$ merupakan BCK-aljabar, dan disebut BCK-aljabar kuadrupel neutrosofik.

Contoh C. Jika $X = \{0, h\}$ maka himpunan kuadrupel neutrosofik pada $NQ(X)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$NQ(X) = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}, \tilde{5}, \tilde{6}, \tilde{7}, \tilde{8}, \tilde{9}, \widetilde{10}, \widetilde{11}, \widetilde{12}, \widetilde{13}, \widetilde{14}, \widetilde{15}\}$

di mana

$\tilde{0} = (0,0T,0I,0F), \tilde{1} = (0,0T,0I,hF), \tilde{2} = (0,0T,hI,0F), \tilde{3} = (0,0T,hI,hF),$
$\tilde{4} = (0,hT,0I,0F), \tilde{5} = (0,hT,0I,hF), \tilde{6} = (0,hT,hI,0F), \tilde{7} = (0,hT,hI,hF),$
$\tilde{8} = (h,0T,0I,0F), \tilde{9} = (h,0T,0I,hF), \widetilde{10} = (h,0T,hI,0F), \widetilde{11} = (h,0T,hI,hF),$
$\widetilde{12} = (h,hT,0I,0F), \widetilde{13} = (h,hT,0I,hF), \widetilde{14} = (h,hT,0I,0F)$ dan $\widetilde{15} = (h,hT,hI,hF)$

Misalkan $X = \{0, h\}$ definisikan operasi $*$ dengan tabel Cayley yang ditunjukkan di bawah ini.

Tabel Cayley dengan operasi biner $*$

$*$	0	h
0	0	0
h	h	0

Dapat diverifikasi bahwa $X = \{0, h\}$ merupakan BCK-aljabar.

Teorema 3.6. *Himpunan kuadrupel neutrosofik $NQ(X)$ pada BCK-aljabar X implikatif positif merupakan BCK-aljabar implikatif positif.*

Bukti. Misalkan X BCK-aljabar implikatif positif. Berdasarkan Teorema 3.5, $(NQ(X); \odot, \tilde{0})$ merupakan BCK-aljabar . Misalkan $\tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{o} \in NQ(X)$. Maka, untuk $i = 1,2,3,4$,

$$(m_i * o_i) * (n_i * o_i) = (m_i * n_i) * o_i,$$

karena X merupakan BCK-aljabar implikatif positif, sehingga,

$$(\tilde{m} \odot \tilde{o}) \odot (\tilde{n} \odot \tilde{o}) = (\tilde{m} \odot \tilde{n}) \odot \tilde{o}.$$

Dengan ini, himpunan $NQ(X)$ merupakan BCK-aljabar implikatif positif. ■

Proposisi 3.7. *Himpunan kuadrupel neutrosofik $NQ(X)$ yang merupakan BCK-aljabar implikatif positif juga memenuhi pernyataan berikut:*

$$\text{untuk semua } \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{o} \in NQ(X), \tilde{m} \odot \tilde{n} \ll \tilde{o} \rightarrow \tilde{m} \odot \tilde{o} \ll \tilde{n} \odot \tilde{o}. \quad (3.1)$$

$$\text{untuk semua } \tilde{m}, \tilde{n} \in NQ(X), \tilde{m} \odot \tilde{n} \ll \tilde{n} \rightarrow \tilde{m} \ll \tilde{n}. \quad (3.2)$$

Bukti. Untuk persamaan (3.1), misal $\tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{o} \in NQ(X)$ dengan

$$\tilde{m} \odot \tilde{n} \ll \tilde{o}.$$

Menurut Definisi $\ll$ dan karena $NQ(X)$ merupakan BCK-aljabar implikatif positif, diperoleh

$$\tilde{0} = (\tilde{m} \odot \tilde{n}) \odot \tilde{o} = (\tilde{m} \odot \tilde{o}) \odot (\tilde{n} \odot \tilde{o}).$$

Jadi

$$(\tilde{m} \odot \tilde{o}) \ll (\tilde{n} \odot \tilde{o}).$$

Untuk persamaan (3.2), asumsikan $\tilde{m} \odot \tilde{n} \ll \tilde{n}$. Dengan mengganti $\tilde{o} = \tilde{n}$ pada (3.1) diperoleh

$$\tilde{m} \odot \tilde{n} \ll \tilde{n} \odot \tilde{n} = \tilde{0}.$$

Menurut Teorema 3.5,

$$\tilde{m} \odot \tilde{m} = \tilde{0},$$

sehingga diperoleh

$$\tilde{m} \odot \tilde{n} = \tilde{0}.$$

Akibatnya,

$$\tilde{m} \ll \tilde{n}$$ ■

Misalkan X BCK/BCI-aljabar, $a, b \in X$, dan U dan V subhimpunan dari X. Definisikan himpunan berikut:

$$NQ(a, V) = \{(a, aT, eI, fF) \in NQ(X) | e, f \in V\}$$
$$NQ(U, b) = \{(c, dT, bI, bF) \in NQ(X) | c, d \in U\},$$

dan

$$NQ(U, V) = \{(c, dT, eI, fF) \in NQ(X) c, d \in U\,; e, f \in V\}.$$

Kemudian definisikan

$$NQ(U^*, V) = \bigcup_{a \in U} NQ\,(a, V)$$

dan

$$NQ(U, V^*) = \bigcup_{b \in V} NQ\,(U, b)$$

Himpunan $NQ(U, U)$ dinotasikan sebagai $NQ(U)$.

