MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 10 No 02
Tahun 2022

MODEL PENILAIAN OPSI SAHAM KARYAWAN DENGAN STRATEGI LINDUNG NILAI YANG MEMPERTIMBANGKAN FITUR *VESTING PERIOD* DAN PEMUTUSAN HUBUNGAN KERJA

Megita Adiska Putri
Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : megita.18035@mhs.unesa.ac.id

Rudianto Artiono
Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
Penulis Korespondensi : rudiantoartiono@unesa.ac.id

Abstrak

Investasi keuangan dapat dilakukan dengan berbagai alternatif, diantaranya dengan kontrak opsi. Beberapa perusahaan di Indonesia juga telah menerapkan investasi kontrak opsi yaitu pemberian opsi yang ditujukan menyeluruh kepada semua karyawan tanpa proses seleksi, atau dapat pula dilakukan melalui proses seleksi berdasarkan jabatan maupun kriteria-kriteria tertentu yang bersifat kualitatif. Penentuan opsi yang diberikan kepada karyawan mempertimbangkan beberapa hal berikut, yaitu pemutusan hubungan kerja serta risiko *vesting period*. Secara teknis, pemegang opsi menghadapi masalah kontrol stokastik dengan penghentian optimal. Masalah ini kemudian dirumuskan sebagai masalah batas bebas. Selanjutnya, perusahaan akan menggunakan batasan ini untuk menemukan biaya penerbitan opsi. Metode yang penulis gunakan adalah metode penentuan nilai dari OSK yang dapat dilaksanakan lebih awal kepada karyawan sehingga diperoleh solusi untuk masalah batas bebas nonlinier yang terkait dengan waktu *exercise*. Penelitian ini menghasilkan model matematika yang dapat digunakan untuk menentukan harga dari suatu opsi saham karyawan yang mengalami risiko *vesting period* dan pemutusan hubungan kerja.
Kata Kunci: Opsi Saham Karyawan, Lindung Nilai, Risiko Vesting Period dan Pemutusan Hubungan Kerja.

Abstract

Financial investments can be made with various alternatives, including option contracts. Several companies in Indonesia have also implemented option contract investments, namely the granting of options that are comprehensively aimed at all employees without a selection process, or it can also be done through a selection process based on position or certain qualitative criteria. Determining the options given to employees takes into account the following factors, namely termination of employment and the risk of the vesting period. Technically, the option holder faces a stochastic control problem with optimal termination. This problem is then formulated as a free boundary problem. Next, the company will use this constraint to find the cost of issuing options. The method that the author uses is the method of determining the value of OSK which can be carried out earlier to employees so that a solution is obtained for the nonlinear free limit problem related to exercise time. This study produces a mathematical model that can be used to determine the price of a stock option for employees who are at risk of vesting period and termination of employment.
Keywords: *Employee Stock Option, Hedging, Effects of Vesting Period and Job Termination Risk*

PENDAHULUAN

Investasi keuangan dapat dilakukan dengan berbagai alternatif, diantaranya dengan kontrak opsi. Perdagangan opsi saat ini telah menyebar di seluruh dunia, tidak hanya di Chicago Board of Option Exchange ataupun New York Stock Exchange saja, tetapi telah sampai di London, Montreal, Paris, Sydney, Amsterdam, Stockholm, maupun Geneva. Untuk kawasan Asia, opsi telah diperdagangkan di Jepang, India, Singapura, maupun Malaysia (Kusumahadi & Sastika, 2015). Beberapa perusahaan di Indonesia juga telah menerapkan investasi kontrak opsi, pemberian opsi ditujukan menyeluruh kepada semua karyawan tanpa proses seleksi, atau dapat pula dilakukan melalui proses seleksi berdasarkan jabatannya maupun kriteria-kriteria tertentu yang bersifat kualitatif. Bagi perusahaan, opsi ini dapat pula digunakan sebagai alat untuk menahan karyawan dengan talenta terbaik agar tidak meninggalkan perusahaan. Opsi yang dimaksud di sini merupakan suatu perjanjian yang memungkinkan pemiliknya untuk melakukan *call* (menjual) atau *put* (membeli) suatu saham dengan harga yang telah ditentukan pada waktu tertentu (Nurmawaddah, 2018; Irawan, Rosha, & Permana, 2019; Nurhani, 2020).

Salah satu jenis opsi saham adalah opsi saham karyawan (OSK) atau yang dikenal dengan *Employee Stock Options* yakni suatu opsi yang tidak dapat dijual maupun ditransfer oleh penerimanya di mana opsi ini dikeluarkan oleh perusahaan untuk memberi insentif dan penghargaan kepada karyawan. Dalam hal ini, karyawan berhak atas suatu opsi saham namun tidak berkewajiban untuk membelinya (Fitri, 2020; Gusnela & Ahmad, 2020).

Opsi saham dibedakan menjadi dua jenis yaitu *put option* dan *call option*. *Put option* adalah opsi saham yang memberikan hak kepada pemegangnya untuk menjual sejumlah tertentu saham suatu perusahaan kepada penjual opsi pada harga dan waktu tertentu. Sementara, *call option* adalah opsi saham yang memberikan hak kepada pembeli opsi untuk membeli dari penjual opsi berupa saham tertentu pada harga dan jangka waktu tertentu. Berdasarkan waktu jatuh temponya, opsi saham dapat dikelompokkan menjadi dua yaitu opsi tipe Eropa dan opsi tipe Amerika. Opsi tipe Eropa adalah opsi yang dapat dilaksanakan pada saat jatuh tempo saja, sedangkan opsi tipe Amerika adalah opsi yang dilaksanakan pada saat jatuh tempo atau sebelumnya (Maulida, *et al.* 2019).

