

ANALISIS MODEL PERILAKU PEROKOK DENGAN ADANYA FAKTOR KEKAMBUHAN MEROKOK

Ismi Syari'ah

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
ismi.18018@mhs.unesa.ac.id

Budi Priyo Prawoto

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
 Penulis Korespondensi: budiprawoto@unesa.ac.id

Abstrak

Perilaku merokok adalah sesuatu yang dianggap biasa saja dalam masyarakat. Bahkan bagi sebagian orang, rokok merupakan kebutuhan yang harus dipenuhi setiap hari, meskipun dampak yang disebabkan karena perilaku perokok sampai saat ini belum bisa ditutupi dengan cara apapun. Penelitian ini bertujuan untuk menerapkan model matematika pada perilaku perokok dengan menganalisa bagaimana kestabilan model perilaku perokok dengan adanya faktor kekambuhan merokok. Metode yang dilakukan yaitu membentuk asumsi-asumsi berdasarkan masalah pada dunia nyata, yang selanjutnya dari asumsi-asumsi tersebut, dapat dibentuk diagram kompartemen yang digunakan untuk mengkonstruksi model. Model yang digunakan pada penelitian ini merupakan model SEIR. Dari model tersebut dapat ditentukan titik ekuilibrium bebas perokok dan titik ekuilibrium endemik perokok (perokok selalu ada). Selanjutnya, dilakukan linearisasi pada sistem persamaan sehingga diperoleh matriks Jacobi yang digunakan untuk mencari nilai eigen. Analisa kestabilan dilakukan dengan nilai eigen dan bilangan reproduksi dasar yang didapatkan dengan metode *next generation matrix*. Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik menggunakan *software* Matlab. Berdasarkan hasil pembahasan, analisa kestabilan menyatakan bahwa titik ekuilibrium bebas perokok akan dicapai ketika $\beta < 0.00031$ dan titik ekuilibrium endemik perokok akan dicapai ketika $\beta > 0.00031$. Model yang dibangun merupakan modifikasi dari model (Alzaid & Alkahtani, 2021), sehingga dengan melakukan penambahan penularan oleh perokok berat dan perilaku sembuh dari perokok ringan yang lebih relevan dengan keadaan yang sebenarnya, dibutuhkan waktu yang lebih lama untuk menuju titik ekuilibrium.

Kata Kunci: rokok, pemodelan matematika, analisa kestabilan.

Abstract

Smoking behavior is something that is considered normal in society. Even for some people, smoking is a need that must be met every day, although the impact caused by smoking behavior so far cannot be covered in any way. This study aims to apply a mathematical model to the behavior of smokers by analyzing how stable the model of smoking behavior is in the presence of smoking relapse factors. The method used is to form assumptions based on problems in the real world, then from these assumptions, compartment diagrams can be formed which are used to construct the model. The model used in this study is the SEIR model. From this model, it can be determined that the smoke-free equilibrium point and the smokers' endemic equilibrium point (smokers are always present). Next, linearization is performed on the system of equations to obtain the Jacobi matrix which is used to find the eigenvalues. Stability analysis was carried out with the eigenvalues and basic reproduction numbers obtained by the next-generation matrix method. Next, a numerical simulation was performed using Matlab software. Based on the results of the discussion, the stability analysis states that the smoke-free equilibrium point will be reached when $\beta < 0.00031$, and the smoker-endemic equilibrium point will be reached when it is $\beta > 0.00031$. The model that is built is a modification of the (Alzaid & Alkahtani, 2021) model so that by adding transmission by heavy smokers and recovering behavior from light smokers that are more relevant to the actual situation, it takes a longer time to reach the equilibrium point.

Keywords: cigarette, mathematical model, stability analysis.

PENDAHULUAN

Saat ini, merokok bukanlah sesuatu hal yang dianggap asing dalam masyarakat. Bahkan bagi sebagian orang, rokok merupakan sebuah

kebutuhan yang harus dipenuhi. Setelah China dan India, Indonesia memiliki angka perokok terbesar di dunia. Jika dihitung, perokok di ketiga negara tersebut jumlahnya lebih dari 50% dari perokok di

seluruh dunia (Holipah, Sulistomo, & Maharani, 2020).