Proposisi 3.8. *Misalkan X BCK/BCI-aljabar. Untuk semua $a, b \in X$ dan subhimpunan U dan V dari X berlaku:*

$$NQ(U^*, V) \subseteq NQ(U, V) \text{ dan } NQ(U, V^*) \subseteq NQ(U, V).$$

Bukti. Menurut Definisi jelas berlaku $NQ(a, V) \subseteq NQ(U, V)$ untuk setiap $a \in U$, dan akibatnya,

$$NQ(U^*, V) = \bigcup_{a \in U} NQ(a, V) \subseteq NQ(U, V).$$

Menggunakan cara yang sama bisa disimpulkan

$$NQ(U, V^*) \subseteq NQ(U, V).$$ ■

Teorema 3.9. *Jika U dan V merupakan subaljabar dari BCK/BCI-aljabar X, maka himpunan $NQ(U, V)$ merupakan subaljabar dari $NQ(X)$, yang disebut kuadrupel neutrosofik subaljabar.*

Bukti. Asumsikan U dan V subaljabar dari BCK/BCI-aljabar X. Misalkan $\tilde{d} = (d_1, d_2T, d_3I, d_4F)$ dan $\tilde{e} = (e_1, e_2T, e_3I, e_4F) \in NQ(U, V)$. Oleh karena itu, $d_1, d_2, e_1, e_2 \in U$ dan $d_3, d_4, e_3, e_4 \in V$. Karena U dan V subaljabar, $d_1 * e_1 \in U, d_2 * e_2 \in U, d_3 * e_3 \in V$ dan $d_4 * e_4 \in V$. Jadi,

$$\tilde{d} \odot \tilde{e} = (d_1 * e_1, (d_2 * e_2)T, (d_3 * e_3)I, (d_4 * e_4)F) \in NQ(U, V),$$

sehingga $NQ(U, V)$ merupakan subaljabar dari $NQ(X)$. ■

Teorema 3.10. *Jika U dan V merupakan ideal pada BCK/BCI-aljabar X, maka himpunan $NQ(U, V)$ juga merupakan ideal pada $NQ(X)$, yang disebut ideal kuadrupel neutrosofik.*

Bukti. Asumsikan U dan V ideal pada BCK/BCI-aljabar X. Menurut Proposisi 3.8, jelaslah $\tilde{0} \in NQ(U, V)$, sebab ideal U dan V pasti memuat 0. Misalkan $\tilde{d} = (d_1, d_2T, d_3I, d_4F)$ dan $\tilde{e} = (e_1, e_2T, e_3I, e_4F) \in NQ(X)$ sedemikian hingga $\tilde{d} \odot \tilde{e} \in NQ(U, V)$ dan $\tilde{e} \in NQ(U, V)$. sebab

$$\tilde{d} \odot \tilde{e} = (d_1 * e_1, (d_2 * e_2)T, (d_3 * e_3)I, (d_4 * e_4)F),$$

maka $d_1 * e_1 \in U, d_2 * e_2 \in U, d_3 * e_3 \in V$ dan $d_4 * e_4 \in V$. Karena $\tilde{e} \in NQ(U, V)$, maka $e_1, e_2 \in U$ dan $e_3, e_4 \in V$. Karena U dan V ideal pada X, ini mengakibatkan $d_1, d_2 \in U$ serta $d_1, d_2 \in V$, sehingga $\tilde{d} \in NQ(U, V)$, dengan kata lain, $NQ(U, V)$ merupakan ideal pada $NQ(X)$. ■

Mudah diverifikasi bahwa setiap ideal merupakan subaljabar pada BCK-aljabar.

Bukti. Misalkan I ideal pada BCK-aljabar X, dan misalkan $z, a \in I$. Dengan menggunakan Proposisi 2.5.(ii),

$$(z * a) * z = (z * z) * a.$$

Berdasarkan Aksioma (III), ini setara oleh

$$(z * a) * z = 0 * a = 0$$

Jadi, karena $0 \in I$ dan $u \in I$, dengan Definisi ideal, dapat disimpulkan bahwa $z * a \in I$. ■

Oleh karena itu, Teorema 3.10 menghasilkan akibat berikut.

Akibat 3.11. *Jika U dan V merupakan ideal pada BCK-aljabar X, maka $NQ(U, V)$ merupakan subaljabar pada $NQ(X)$.*

Contoh di bawah ini menunjukkan bahwa Akibat 3.11 tidak benar dalam BCI-aljabar.

Misalkan $U = \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan $V = \mathbb{Z}$. Menurut Teorema 3.10, $NQ(U, V)$ merupakan ideal pada $NQ(\mathbb{Z})$. Misalkan $\tilde{d} = (d_1, d_2T, d_3I, d_4F)$ dan $\tilde{e} =$

$(e_1, e_2T, e_3I, e_4F) \in NQ(U,V)$. Maka $d_1 - e_1, d_2 - e_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan $d_3 - e_3, d_4 - e_4 \in \mathbb{Z}$. Kemudian kita punya $e_1, e_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan $e_3, e_4 \in \mathbb{Z}$. Karena $e_1, e_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan $d_1 - e_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sementara elemen pengurangnya juga $\in \mathbb{N} \cup \{0\}$, maka elemen yang dikurangi harus juga $\in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sehingga $d_1, d_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Akan tetapi, BCI-aljabar $(\mathbb{Z}, -, 0)$ bukan BCK-aljabar saat terdapat suatu elemen tertentu misalkan $d = -10$, maka diperoleh

$$0 - 10 = -10 \neq 0,$$

sehingga BCI-aljabar $(\mathbb{Z}, -, 0)$ bukan BCK-aljabar.