Penentuan opsi yang diberikan kepada karyawan mempertimbangkan beberapa hal berikut, yaitu pemutusan hubungan kerja serta risiko *vesting period* (periode di mana karyawan tidak dapat mengeksekusi opsi yang dimilikinya). Pemutusan hubungan kerja sebelum jatuh tempo secara langsung mengarah ke *early exercise* (mengeksekusi opsi lebih cepat dari waktu jatuh tempo) dengan memaksa karyawan untuk menggunakan opsinya. Dalam penelitian ini, peneliti mempertimbangkan pemegang opsi dengan risiko pemutusan hubungan kerja untuk menghindari menjual opsi tetapi diperbolehkan untuk memperdagangkan aset. Dalam hal ini pemegang opsi dapat memutuskan kapan harus menggunakan opsi sehingga utilitas kekayaan yang diharapkannya maksimal. Akibatnya, pemegang opsi memperoleh batas *exercise*. Secara teknis, pemegang opsi menghadapi masalah kontrol stokastik dengan penghentian optimal. Masalah ini kemudian dirumuskan sebagai masalah batas bebas. Selanjutnya, perusahaan akan menggunakan batasan ini untuk menemukan biaya penerbitan opsi.

Batas *exercise* optimal karyawan berbeda dengan teori penetapan harga tanpa *arbitrage* karena yang terakhir mengasumsikan ketersediaan lindung nilai yang sempurna dan netralitas risiko adalah dari pemegang opsi. Dengan teori penetapan harga tanpa *arbitrage*, batas *optimal exercise* pemegang opsi adalah dengan memaksimalkan pembayaran diskon yang diharapkan dari opsi. Untuk alasan ini, peneliti menyebutnya batas pemaksimalan harga. Sebaliknya, karyawan yang menghindari risiko dalam model yang dibatasi dari menjual opsi dan mempersingkat saham perusahaan, tidak memiliki lindung nilai yang sempurna. Batas *exercise* karyawan adalah batas yang memaksimalkan utilitas yang diharapkan dari pemegang opsi, jadi peneliti juga menyebutnya batas yang memaksimalkan utilitas.

Peneliti merumuskan model penilaian untuk sebuah opsi saham karyawan lalu menganalisis strategi untuk *exercise* dan menunjukkan bahwa pemutusan hubungan kerja mendorong karyawan melakukan strategi *exercise* yang lebih konservatif. Selanjutnya, peneliti menghitung biaya opsi dengan dan tanpa *vesting period* lalu memperluas model ke kasus dengan beberapa *exercise* serta mendiskusikan efek yang mempengaruhi strategi *exercise* karyawan dan biaya OSK. Akhirnya peneliti menemukan solusi untuk masalah batas bebas nonlinier yang terkait dengan waktu *exercise*.

METODE

Metode yang peneliti gunakan adalah metode penentuan nilai dari OSK yang dapat dilaksanakan lebih awal kepada karyawan dan juga biaya bagi perusahaan. Karakteristik utama OSK termasuk *vesting period*, risiko pemutusan hubungan kerja, dan beberapa *exercise*, semuanya disertakan. Peneliti mengambil perspektif karyawan dan memecahkan masalah optimal *hedging* dan *exercise timing*.

Pada langkah ini diperoleh strategi *exercise* optimal karyawan, yang pada gilirannya menjadi input untuk menghitung biaya bagi perusahaan.

Secara khusus, dari perspektif perusahaan, biaya OSK dihitung dengan ekspektasi netral risiko dengan asumsi opsi akan dilaksanakan pada batas yang memaksimalkan utilitas atau penghentian pekerjaan waktu mana yang lebih dulu.

Pada artikel ini, permasalahan berfokus pada:

1) Pemutusan hubungan kerja sebelum jatuh tempo
2) Risiko *vesting period*

Adapun langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1) Merumuskan model penilaian untuk sebuah opsi saham karyawan.

   Di bagian ini, peneliti membahas model penilaian untuk opsi saham karyawan tunggal. Untuk memulai formulasi model, peneliti mempertimbangkan pasar dengan rekening bank tanpa risiko yang membayar bunga pada tingkat konstan r, dan dua aset berisiko yaitu, saham perusahaan dan indeks pasar. Karyawan hanya dapat memperdagangkan rekening bank dan indeks pasar, tetapi bukan saham perusahaan. Yang terakhir dimodelkan sebagai proses difusi yang memenuhi.

$$dY_u = (v-q)Y_u du + \eta Y_u dW_u\,, \quad u \geq t \qquad (1.1)$$

   dengan $Y_t = y > 0$. Koefisien v, q dan η adalah konstan. Dimana v adalah ekspektasi pengembalian dan η adalah volatilitas saham. Peneliti juga mengasumsikan bahwa saham membayar dividen secara proporsional konstan q terus menerus dari waktu ke waktu.

   Indeks pasar adalah proses lognormal lain yang sebagian berkorelasi terkait dengan saham perusahaan yang dimodelkan sebagai berikut.

$$dS_u = \mu S_u du + \sigma S_u dB_u, \;\; u \geq t \qquad (1.2)$$

   dimana $S_t = S > 0$.
   dan S_t adalah harga saham

2) Menganalisis strategi untuk melakukan *exercise.*

   Karyawan tidak dapat menjual OSK atau membentuk lindung nilai yang sempurna sehingga penting untuk dilakukan pertimbangan penghindaran risiko. Untuk tujuan ini, peneliti mewakili preferensi risikonya dengan fungsi utilitas eksponensial.

$$U(x) = -e^{-\gamma x} \qquad (1.3)$$

dengan koefisien penghindaran risiko absolut konstan positif $\gamma > 0$.