Contoh berikut bukan subaljabar pada $NQ(\mathbb{Z})$ karena,

$$(2, 3T, -5I, 6F) \odot (3, 5T, 6I, -7F) = (-1, -2T, -11I, 13F) \notin NQ(U,V)$$

Untuk $(2, 3T, -5I, 6F)$ dan $(3, 5T, 6I, -7F) \in NQ(U,V)$.

Teorema 3.12. *Jika U dan V ideal tertutup pada BCI-aljabar X, maka himpunan $NQ(U,V)$ juga merupakan ideal tertutup pada $NQ(X)$.*

Bukti. Misalkan U dan V merupakan ideal tertutup pada BCI-aljabar X. Maka himpunan $NQ(U,V)$ juga merupakan ideal pada $NQ(X)$ berdasarkan Teorema 3.10. Misalkan $\tilde{k} = (k_1, k_2T, k_3I, k_4F) \in NQ(U,V)$. Karena U dan V ideal tertutup, untuk setiap $k_1, k_2 \in U$ dan $k_3, k_4 \in V$ berlaku

$$0 * k_1, 0 * k_2 \in U \text{ dan } 0 * k_3, 0 * k_4 \in V$$

Oleh karena itu,

$$\tilde{0} \odot \tilde{k} = (0 * k_1, (0 * k_2)T, (0 * k_3)I, (0 * k_4)F) \in NQ(U,V).$$

Dari hasil ini dapat disimpulkan bahwa ideal tertutup pada $NQ(X)$. ■

Jadi, Teorema 3.12 mengakibat hasil berikut:

Akibat 3.13. *Jika U dan V ideal tertutup pada BCI-aljabar X, maka himpunan $NQ(U,V)$ merupakan subaljabar pada $NQ(X)$.*

Pada contoh berikut, kita tahu bahwa terdapat ideal U dan V pada BCI-aljabar X sedemikian hingga $NQ(U,V)$ bukan ideal tertutup pada $NQ(X)$.

Contoh D. Misalkan $U = Y \times \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan $V = \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dengan mudah dapat diverifikasi bahwa U dan V merupakan ideal pada $X = Y \times \mathbb{Z}$. $NQ(U,V)$ merupakan *ideal* pada $NQ(X)$ diperoleh dari Teorema 3.10. Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\big((0,0), (0,0)T, (0,0)I, (0,0)F\big)$$
$$\odot \big((0,0), (0,1)T, (0,2)I, (0,3)F\big)$$
$$= \big((0,0), (0,-1)T, (0,-2)I, (0,-3)F\big) \notin NQ(U,V),$$

sebab $-1, -2, -1 \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, sehingga ideal $NQ(U,V)$ tidak tertutup pada $NQ(X)$.

Lemma 3.14. *Misalkan a dan b merupakan elemen BCI-aljabar X dan misalkan*

$$U_a = \{k \in X \mid a * k = a\}. \quad (3.3)$$

Maka U_a merupakan ideal pada BCI-aljabar X.

Bukti. Karena X merupakan BCI-aljabarserta $a, b \in X$ maka berlaku $a * 0 = a$ dan $b * 0 = b$, sehingga $0 \in U_a$ dan $0 \in V_b$.

Misalkan $k, l \in X$, $k * l \in U_a$ serta $l \in U_a$. Maka $a * (k * l) = a$ dan $a * l = a$. Berdasarkan Proposisi 2.2, Aksioma (III), dan Proposisi 2.5(ii) didapat

$$0 = 0 * k = (a * a) * k = (a * k) * a,$$

jadi $(a * k) \leq a$. Selain itu, menurut Aksioma (I), dan Proposisi 2.5(ii) diperoleh,

$$a * (a * k) = \big(a * (k * l)\big) * (a * k)$$
$$= \big(a * (a * k)\big) * (k * l)$$
$$= \big((a * l) * (a * k)\big) * (k * l) = 0,$$

sehingga $a \leq (a * k)$.

Dari dua hasil terakhir ini dapat disimpulkan, dengan Aksioma (IV) $(a * k) = a$. Jadi, k elemen U_a. Dengan kata lain, U_a merupakan ideal pada X. ■

Teorema 3.15. *Misalkan a dan b elemen pada BCI-aljabar X, dan misalkan U_a dan U_b seperti pada Lemma 3.14. Maka $NQ(U_a, U_b)$ merupakan ideal tertutup pada $NQ(X)$.*

Bukti. Dengan Lemma 3.14 dan Teorema 3.10, jelas bahwa $NQ(U_a, U_b)$ merupakan ideal pada $NQ(X)$. Untuk menunjukkan ketertutupannya, misalkan $\tilde{d} = (d_1, d_2T, d_3I, d_4F) \in NQ(U_a, U_b)$, Maka $d_1, d_2 \in U_a$dan $d_3, d_4 \in U_b$.