Kekayaan yang didapat karyawan berkembang sesuai dengan

$$dX_u^\theta = [\theta_u(\mu - r) + rX_u]du + \theta_u \sigma dB_u,$$
$$X_t = x \qquad (1.4)$$

Menurut Merton (1969), jika seorang investor memiliki x dolar pada waktu $t \leq T$ dan berinvestasi secara dinamis di rekening bank dan indeks pasar sampai waktu jatuh tempo T, maka utilitas maksimal yang diharapkannya diberikan oleh

$$M(t,x) = sup\, \mathbb{E}\{-e^{-\gamma X_T}\, |X_t = x\}$$
$$= -e^{-\gamma x e^{r(T-t)}} e^{-\frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}(T-t)} \qquad (1.5)$$

Untuk menafsirkan ini, peneliti dapat menganggap $-e^{-\gamma x e^{r(T-t)}}$ sebagai utilitas dari sekadar menyimpan hasil di rekening bank. Serta $e^{-\frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}(T-t)}$ sebagai utilitas (yang negatif) karena fakta bahwa karyawan dapat berinvestasi dalam indeks pasar, selain rekening bank. Amati bahwa, untuk setiap x tetap, M menurun sebanding dengan t.

Peneliti merumuskan masalah investasi pemegang OSK sebagai maksimisasi utilitas stokastik dengan penghentian optimal. Peneliti akan menggunakan notasi berikut untuk nilai ekspektasi bersyarat:

$$\mathbb{E}_{t,y}\{\cdot\} = \mathbb{E}\{\cdot\, |Y_t = y\}, \;\; \mathbb{E}_{t,x,y}\{\cdot\} = \mathbb{E}\{\cdot\;\, |X_t = x, Y_t = y\}$$

Fungsi harga opsi saham karyawan pada waktu $t \in [0,T]$ dimana pemegang opsi belum meninggalkan perusahaan dan memiliki kekayaan $X_t = x$ serta harga saham perusahaan $Y_t = y$, adalah

$$V(t,x,y) = \sup_{\tau \in \mathfrak{T}_{t,T}} \; \sup_{\mathfrak{T}_{t,\tau}} \mathbb{E}_{t,x,y}\{M(\hat{\tau}, X_{\hat{\tau}}, +(Y_{\hat{\tau}} - K)^+)\}$$
$$= \sup_{\tau \in \mathfrak{T}_{t,T}} \; \sup_{\mathfrak{T}_{t,\tau}} \mathbb{E}_{t,x,y}$$

$$\left\{-e^{-\gamma(X_{\hat{\tau}},+(Y_{\hat{\tau}}-K)^+)e^{r(T-\hat{\tau})}}e^{-\frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}(T-\hat{\tau})}\right\} \quad (1.6)$$

dimana $\hat{\tau} = \tau\wedge\tau^{\lambda}$. Perhatikan bahwa peneliti secara eksplisit mengoptimalkan utilitas yang diharapkan pada semua waktu penghentian, dan pada semua strategi

3) Menghitung biaya opsi dengan dan tanpa *vesting period*.

Peneliti mengasumsikan bahwa saham perusahaan berkembang sesuai dengan proses difusi di bawah risiko-netral $\mathbb{Q}$:

$$dY_u = (r-q)Y_u du + \eta Y_u dW_u^{\mathbb{Q}}, u \geq t;$$
$$Y_t = y, \quad (1.7)$$

di mana $W^{\mathbb{Q}}$ adalah $\mathbb{Q}$-Brownian motion, yang tidak bergantung pada waktu penghentian pekerjaan.

Peneliti mempertimbangkan biaya OSK *vested* (sebelum *vesting period* berakhir). Misalkan *vesting period* adalah t_v tahun. Pada waktu $t \geq t_v$, mengingat harga saham Y_t adalah y dan OSK masih ada maka biaya OSK diberikan oleh

$$\begin{aligned} C(t,y) &= \mathbb{E}_{t,y}^{\mathbb{Q}}\{e^{-r(\tau^*\wedge\tau^{\lambda}-t)}(Y_{\tau^*\wedge\tau^{\lambda}}-K)^+\} \\ &= \mathbb{E}_{t,y}^{\mathbb{Q}}\left\{e^{-(r+\lambda)(\tau^*-t)}(Y_{\tau^*}-K)^+ + \int_t^{\tau^*} e^{-(r+\lambda)(u-t)}\lambda(Y_u-K)^+du\right\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Selanjutnya, peneliti melakukan pertimbang terhadap harga OSK yang belum diinvestasikan. Sehingga $\tilde{C}(t,y)$ menjadi biaya dari OSK *unvested* pada waktu $t \leq t_v$ dan harga saham $Y_t = y$ diberikan oleh

$$\tilde{C}(t,y) = \mathbb{E}_{t,y}^{\mathbb{Q}}\{e^{-r(t_v-t)}C(t_v, Y_{t_v})1_{\{\tau^{\lambda}>t_v\}}\} \quad (1.9)$$

4) Memperluas model ke kasus dengan beberapa *exercise*
5) Menemukan solusi untuk masalah batas bebas nonlinier yang terkait dengan waktu *exercise*.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dengan mengacu pada persamaan (1.8) dan (1.9), peneliti menyajikan formulasi persamaan diferensial parsial untuk biaya OSK yang dimiliki dan yang tidak. Misalkan perusahaan membebankan *vesting period* sebesar t_v tahun, dan menunjukkan $y^*(t)$ sebagai batas *exercise* karyawan. Pemegang opsi tidak melakukan *exercise* di daerah $b = \{(t,y): t_v \leq t < T, 0 \leq y < y^*(t)\}$ dan $\mathcal{V} = \{(t,y): 0 \leq t < t_v, 0 \leq y\}$. Biaya OSK *unvested*, $C(t,y)$ memenuhi PDP orde 2 tak homogen

$$C_t + \frac{\eta^2}{2}y^2C_{yy} + (r-q)yC_y - (r+\lambda)C + \lambda(y-K)^+ = 0, \quad (1.10)$$