Perhatikan bahwa jika $d \in U_a$, maka

$$0 * d = (a * a) * d = (a * d) * a = a * a = 0,$$

berdasarkan Aksioma (III) dan Proposisi 2.5(ii). Dengan jalan sama, dapat disimpulkan $0 * y = 0$. Karena itu,

$$\tilde{0} \odot \tilde{d} = (0 * d_1, (0 * d_2)T, (0 * d_3)I, (0 * d_4)F)$$
$$= (0, 0T, 0I, 0F) \in NQ(U_a, U_b),$$

sehingga $NQ(U_a, V_b)$ merupakan ideal tertutup pada $NQ(X)$. ■

Proposisi 3.16. *Jika U dan V ideal pada BCK-aljabar X, maka $NQ(U) \cap NQ(V) = \{\tilde{0}\}$ jika dan hanya jika*

$$\textit{Untuk semua } \tilde{d} \in NQ(U), \tilde{e} \in NQ(V)$$
$$(\tilde{d} \odot \tilde{e} = \tilde{d}).$$

Bukti. ($\Rightarrow$) Asumsikan bahwa $NQ(U) \cap NQ(V) = \{\tilde{0}\}$. Misalkan

$$\tilde{d} = (d_1, d_2T, d_3I, d_4F) \in NQ(U)$$

dan

$$\tilde{e} = (e_1, e_2T, e_3I, e_4F) \in NQ(V).$$

Menurut Teorema 3.5, $NQ(X)$ adalah BCI-aljabar, sehingga dengan Aksioma (II) diperoleh

$$\tilde{d} \odot (\tilde{d} \odot \tilde{e}) \ll \tilde{e},$$

dan dengan Proposisi 2.5(ii) dan Aksioma (III) juga diperoleh

$$\tilde{d} \odot (\tilde{d} \odot \tilde{e}) \ll \tilde{d}.$$

Hal ini berarti $\tilde{x} \odot (\tilde{x} \odot \tilde{y}) \in NQ(U) \cap NQ(V)$, sebab $NQ(U)$ dan $NQ(V)$ ideal dengan $\tilde{d} \in NQ(U)$ dan $\tilde{e} \in NQ(V)$. Berdasarkan asumsi kesimpulan yang dihasilkan ialah $\tilde{d} \odot (\tilde{d} \odot \tilde{e}) = \tilde{0}$, sehingga $\tilde{d} \leq \tilde{d} \odot \tilde{e}$. Jelaslah dengan Proposisi 2.5(ii) dan Aksioma (V) bahwa

$$(\tilde{d} \odot \tilde{e}) \odot \tilde{d} = (\tilde{d} \odot \tilde{d}) \odot \tilde{e} = \tilde{0} \odot \tilde{e} = \tilde{0},$$

sehingga $\tilde{d} \odot \tilde{e} \leq \tilde{d}$. Jadi, $\tilde{d} \odot \tilde{e} = \tilde{d}$. ■

($\Leftarrow$) Asumsikan $\tilde{d} \odot \tilde{e} = \tilde{d}$ untuk semua $\tilde{d} \in NQ(U)$ serta $\tilde{e} \in NQ(V)$. Misalkan $\tilde{f} \in NQ(U) \cap NQ(V)$. Maka $\tilde{f} \in NQ(U)$ dan $\tilde{f} \in NQ(V)$. Dari asumsi jelaslah dapat didapat kesamaan: $\tilde{f} = \tilde{f} \odot \tilde{f} = \tilde{0}$, sehingga $NQ(U) \cap NQ(V) = \{\tilde{0}\}$. ■

Teorema 3.17. *Misalkan U dan V subhimpunan dari BCK-aljabar X sedemikian hingga*

$$\textit{Untuk semua } a, b \in U \cap V, K(a,b) \subseteq U \cap V, \tag{3.4}$$

di mana $K(a,b) = \{d \in X \mid d * a \leq b\}$. Maka himpunan $NQ(U,V)$ merupakan ideal pada $NQ(X)$.

Bukti. Jika $d \in U \cap V$, maka $0 \in K(d,d)$, karena $0 * d = 0 \leq d$, sehingga $0 \in U \cap V$ dengan persamaan (3.4). Karena itu, $\tilde{0} \in NQ(U,V)$. Misalkan $\tilde{d} = (d_1, d_2T, d_3I, d_4F)$ dan $\tilde{e} = (e_1, e_2T, e_3I, e_4F)$ sedemikian hingga $\tilde{d} \odot \tilde{e} \in NQ(U,V)$ dan $\tilde{e} \in NQ(U,V)$. Maka

$$\tilde{d} \odot \tilde{e} = (d_1 * e_1, (d_2 * e_2)T, (d_3 * e_3)I, (d_4 * e_4)F)$$

dengan $d_1 * e_1 \in U$, $d_2 * e_2 \in U$, $d_3 * e_3 \in V$ dan $d_4 * e_4 \in V$, sehingga berdasarkan Aksioma (II) dan (3.4) kita punya $d_1 \in K(d_1 * e_1, e_1) \subseteq U \cap V \subseteq U$, $d_2 \in K(d_2 * e_2, e_2) \subseteq U \cap V \subseteq U$, $d_3 \in K(d_3 * e_3, e_3) \subseteq U \cap V \subseteq V$ dan $d_4 \in K(d_4 * e_4, e_4) \subseteq U \cap V \subseteq V$. Hal ini mengakibatkan $\tilde{d} = (d_1, d_2T, d_3I, d_4F) \in NQ(U,V)$. Jadi, $NQ(U,V)$ merupakan ideal pada $NQ(X)$. ■

Akibat 3.18. *Jika U dan V subhimpunan dari BCK-aljabar X sedemikian sehingga untuk semua $a, d, e \in X$,*

$$(d, e \in U \cap V, (a * d) * e = 0 \implies a \in U \cap V), \tag{3.5}$$

maka $NQ(U,V)$ merupakan ideal pada $NQ(X)$.

Teorema 3.19. *Misalkan U dan V subhimpunan tak kosong pada BCK-aljabar X sedemikian sehingga untuk semua $a, d, e \in X$,*

$$(d, e \in U \text{ (atau } V), a * d \leq e = 0 \implies a \in U \text{ (atau } V)). \tag{3.6}$$

Maka $NQ(U,V)$ merupakan ideal pada $NQ(X)$.

Bukti. Asumsikan bahwa syarat yang dinyatakan pada persamaan (3.6) valid untuk subhimpunan tak kosong U dan V dari X. Dengan Aksioma (V), $0 * d = 0 \leq d$ untuk setiap $d \in U$ (atau V), sehingga dengan persamaan (3.6), $0 \in U$ (atau V) dan oleh sebab itu, $\tilde{0} \in NQ(U,V)$. Jika $\tilde{d} = (d_1, d_2T, d_3I, d_4F)$ dan $\tilde{e} = (e_1, e_2T, e_3I, e_4F)$ di $NQ(X)$ sedemikian hingga $\tilde{d} \odot \tilde{e} \in NQ(U,V)$ dan $\tilde{e} \in U$ (atau V), maka

$$\tilde{d} \odot \tilde{e} = (d_1 * e_1, (d_2 * e_2)T, (d_3 * e_3)I, (d_4 * e_4)F)$$

dengan $d_1 * e_1 \in U$, $d_2 * e_2 \in U$, $d_3 * e_3 \in V$ dan $d_4 * e_4 \in V$. Perhatikan bahwa dengan Aksioma (II), kita punya $d_r * (d_r * e_r) \leq e_r$ untuk $r = 1, 2, 3, 4$. Dengan demikian persamaan (3.6) mengakibatkan bahwa $d_1, d_2 \in U$ dan $d_3, d_4 \in V$. Jadi,

$$\tilde{d} = (d_1, d_2T, d_3I, d_4F) \in NQ(U,V).$$

Karena itu, $NQ(U,V)$ merupakan ideal pada $NQ(X)$. ■

Teorema 3.20. *Jika U dan V ideal implikatif positif pada BCK-aljabar X, maka $NQ(U,V)$ adalah ideal implikatif positif pada $NQ(X)$.*

Bukti. Asumsikan bahwa U dan V ideal implikatif positif pada BCK-aljabar X, Jelaslah $\tilde{0} \in NQ(U,V)$, sebab $0 \in U \cap V$. Selanjutnya, misalkan $\tilde{d} = (d_1, d_2T, d_3I, d_4F)$, $\tilde{e} = (e_1, e_2T, e_3I, e_4F)$ dan $\tilde{f} = (f_1, f_2T, f_3I, f_4F) \in NQ(X)$ sedemikian hingga $(\tilde{d} \odot \tilde{e}) \odot \tilde{f} \in NQ(U,V)$ dan $\tilde{e} \odot \tilde{f} \in NQ(U,V)$. Maka

$$(\tilde{d} \odot \tilde{e}) \odot \tilde{f} = \big((d_1 * e_1) * f_1, ((d_2 * e_2) * f_2)T, ((d_3 * e_3) * f_3)I, ((d_4 * e_4) * f_4)F\big)$$

dengan $(d_1 * e_1) * f_1 \in U$, $(d_2 * e_2) * f_2 \in U$, $(d_3 * e_3) * f_3 \in V$, $(d_4 * e_4) * f_4 \in V$ dan

$$\tilde{e} \odot \tilde{f} = (e_1 * f_1, (e_2 * f_2)T, (e_3 * f_3)I, (e_4 * f_4)F),$$

dengan $e_1 * f_1 \in U$, $e_2 * f_2 \in U$, $e_3 * f_3 \in V$, dan $e_4 * f_4 \in V$. Karena U dan V ideal implikatif positif pada X, dapat disimpulkan bahwa $d_1 * f_1, d_2 * f_2 \in U$ dan $d_3 * f_3, d_4 * f_4 \in V$ sehingga

$$\tilde{d} \odot \tilde{f} = \big((d_1 * f_1), (d_2 * f_2)T, (d_3 * f_3)I, (d_4 * f_4)F\big) \in NQ(U,V).$$

Jadi $NQ(U,V)$ merupakan ideal implikatif positif pada $NQ(X)$. ∎

Teorema 3.21. *Misalkan U dan V ideal pada BCK-aljabar X sedemikian sehingga untuk semua $d,e,f \in X$,*

$$\big((d * e) * f \in U\ (atau\ V) \Rightarrow (d * f) * (e * f) \in U\ (atau\ V)\big). \quad (3.7)$$

Maka $NQ(U,V)$ merupakan ideal implikatif positif pada $NQ(X)$.