Untuk $(t,y) \in b$, dengan syarat batas

$$C(t,0) = 0, t_v \leq t \leq T,$$
$$C(t,y^*(t)) = (y^*(t)-K)^+, t_v \leq t < T,$$
$$C(T,y) = (y-K)^+, 0 \leq y \leq y^*(T)$$

Istilah tidak homogen $\lambda(y-K)^+$, menangkap efek bahwa OSK dapat dilakukan karena pemutusan hubungan kerja dengan probabilitas λdt selama periode yang sangat kecil dt^2. Selanjutnya, biaya OSK *unvested*, $\tilde{C}(t,y)$ memenuhi PDP orde 2 homogen

$$\tilde{C}_t + \frac{\eta^2}{2}y^2\tilde{C}_{yy} + (r-q)y\tilde{C}_y - (r+\lambda)\tilde{C} = 0,$$

untuk $(t,y) \in \mathcal{V}$, dengan syarat batas

$$\tilde{C}(t,0) = 0, 0 \leq t \leq t_v,$$
$$\tilde{C}(t_v,y) = C(t_v,y), y \geq 0$$

Mengingat kurva batas $y^*(t)$, peneliti memecahkan dua masalah PDP ini secara numerik menggunakan metode beda hingga implisit. Peneliti mempelajari efek penghindaran risiko, *vesting period*, dan risiko pemutusan hubungan kerja pada biaya OSK, dan membandingkan hasilnya dengan model lain. Pertama-tama peneliti menganalisis efek *vesting period* dan penghindaran risiko tanpa adanya risiko pemutusan hubungan kerja

Proposisi 1.1. Jika $\lambda = q = 0$, maka biaya OSK tidak menurun sehubungan dengan lamanya *vesting period*. Selain itu, biaya ini didominasi oleh harga Black-Scholes dari opsi call Eropa yang tertulis di saham perusahaan dengan *strike price (*titik harga tertentu di mana pemilik opsi dapat membeli atau menjual opsi) dan jatuh tempo yang sama.

Bukti. Misalkan $0 < a < b < T$. Dilambangkan dengan τ_a^* dan τ_b^* waktu *exercise* karyawan ketika *vesting period* adalah a dan b tahun, masing-masing. Selanjutnya, kita punya $\tau_a^* \leq \tau_b^* \leq T$. Sejak proses pembayaran diskon $\{e^{rs}(Y_s - K)^+\}_{s\geq 0}$ adalah $\mathbb{Q}$ −submartingale (lihat Karatzas dan Shreve, 1998), mengikuti Teorema Penghentian Opsional bahwa

$$\mathbb{E}_{t,y}^{\mathbb{Q}}\{e^{-r(\tau_a^*-t)}(Y_{\tau_a^*} - K)^+ \leq \mathbb{E}_{t,y}^{\mathbb{Q}}\{e^{-r(\tau_b^*-t)}(Y_{\tau_b^*} - K)^+\}$$

$$\leq \mathbb{E}_{t,y}^{\mathbb{Q}}\{e^{-r(T-t)}(Y_T - K)^+\}$$

Proposisi 1.2. Menganggap $q = 0$. Risiko pemutusan hubungan kerja yang lebih tinggi menurunkan biaya OSK baik yang *vested* maupun *unvested*.

Bukti. Penulis pertama-tama mempertimbangkan nilai OSK pribadi. Tentukan operatornya $\mathcal{L}_1$ seperti berikut

$$\mathcal{L}_1 C(t,y) = C_t + (r-q)yC_y + \frac{\eta^2}{2}y^2 C_{yy} - (r + \lambda)C + \lambda\,(y-K)^+$$

Membiarkan λ_1,λ_2 menjadi tingkat pemutusan hubungan kerja sedemikian rupa sehingga $\lambda_2 \geq \lambda_1 \geq 0$. $C_i(t,y)$ dan τ_b^* menjadi biaya OSK dan waktu *exercise* optimal yang sesuai λ_i dengan $i = 1{,}2$. Dengan PDP (1.9) peneliti memiliki $\mathcal{L}_1 C_1 = 0$. $\mathbb{Q}$ − properti submartingale dari proses $\{e^{rs}(Y_s - K)^+\}_{s\geq 0}$ sehingga $C_i(t,y) \geq (y-K)^+$. Akibatnya, substitusi langsung menunjukkan bahwa $\mathcal{L}_1 C_2 \geq 0$

Selanjutnya, peneliti menerapkan rumus Itô ke fungsi

$$V(t,Y_t) = e^{(r+\lambda_1)t}C_2(t,Y_t) + \int_0^t e^{-(r+\lambda_1)s}\,\lambda_1\,(Y_s - K)^+ ds$$

Oleh karena $\mathcal{L}_1 C_2 \geq 0$ dan Teorema Pengambilan Sampel Opsional maka kondisi berikut berlaku untuk sembarang $\tau \geq t$:

$$\mathbb{E}_{t,y}^{\mathbb{Q}}\{V(\tau,Y_\tau)\} \geq V(t,y).$$

Secara khusus, diambil $\tau_2^* \leq \tau_1^*$, sehingga didapatkan

$$C_2(t,y) \leq \mathbb{E}_{t,y}^{\mathbb{Q}}\left\{e^{-(r+\lambda_1)(\tau_2^*-t)}C_2(\tau_2^*, Y_{\tau_2^*}) + \int_t^{\tau_2^*} e^{-(r+\lambda_1)(s-t)}\,\lambda_1\,(Y_s - K)^+ ds\right\}$$

$$= \mathbb{E}_{t,y}^{\mathbb{Q}}\{e^{-r(\tau_2^*\wedge\tau^{\lambda_1}-t)}(Y_{\tau_2^*\wedge\tau^{\lambda_1}} - K)^+\}$$
$$\leq \mathbb{E}_{t,y}^{\mathbb{Q}}\{e^{-r(\tau_1^*\wedge\tau^{\lambda_1}-t)}(Y_{\tau_1^*\wedge\tau^{\lambda_1}} - K)^+\}$$
$$= C_1(t,y)$$

Oleh karena itu, risiko pemutusan hubungan kerja mengurangi biaya OSK. Sedangkan untuk OSK yang *unvested,* peneliti melihat bahwa risiko pemutusan hubungan kerja mengurangi nilai terminal dari OSK dan meningkatkan kemungkinan penyitaan selama *vesting period*. Oleh karena itu, risiko pemutusan hubungan kerja mengurangi nilai OSK yang tidak diinvestasikan.