Bukti. Karena U dan V ideal pada X, berdasarkan Teorema 3.10 diketahui bahwa $NQ(U,V)$ merupakan ideal pada $NQ(X)$. Selanjutnya, misalkan $\tilde{d} = (d_1, d_2T, d_3I, d_4F)$, $\tilde{e} = (e_1, e_2T, e_3I, e_4F)$ dan $\tilde{f} = (f_1, f_2T, f_3I, f_4F) \in NQ(X)$ sedemikian hingga $(\tilde{d} \odot \tilde{e}) \odot \tilde{f} \in NQ(U,V)$ dan $\tilde{e} \odot \tilde{f} \in NQ(U,V)$. Maka

$$(\tilde{d} \odot \tilde{e}) \odot \tilde{f} = \big((d_1 * e_1) * f_1, ((d_2 * e_2) * f_2)T, ((d_3 * e_3) * f_3)I, ((d_4 * e_4) * f_4)F\big),$$

dengan $(d_1 * e_1) * f_1 \in U$, $(d_2 * e_2) * f_2 \in U$, $(d_3 * e_3) * f_3 \in V$, $(d_4 * e_4) * f_4 \in V$ dan

$$\tilde{e} \odot \tilde{f} = (e_1 * f_1, (e_2 * f_2)T, (e_3 * f_3)I, (e_4 * f_4)F),$$

dengan $e_1 * f_1 \in U$, $e_2 * f_2 \in U$, $e_3 * f_3 \in V$, dan $e_4 * f_4 \in V$. Persamaan (3.7) mengakibatkan $(d_1 * f_1) * (e_1 * f_1) \in U$, $(d_2 * f_2) * (e_2 * f_2) \in U$, $(d_3 * f_3) * (e_3 * f_3) \in V$ dan $(d_4 * f_4) * (e_4 * f_4) \in V$. Karena U dan V ideal pada X, maka $d_1 * f_1$, $d_2 * f_2 \in U$ dan $d_3 * f_3$, $d_4 * f_4 \in V$ sehingga

$$\tilde{d} \odot \tilde{f} = \big((d_1 * f_1), (d_2 * f_2)T, (d_3 * f_3)I, (d_4 * f_4)F\big) \in NQ(U,V).$$

Oleh karena itu, $NQ(U,V)$ merupakan ideal implikatif positif pada $NQ(X)$. ∎

Akibat 3.22. *Misalkan U dan V ideal pada BCK-aljabar X sedemikian sehingga untuk $d,e \in X$,*

$$\big((d * e) * e \in U \text{ (atau } V) \Rightarrow d * e \in U \text{ (atau } V)\big). \quad (3.8)$$

Maka $NQ(U,V)$ merupakan ideal implikatif positif pada $NQ(X)$.

Bukti. Misalkan $(d * e) * f \in U$ (atau V). Dengan Proposisi 2.5(ii),

$$\big((d * (e * f)) * f\big) * f = \big((d * f) * (e * f)\big) * f, \quad (3.9)$$

serta dengan Proposisi 2.5(iii-iv) juga,

$$\big((d * f) * (e * f)\big) * f \leq (d * e) * f.$$

Karena $(d * e) * f \in U$ (atau V), dan U dan V ideal,

$$\big((d * f) * (e * f)\big) * f \in U \text{ (atau } V).$$

Dari persamaan (3.9) dan (3.8), dan dengan Proposisi 2.5(ii) didapat

$$(d * f) * (e * f) = \big(d * (e * f)\big) * f \in U \text{ (atau } V).$$

Oleh sebab itu persamaan (3.7) dan Teorema 3.21 berlaku, sehingga $NQ(U,V)$merupakan ideal implikatif positif pada $NQ(X)$. ∎

Teorema 3.23. *Misalkan U dan V subhimpunan dari BCK-aljabar X sedemikian hingga $0 \in U \cap V$ dan*

$$\big((d * e) * e\big) * f \in U\ (atau\ V), f \in U\ (atau\ V) \Rightarrow d * e \in U\ (atau\ V) \quad (3.10)$$

untuk semua $d,e,f \in X$. Maka himpunan $NQ(U,V)$ merupakan ideal implikatif positif pada $NQ(X)$.

Bukti. Karena $0 \in U \cap V$, jelaslah $\tilde{0} \in NQ(U,V)$. Kemudian, ita akan menunjukkan bahwa U dan V ideal pada BCK-aljabar X. Misalkan $d,e \in X$ sehingga $d * e \in U$ (atau V) dan $e \in U$ (atau V).

Subtitusikan $e = 0$ dan $f = e$ pada persamaan (3.10) dan gunakan Proposisi 2.2 diperoleh

$$\big((d * 0) * 0\big) * e = d * e \in U \text{ (atau } V).$$

Kemudian dengan persamaan (3.10) dan Proposisi 2.2 didapat

$$d * 0 = d \in U \text{ (atau } V).$$

Jadi, U dan V merupakan ideal pada BCK-aljabar X.

Misalkan $\tilde{d} = (d_1, d_2T, d_3I, d_4F)$, $\tilde{e} = (e_1, e_2T, e_3I, e_4F)$ dan $\tilde{f} = (f_1, f_2T, f_3I, f_4F) \in NQ(X)$ sedemikian hingga $(\tilde{d} \odot \tilde{e}) \odot \tilde{f} \in NQ(U,V)$ dan $\tilde{e} \odot \tilde{f} \in NQ(U,V)$. Maka

$$(\tilde{d} \odot \tilde{e}) \odot \tilde{f} = \Big(\big((d_1 * e_1) * f_1, \big((d_2 * e_2) * f_2\big)T, \big((d_3 * e_3) * f_3\big)I, \big((d_4 * e_4) * f_4\big)F\Big)$$

dengan $(d_1 * e_1) * f_1 \in U$, $(d_2 * e_2) * f_2 \in U$, $(d_3 * e_3) * f_3 \in V$, $(d_4 * e_4) * f_4 \in V$ dan