Peneliti memperluas model untuk kasus di mana karyawan diberikan beberapa OSK yang dapat dilakukan *exercise* secara terpisah. Satu-satunya perbedaan adalah pada waktunya $t \in [0,T]$. Mengingat bahwa karyawan tersebut belum meninggalkan perusahaan dan memegang $i \geq 2$ opsi yang tidak dieksekusi sekaligus pada saat t, maka nilai fungsinya adalah

$$V^{(i)}(t,x,y) = \sup_{t\leq\tau_i\leq T}\sup_{\mathfrak{T}_{t,\tau_i}} \mathbb{E}_{t,x,y}\{V^{(i-1)}(\tau_i, X_{\tau_i} + (Y_{\tau_i} - K)^+, Y_{\tau_i}).1_{\{\tau_i<\tau^\lambda\}} + M(\tau^\lambda, X_{\tau^\lambda} + i(Y_{\tau^\lambda} - K)^+).1_{\{\tau_i\geq\tau^\lambda\}}\}$$

dengan $V^{(1)} = V$ dan $V^{(0)} = M$. Jika pemutusan hubungan kerja tiba sebelum waktu *exercise* berikutnya, karyawan harus melakukan atau melepaskan semua i opsi dan menginvestasikan hasilnya, jika ada ke dalam indeks pasar dan rekening bank. Jika tidak, karyawan akan menggunakan opsi berikutnya pada waktu *exercise* yang optimal, dan menghadapi masalah investasi lagi dengan $i-1$ opsi yang tidak dieksekusi.

Fungsi nilai $V^{(i)}$ menyelesaikan pertidaksamaan variasi

$$\lambda\,(M(t, x + i(y-K)^+) - V^{(i)}) + V_t^{(i)} + \sup_\theta \mathcal{L}V^{(i)} \leq 0\,,$$

$$V^{(i)}(t,x,y) \geq V^{(i-1)}(t, x + (y-K)^+, y), \tag{1.11}$$

$$(\lambda (M(t,x+i(y-K)^+) - V^{(i)}) + V_t^{(i)} + \sup_\theta \mathcal{L}V^{(i)}).(V^{(i-1)}(t,x + (y-K)^+,y) - V^{(i)}(t,x,y)) = 0$$

$(t,x,y) \in [0,T) \times \mathbb{R} \times (0,+\infty)$, dengan syarat batas

$$V^{(i)}(T,x,y) = -e^{-\gamma(x-i(y-K)^+)} \ ,$$
$$V^{(i)}(t,x,0) = -e^{-\gamma x e^{r(T-t)}} e^{-\frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}(T-t)} \qquad (1.12)$$

Selanjutnya, peneliti melakukan penyederhanaan pertidaksamaan variasi di atas dengan menerapkan transformasi

$$V^{(i)}(t,x,y) = M(t,x).H^{(i)}(t,y)^{\frac{1}{(1-\rho^2)}}$$

Jadi $H^{(i)}$,

$$H_t^{(i)} + \tilde{\mathcal{L}}H^{(i)} - (1-\rho^2) \lambda H^{(i)} + (1-\rho^2) \lambda b(t,y)^i (H^{(i)})^{-\hat{\rho}} \geq 0 \ ,$$
$$H^{(i)} \leq k(t,y)H^{(i-1)} \ ,$$
$$H_t^{(i)} + \tilde{\mathcal{L}}H^{(i)} - (1-\rho^2) \lambda H^{(i)} + (1-\rho^2) \lambda b(t,y)^i (H^{(i)})^{-\hat{\rho}}.k(t,y)H^{(i-1)} - H^{(i)}) - 0 \ ,$$

Untuk $(t,y) \in [0,T] \times [0,+\infty)$ dengan syarat batas

$$H^{(i)}(T,y) = e^{-\gamma(1-\rho^2)i(y-K)^+},$$
$$H^{(i)}(t,0) = 1 \ .$$

Terkait dengan masing-masing $H^{(i)}$, ada batas bebas yang dilambangkan dengan $y_i^* : [0,T] \to \mathbb{R}_+$, seperti

$$y_i^*(t) := \inf\{y \geq 0 : \ H^{(i)}(t,y) = k(t,y)H^{(i-1)}(t,y)\}, \quad t \in [0,T].$$

Batas y_i^* mewakili batas *exercise* optimal karyawan untuk opsi berikutnya ketika i opsi tetap tidak dieksekusi. Di bagian sebelumnya, peneliti telah memecahkan masalah dan memperoleh $H^{(i)}$ untuk kasus $i = 1$. Peneliti melanjutkan prosedur ini untuk menyelesaikan semua $H^{(i)}$, dan didapatkan batas bebas terkait y_i^* untuk $i = 1,\dots,n$.