$$\tilde{e} \odot \tilde{f} = (e_1 * f_1, (e_2 * f_2)T, (e_3 * f_3)I, (e_4 * f_4)F),$$

dengan $e_1 * f_1 \in U$, $e_2 * f_2 \in U$, $e_3 * f_3 \in V$, dan $e_4 * f_4 \in V$. Perhatikan bahwa dengan Proposisi 2.5(iii-iv) diperoleh

$$\big((d_i * f_i) * f_i\big) * (e_i * f_i) \leq (d_i * e_i) * f_i = (d_i * f_i) * e_i,$$

sehingga dengan definisi $\leq$,

$$\Big(\big((d_i * f_i) * f_i\big) * (e_i * f_i)\Big) * \big((d_i * e_i) * f_i\big) = 0 \in U \text{ (atau } V).$$

untuk $i = 1, 2, 3, 4$. Karena $(d_i * e_i) * f_i \in U$ untuk $i = 1, 2$ dan $(d_j * e_j) * f_j \in V$, untuk $j = 3, 4$, dan karena U dan V ideal pada X, akibatnya $\big((d_i * f_i) * f_i\big) * (e_i * f_i) \in U$ untuk $i = 1, 2$ dan $\big((d_j * f_j) * f_j\big) * (e_j * f_j) \in V$ untuk $j = 3, 4$. Selain itu, karena $e_i * f_i \in U$ untuk $i = 1, 2$ dan $e_j * f_j \in V$ untuk $j = 3, 4$, berdasarkan persamaan (3.10), kita punya $d_1 * f_1 \in U, d_2 * f_2 \in U, d_3 * f_3 \in V$ dan $d_4 * f_4 \in V$, sehingga

$$\tilde{d} \odot \tilde{f} = \Big((d_1 * f_1), (d_2 * f_2)T, (d_3 * f_3)I, (d_4 * f_4)F\Big) \in NQ(U,V).$$

Jadi, $NQ(U,V)$ merupakan ideal implikatif positif pada $NQ(X)$. ∎

Teorema 3.24. *Misalkan U dan V subhimpunan pada BCK-aljabar X sedemikian hingga $NQ(U,V)$ merupakan ideal implikatif positif pada $NQ(X)$. Himpunan*

$$\Omega_{\tilde{a}} := \{\tilde{d} \in NQ(X) \mid \tilde{d} \odot \tilde{a} \in NQ(U,V)\} \quad (3.11)$$

merupakan ideal pada $NQ(X)$ untuk setiap $\tilde{a} \in NQ(X)$.

Bukti. Jelaslah bahwa $\tilde{0} \in \Omega_{\tilde{a}}$ sebab $NQ(X)$ merupakan BCK-aljabar (Teorema 3.5) dan $NQ(U,V)$ ideal pada $NQ(X)$ (Teorema 3.10). Misalkan $\tilde{d}, \tilde{e} \in NQ(X)$ sedemikian sehingga $\tilde{d} \odot \tilde{e} \in \Omega_{\tilde{a}}$ dan $\tilde{e} \in \Omega_{\tilde{a}}$. Oleh sebab itu $(\tilde{d} \odot \tilde{e}) \odot \tilde{a} \in NQ(U,V)$ dan $\tilde{e} \odot \tilde{a} \in NQ(U,V)$. Sebab $NQ(U,V)$ ideal implikatif positif pada $NQ(X)$, $\tilde{d} \odot \tilde{a} \in NQ(U,V)$. Dengan demikian, $\tilde{x} \in \Omega_{\tilde{a}}$ sehingga $\Omega_{\tilde{a}}$ adalah ideal pada $NQ(X)$. ∎

Dengan menggabungkan Teorema 3.23 dan 3.24, dihasilkan Akibat berikut ini.

Akibat 3.25. *Jika U dan V subhimpunan pada BCK-aljabar X, yang memenuhi $\tilde{0} \in NQ(U,V)$ dan persamaan (3.10), maka himpunan $\Omega_{\tilde{a}}$ pada persamaan (3.11) merupakan ideal pada $NQ(X)$ untuk semua $\tilde{a} \in NQ(X)$.*

Teorema 3.26. *Untuk setiap subhimpunan U dan V pada BCK-aljabar X, jika himpunan $\Omega_{\tilde{a}}$ pada persamaan (3.11) merupakan ideal untuk semua $\tilde{a} \in NQ(X)$, maka $NQ(U,V)$ merupakan ideal implikatif positif pada $NQ(X)$.*

Bukti. Karena $\Omega_{\tilde{a}}$ ideal, jelaslah bahwa $\tilde{0} \in \Omega_{\tilde{a}}$, sehingga $\tilde{0} = \tilde{0} \odot \tilde{a} \in NQ(U,V)$. Misalkan $\tilde{d}, \tilde{e}, \tilde{f} \in NQ(X)$ sedemikian hingga $(\tilde{d} \odot \tilde{e}) \odot \tilde{f} \in NQ(U,V)$ dan $\tilde{e} \odot \tilde{f} \in NQ(U,V)$. Maka $\tilde{d} \odot \tilde{e} \in \Omega_{\tilde{z}}$ dan $\tilde{e} \in \Omega_{\tilde{z}}$. Karena $\Omega_{\tilde{z}}$ ideal pada $NQ(X)$, berlaku $\tilde{d} \in \Omega_{\tilde{z}}$. Jadi, $\tilde{d} \odot \tilde{f} \in NQ(U,V)$, sehingga $NQ(U,V)$ merupakan ideal implikatif positif pada $NQ(X)$. ∎