Mengingat batas-batasnya $\{y_i^*, i = 1,2,\dots,n\}$, maka dapat menghitung biaya OSK untuk perusahaan mengikuti asumsi di bagian (1.8) dan (1.9) di mana peneliti mempertimbangkan nilai OSK pribadi. Untuk *vesting period* sebesar t_v tahun, waktu *exercise* optimal karyawan ketika ada i pilihan yang tersisa adalah

$$\tau_i^* = \inf\{t \leq u \leq T : \ Y_u = y_i^*(u)\}, \ \ t > t_v, \ \ i = 1,2,\dots,n.$$

Definisikan $C^i(t,y)$ sebagai biaya i OSK *vested* pada waktu $t \geq t_v$ ketika harga saham y dolar, dengan asumsi bahwa opsi tersebut belum dieksekusi. Ini memenuhi hubungan rekursif berikut.

$$C^{(i)}(t,y) = \mathbb{E}_{t,y}^{\mathbb{Q}}\{e^{-r(\tau^\lambda - t)} i(Y_{\tau^\lambda} - K)^+ 1_{\{\tau^\lambda \leq \tau_i^*\}} + e^{-r(\tau_i^* - t)}[(Y_{\tau_i^*} - K)^+ + C^{(i-1)}(\tau_i^*, Y_{\tau_i^*})] 1_{\{\tau^\lambda > \tau_i^*\}}\}$$

Fungsi $C^i(t,y)$ memenuhi PDP tak homogen berikut.

$$C_t^{(i)} + + \frac{\eta^2}{2} y^2 C_{yy}^{(i)} + (r-q)yC_y^{(i)} - (r+\lambda)C^{(i)} + \lambda\, i(y - K)^+ = 0$$

di wilayah $\{(t,y): t_v \leq t \leq T\ , 0 \leq y \leq y_i^*(t),$ dan memenuhi syarat batas

$$C^{(i)}(t,0) = 0 \ , \qquad t_v \leq t \leq T \ ,$$
$$C^{(i)}(t,y_i^*(t)) = (y_i^*(t) - K)^+ + C^{(i-1)}(t,y_i^*(t)), \quad t_v \leq t < T \ ,$$
$$C^{(i)}(T,y) = i(y-K)^+ \ , \qquad 0 \leq y \leq y_i^*(t).$$

Untuk menyelesaikan sistem PDP ini, peneliti menerapkan pendekatan beda hingga implisit. Peneliti sudah menghitung $C^{(1)}(t,y)$ di bagian sebelumnya, sehingga dapat menggunakannya untuk menyelesaikan $C^{(2)}(t,y),\dots,C^{(n)}(t,y)$.

Selanjutnya, peneliti mempertimbangkan OSK yang tidak diinvestasikan. Membiarkan $\tilde{C}^{(i)}(t,y)$ menjadi biaya i OSK yang tidak diinvestasikan pada waktu t ketika harga saham y dolar, diberikan dengan persamaan

$$\tilde{C}^{(i)}(t,y) = \mathbb{E}_{t,y}^{\mathbb{Q}}\{e^{-r(t_v - t)} C^{(i)}(t_v, Y_{t_v}) 1_{\{\tau^\lambda > t_v\}}$$

Berikut ini PDP homogen untuk $\tilde{C}^{(i)}$:

$$\tilde{C}_t^{(i)} + \frac{\eta^2}{2} y^2 \tilde{C}_{yy}^{(i)} + (r-q)y\tilde{C}_y^{(i)} - (r+\lambda)\tilde{C}^{(i)} = 0$$

di wilayah $\{(t,y) : \ 0 \leq t \leq t_v, y \geq 0\}$, dengan syarat batas

$$\tilde{C}^{(i)}(t,0) = 0, \qquad 0 \le t \le t_v,$$
$$\tilde{C}^{(i)}(t_v,y) = C^{(i)}(t_v,y), \qquad 0 \le y \le y_i^*(t_v)$$

$C^{(i)}(t_v,y)$ adalah kondisi terminal untuk formulasi PDP untuk$\tilde{C}^{(i)}$, maka harus menyelesaikan masalah PDP untuk $C^{(i)}$ sebelum $\tilde{C}^{(i)}$. Sekali lagi, peneliti menggunakan metode beda hingga implisit untuk kedua masalah PDP.

Definisi 1.1 *Indifference price* karyawan untuk memegang $i \le n$ OSK dengan beberapa *exercise* didefinisikan sebagai fungsi $p^{(i)} \equiv p^{(i)}(t,x,y)$ sebagai berikut.

$$M(t,x) = V^{(i)}\left(t, x - p^{(i)}, y\right).$$

Peneliti memiliki $p^{(0)} = 0$ karena $V^{(0)}(t,x,y) = M(t,x)$ fungsi utilitas eksponensial. *Indifference price* adalah fungsi dari t dan y, dan hal ini terkait dengan $H^{(1)}$ dan $V^{(1)}$ dengan cara berikut.

Proposisi 1.3. *Indifference price* $p^{(i)}$ diberikan dengan

$$p^{(i)}(t,y) = -\frac{1}{\gamma(1-\rho^2)e^{r(T-t)}} \log H^{(i)}(t,y),$$
dan
$$V^{(i)}(t,x,y) = M(t,x).\,e^{-\gamma p^{(i)}(t,y)e^{r(T-t)}}.$$

Proposisi ini mengakibatkan peneliti memperoleh ketidaksetaraan variasi yang setara dengan (1.11)-(1.12):

$$p_t^{(i)} + \tilde{\mathcal{L}}p^{(i)} - rp^{(i)} - \frac{1}{2}\gamma(1-\rho^2)\eta^2 y^2 e^{r(T-t)}(p_y^{(i)})^2 + \frac{\lambda}{\gamma}(1 - b(t,y)^i e^{\gamma p^{(i)} e^{r(T-t)}}) \le 0,$$
$$p^{(i)} \ge p^{(i-1)} + (y-K)^+,$$
$$\left(p_t^{(i)} + \tilde{\mathcal{L}}p^{(i)} - rp^{(i)} - \frac{1}{2}\gamma(1-\rho^2)\eta^2 y^2 e^{r(T-t)}(p_y^{(i)})^2 + \frac{\lambda}{\gamma}(1 - b(t,y)^i e^{\gamma p^{(i)} e^{r(T-t)}})\right).\left((y-K)^+ + p^{(i-1)} - p^i\right) = 0,$$