Teorema 3.27. *Untuk setiap ideal U dan V pada BCK-aljabar X dan untuk setiap $\tilde{a} \in NQ(X)$, jika himpunan $\Omega_{\tilde{a}}$ pada persamaan (3.11) merupakan ideal pada $NQ(X)$, maka $NQ(X)$ merupakan BCK-aljabar implikatif positif.*

Bukti. Misalkan Ω ideal pada $NQ(X)$ dan untuk setiap $\tilde{d}, \tilde{e}, \tilde{f} \in NQ(X)$, asumsikan $(\tilde{d} \odot \tilde{e}) \odot \tilde{f} \in \Omega$ dan $\tilde{e} \odot \tilde{f} \in \Omega$. Kemudian $\tilde{d} \odot \tilde{e} \in \Omega_{\tilde{z}}$ serta $\tilde{e} \in \Omega_{\tilde{z}}$. Karena $\Omega_{\tilde{z}}$ merupakan ideal pada $NQ(X)$, akibatnya, $\tilde{d} \in \Omega_{\tilde{z}}$, sehingga $\tilde{d} \odot \tilde{f} \in \Omega$, yang menunjukkan bahwa Ω adalah merupakan ideal implikatif positif pada $NQ(X)$. Jadi, berdasarkan

Lemma 2.13, $NQ(X)$ merupakan BCK-aljabar implikatif positif. ∎

KESIMPULAN

Dengan menggunakan konsep BCK-aljabar telah dikonstruksi pengaplikasian BCK-aljabar pada himpunan kuadrupel neutrosofik dan pada artikel ini diperkenalkan bilangan kuadrupel neutrosofik dalam BCK-aljabar pada suatu himpunan untuk mengkonstruksi BCK-aljabar kuadrupel neutrosofik. Diselidiki beberapa sifat dan teori ideal pada BCK-aljabar kuadrupel neutrosofik, kemudian ideal tertutup dalam BCK-aljabar kuadrupel neutrosofik. Jika diberikan himpunan U dan V merupakan subaljabar pada BCK-aljabar X , maka himpunan $NQ(U,V)$ merupakan subaljabar pada $NQ(X)$ yang disebut kuadrupel neutrosofik subaljabar pada Teorema 3.9. Digunakan subhimpunan U dan V pada BCK-aljabar kuadrupel neutrosofik, diberikan himpunan $NQ(U,V)$ yang terdiri dari bilangan kuadrupel neutrosofik BCK-aljabar dengan suatu kondisi. Telah dijelaskan syarat untuk menetapkan himpunan $NQ(U,V)$untuk menjadi ideal kuadrupel neutrosofik terbukti pada Teorema 3.10 dan menjadikan ideal implikatif positif pada BCK-aljabar kuadrupel neutrosofik yang terbukti pada Teorema 3.20. Dijelaskan bahwa himpunan $NQ(U,V)$ merupakan ideal tertutup pada BCK-aljabar kuadrupel neutrosofik pada Teorema 3.12.

SARAN

Dalam artikel ini, telah dibahas bilangan kuadrupel neutrosofik pada BCK-aljabar X, mengkaji himpunan $NQ(U,V)$ yang terdiri atas bilangan kuadrupel neutrosofik BCK-aljabar dengan suatu kondisi dan syarat untuk menetapkan himpunan $NQ(U,V)$ menjadi ideal, ideal tertutup dan ideal positif implikatif pada BCK-aljabar kuadrupel neutrosofik. Dengan demikian saran untuk penelitian selanjutnya yaitu mengkaji bilangan kuadrupel neutrosofik pada struktur aljabar lainnya serta membahas apakah syarat-syarat yang sama berlaku.

DAFTAR PUSTAKA

1. Y. B. Jun , S. Z.Song , F. Smarandache and H. Bordba. (2018). Neutrosophic Quadruple BCK/BCI-Algebras.
2. G. Muhiuddin, G. Muhiuddin's Notes: Ideal in BCK-Algebra.
3. Iséki, K. On BC I-algebras. Math. Semin. Notes 1980, 8, 125–130. Axioms 2018, 7, 41 16 of 16
4. Huang, Y. BCI-Algebra; Science Press: Beijing, China, 2006.
5. Iséki, K. On BC I-algebras. Math. Semin. Notes 1980, 8, 125–130. Axioms 2018, 7, 41 16 of 16
6. Iséki, K.; Tanaka, S. An introduction to the theory of BCK-algebras. Math. Jpn. 1978, 23, 1–26.
7. Jun, Y.B. Neutrosophic subalgebras of several types in BCK/BCI-algebras. Ann. Fuzzy Math. Inform. 2017, 14, 75–86.
8. Jun, Y.B.; Kim, S.J.; Smarandache, F. Interval neutrosophic sets with applications in BCK/BC I-algebra. Axioms 2018, 7, 23.
9. Jun, Y.B.; Smarandache, F.; Song, S.Z.; Khan, M. Neutrosophic positive implicative N - ideals in BCK/BCI-algebras. Axioms 2018, 7, 3.
10. Smarandache, F. Neutrosophy, Neutrosophic Probability, Set, and Logic, ProQuest Information & Learning, Ann Arbor, Michigan, USA, p. 105, 1998.
11. Smarandache, F. Neutrosophic set—A generalization of the intuitionistic fuzzy set. Int. J. Pure Appl. Math. 2005, 24, 287–297.