Untuk $(t,y) \in [0,T] \times [0,+\infty)$ dengan syarat batas

$$p^{(i)}(T,y) = i(y-K)^+,$$
$$p^{(i)}(t,0) = 0.$$

Waktu *exercise* optimal karyawan untuk opsi berikutnya bila ada i OSK yang tidak dieksekusi dapat dinyatakan dalam *indifference price*.

$$\begin{aligned}\tau_i^* &= \inf\{t \le u \le T \,:\, V^{(i)}(u,X_u,Y_u) \\ &\qquad = V^{(i-1)}(u, X_u + (Y_u - K)^+, Y_u)\} \\ &= \inf\{t \le u \le T \,:\, p^{(i)}(u,Y_u) \\ &\qquad - p^{(i-1)}(u,Y_u) = (Y_u - K)^+)\}\end{aligned}$$

Definisi 1.2. Untuk pemegang opsi dengan i OSK, peneliti mendefinisikan $w^{(i+1)} \equiv w^{(i+1)}(t,x,y)$ bahwa pemegang opsi ini bersedia membayar untuk menerima satu OSK tambahan yaitu $(i+1)$ opsi. Dengan kata lain, $w^{(i+1)}$ didefinisikan

$$V^{(i+1)}\left(t, x - w^{(i+1)}, y\right) = V^{(i)}(t,x,y).$$

Dari definisi tersebut, $w^{(1)}$sama dengan *indifference price* karyawan untuk memegang satu OSK. Premi dapat ditulis sebagai selisih dua *indifference price*.

Proposisi 1.4. Untuk $t \le T$ dan $y \in \mathbb{R}_+$ berlaku $w^{(i)}(t,y) = p^{(i)}(t,y) - p^{(i-1)}(t,y)$.

Bukti. Peneliti menggunakan persamaan pada Definisi 1.2 untuk mendapatkan kesetaraan

$$M(t,x) = V^{(i)}\left(t, x - p^{(i)}, y\right) = V^{(i-1)}\left(t, x - p^{(i-1)}, y\right)$$

Dari sini didapat

$$V^{(i)}(t,x,y) = V^{(i-1)}\left(t, x + p^{(i)} - p^{(i-1)}, y\right)$$

karena $w^{(i)} := p^{(i)} - p^{(i-1)}$ didefinisikan pada Definisi 1.2

Proposisi 1.4 menyiratkan bahwa peneliti dapat menulis ulang waktu *exercise* yang optimal sebagai berikut.

$$\tau_i^* = \inf\{t \le u \le T \,:\, w^{(i)}(u,Y_u) = (Y_u - K)^+\},$$

yang berarti bahwa karyawan memegang i OSK harus menggunakan opsi berikutnya segera setelah hasil dari *exercise* lebih tinggi dari jumlah yang tersedia untuk dibayar. Di bawah asumsi utilitas eksponensial, *indifference price* $p^{(i)}$ adalah kekayaan-independen, yang menyiratkan bahwa premi $w^{(i)}$ dan waktu *exercise* yang optimal juga sangat mandiri. Untuk fungsi utilitas umum, *indifference price*, premi, dan waktu pelaksanaan yang optimal semuanya bergantung pada kekayaan karyawan.

Pada bagian ini, peneliti menyelidiki keberadaan dan keunikan solusi untuk masalah batas bebas nonlinier. Masalah batas ini memiliki singularitas sebagai y tak hingga, yaitu ketika istilah hambatan κ mendekati nol. Untuk menghindari kesulitan ini, peneliti mengubah istilah hambatan.

$$\hat{\kappa}(t, y) = e^{-\gamma(1-\rho^2)(y \wedge L-K)^+ e^{r(T-t)}},$$

dengan $L < \infty$. Melihat $\hat{\kappa} \geq e^{-\gamma(1-\rho^2)Le^{rT}} := \epsilon > 0$ maka perubahan ini memaksakan batas bawah positif pada hambatan dengan memilih L (batas bebas nonlinear) cukup besar sehingga kesalahannya dapat diabaikan. Untuk tujuan praktis, batas bebas ini diselesaikan secara numerik pada domain terbatas, yang membuat istilah hambatan dibatasi menjauh dari nol. Sejauh ini, terlihat bahwa batas *exercise* karyawan ada dan dibatasi. Dalam kasus seperti itu, masalah batas bebas yang sesuai dengan hambatan asli κ yang diubah $\hat{\kappa}$ diberikan solusi yang sama jika L dipilih cukup besar.

Untuk setiap fungsi terbatas $w : [0, T] \times [0, +\infty) \mapsto [\epsilon_L, 1]$ (dengan konstanta ϵL akan ditentukan kemudian), dan waktu berhenti $\tau \in \mathfrak{F}_{t,T}$ didefinisikan

$$g(t, y, \tau, w) := \widetilde{\mathbb{E}}_{t,y} \left\{ e^{-(1-\rho^2)\curlywedge(\tau-t)} \hat{\kappa}(\tau, Y_\tau) + \int_t^\tau e^{-(1-\rho^2)\curlywedge(u-t)} \tilde{b}(u, Y_u) w(u, Y_u)^{-\hat{\rho}} du \right\}$$

Peneliti juga mendefinisikan

$$\Gamma w(t, y) = \inf_{\tau \in \mathfrak{T}_{t,T}} g(t, y; \tau, w)$$

Kemudian, Γw juga dibatasi pada $[\epsilon_L, 1]$. Solusi umum untuk permasalahan ini adalah fungsi yang memenuhi

$$G(t, y) = \Gamma G(t, y)$$

Perhatikan bahwa solusi G muncul di kedua sisi persamaan. Selain itu, peneliti mengamati bahwa G terikat sebagai berikut.

$$e^{-(1-\rho^2)\curlywedge(\tau-t)} e^{-\gamma(1-\rho^2)(L-K)} \leq G(t, y) \leq \hat{k}(t, y) \leq 1$$

jadi diatur $\epsilon L = e^{-(1-\rho^2)(\curlywedge T+\gamma(L-K))}$. Selanjutnya, peneliti menentukan bahwa terdapat pemetaan kontraksi dan dengan demikian memiliki titik tetap.

SIMPULAN

Penelitian ini menghasilkan model matematika yang dapat digunakan untuk menentukan harga dari suatu opsi saham karyawan yang mengalami risiko *vesting period* dan pemutusan hubungan kerja. Permasalahan dengan risiko *vesting period* dan pemutusan hubungan kerja memiliki solusi umum yang unik. Secara khusus, solusi umum dapat didekati dengan urutan $\{\{G_n\}_{n\geq 0}$, dimulai dengan

$$G_0(t, y) = \inf_{\tau \in \mathfrak{T}_{t,T}} \widetilde{\mathbb{E}}_{t,y} \left\{ e^{-(1-\rho^2)\curlywedge(\tau-t)} \hat{\kappa}(\tau, Y_\tau) \right\},$$

dan sisanya ditentukan melalui $G_{n+1}(t, y) = \Gamma G_n(t, y)$, untuk $n \geq 0$. Kemudian, setiap anggota barisan dibatasi oleh batas bebas nonlinear ϵL, dan properti pemetaan kontraksi Γ akan memastikan konvergensi ke solusi.

SARAN

Dari penelitian yang telah dilakukan, dapat diberikan saran untuk penelitian selanjutnya seperti menambahkan fitur-fitur lain pada penentuan harga OSK seperti pengaruh *reload* dan *reset*.

DAFTAR PUSTAKA

Apriliani, W. (2015). *Analisis metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah pada perhitungan harga opsi Asia* (Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).

Chalimatusadiah, C., Lesmana, D. C., & Budiarti, R. (2021). Penentuan Harga Opsi Dengan Volatilitas Stokastik Menggunakan Metode Monte Carlo. *Jambura Journal of Mathematics*, *3*(1), 80-92.

Devianto, D., & Ayuriza, K. R. (2014). Model Black Scholes dan Rasio Lindung Nilai untuk Opsi Saham Tipe Eropa dengan Pembagian Dividen (Studi Kasus pada Saham Bank of America Corporation). *EKSAKTA*, *2*, 9-16.

Fitri, A. (2020). Penentuan Nilai Opsi Saham Karyawan (OSK) dengan Menghitungkan Efek Dilusi Menggunakan Metode Black-Scholes (Doctoral dissertation, Universitas Negeri Padang).

Grasselli, M. R., & Hurd*, T. R. (2007). Indifference pricing and hedging for volatility derivatives. *Applied Mathematical Finance*, *14*(4), 303-317.

Gusnela, N., & Ahmad, D. (2020). Penentuan Nilai Opsi Saham Karyawan (OSK) dengan Memperhitungkan Efek Dilusi Menggunakan Metode Lattice Trinomial. *UNP Journal of Mathematics*, *3*(1).

Habaib, T. N., Mariani, S., & Arifudin, R. (2018). PENENTUAN HARGA OPSI ASIA MENGGUNAKAN METODE SIMULASI MONTE CARLO DENGAN TEKNIK REDUKSI VARIANSI. *Unnes Journal of Mathematics*, *7*(1), 28-37.

Irawan, W. O., & Permana, D. (2019). Penentuan Harga Opsi dengan Model Black-Scholes Menggunakan Metode Beda Hingga Center Time Center Space (CTCS). UNP Journal of Mathematics, 2(1).

Karatzas, I. and Shreve, S. (1998). *Methods of Mathematical Finance* (Springer).

Kusumahadi, K., & Sastika, W. (2015). Analisis Perbandingan Penentuan Harga Call Option Dengan Menggunakan Metode Black-Scholes Dan Metode Simulasi Monte Carlo. Jurnal ECODEMICA, 3(1), 355-362.

Maulida, V., Siswanah, E., & Nisa, E. (2019). Penentuan Harga Opsi Tipe Eropa dengan Model Binomial. *Square : Journal of Mathematics and Mathematics Education*, *1*(1), 65-72.

Merton, R. (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous time model, *Review of Economic Studies* **51**, pp. 247–257.

Nurhani, L. (2020). Analisis Perbandingan Akurasi Penentuan Harga Opsi Saham Dengan Metode Black Scholes Dan Metode Simulasi Monte-Carlo Pada Indeks Saham Lq45 (Periode tahun 2015-2018) (Doctoral dissertation, Universitas Pancasakti Tegal).

Nurmawaddah, N. (2018). Penentuan Harga Opsi Tipe Eropa dengan Harga Saham Menggunakan Simulasi Normal Inverse Gaussian (NIG) (Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar).

Vulandari, R. T. (2020). Black-Scholes Model of European Call Option Pricing in Constant Market Condition. *International Journal of Computing Science and Applied Mathematics*, *6*(2), 46-49.

Widyawati, N. S., & Sulistianingsih, E. PENGGUNAAN MODEL BLACK SCHOLES UNTUK PENENTUAN HARGA OPSI JUAL TIPE EROPA. *BIMASTER*, *2*(1).