Lingkungan merupakan salah satu faktor yang dapat mempengaruhi seseorang untuk mulai menghisap rokok. Biasanya, seseorang mulai menghisap rokok di usianya yang menginjak remaja. Rata-rata pada usia sekitar 15-16 tahun, bahkan tidak sedikit orang yang mulai merokok dibawah usia 15 tahun (Sreeramareddy, Kishore, Paudel, & Menezes, 2008). Pada tahun 2010, telah ditemukan seorang anak berusia 2 tahun yang dapat mengkonsumsi rokok sebanyak 40 batang per hari di Sumatera, Indonesia. Sejak saat itu, Indonesia mendapatkan julukan sebagai "*baby smoker's country*" (Astuti, 2017).

Sampai saat ini, masyarakat dan pemerintah tetap tidak bisa menutup mata atas dampak yang diberikan oleh rokok, baik yang berdampak pada perokok aktif maupun perokok pasif. Merokok memiliki resiko lebih tinggi daripada semua penyebab kematian (Holipah, Sulistomo, & Maharani, 2020).

Terdapat banyak bahan yang berbahaya dalam rokok, salah satunya adalah tembakau. Penggunaan tembakau merupakan masalah utama masyarakat di seluruh dunia. Tembakau dalam rokok juga merupakan salah satu faktor resiko penyebab datangnya penyakit pada tubuh, misalnya pada perubahan morfologis sistem saraf. Selain itu, asap tembakau mengandung lebih dari 7000 bahan kimia dengan lebih dari 4500 racun, dimana racun tersebut dapat mempengaruhi volume otak (Hajdusianek, Zorawik, Waliszewska-Prosol, Poreba, & Gac, 2021). Sekitar 15% asap rokok diserap oleh perokok dan 85% lainnya dilepaskan ke atmosfer. Asap rokok juga sangatlah berbahaya bagi bayi dan janin yang sedang berkembang, misalnya dapat menyebabkan peningkatan resiko aborsi spontan dan berat badan bayi lahir rendah (Hajdusianek, Zorawik, Waliszewska-Prosol, Poreba, & Gac, 2021). Kesuburan pada pria juga dapat menurun karena perilaku merokok, sebab jumlah batang rokok yang dihisap per hari dapat mempengaruhi presentase sel sperma yang normal (Nadeem, Fahim, & Bugti, 2012). Selain dapat memicu datangnya penyakit, rokok dapat memberikan efek kecanduan pada sang perokok.

Ada banyak cara yang dapat dilakukan untuk mengurangi perilaku perokok, dimana salah satunya adalah edukasi. Orang yang lulus dari perguruan

tinggi memiliki kemungkinan 17% lebih besar untuk mencoba berhenti merokok dibandingkan mereka yang berpendidikan rendah (Bhawna, 2013).

Kestabilan adanya perilaku merokok dapat dikaji pada pemodelan matematika. Pada tahun 1889, pemodelan matematika awalnya digunakan untuk meneliti tentang dinamik penyebaran penyakit, seperti HIV dan Tuberculosis (Alzaid & Alkahtani, 2021). Saat ini, pemodelan matematika dapat digunakan untuk meneliti berbagai macam masalah di dunia. Ada banyak penelitian yang menggunakan model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*), SEIR (*Susceptible-Infected-Exposed-Recovered*), ataupun modifikasi dari kedua model tersebut. Penelitian ini merupakan modifikasi berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh (Alzaid & Alkahtani, 2021). (peneliti menggunakan model dengan faktor kekambuhan) yang mana ditambahkan asumsi bahwa perokok pemula dapat langsung berhenti merokok dan individu yang rentan terhadap rokok dapat menjadi perokok aktif karena dipengaruhi oleh perokok pemula dan perokok berat.

KAJIAN TEORI

SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

(Boyce, DiPrima, & Meade, 2016), mengungkapkan bahwa sistem persamaan diferensial digunakan ketika ada dua fungsi atau lebih yang tidak diketahui. Sistem persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu sistem persamaan diferensial nonlinear dan sistem persamaan diferensial linear. Persamaan diferensial orde ke- n memiliki formula seperti berikut ini:

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

Dimana $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ merupakan variabel yang bergantung pada t , dan t menyatakan waktu. Jika didefinisikan $x_1 = y, x_2 = y', x_3 = y'', \dots, x_n = y^{(n-1)}$, maka $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n$, didapatkan $\dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, sehingga

$$\dot{x}(t) = f(x, t)$$

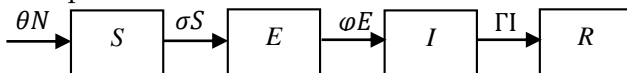
dengan

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$$

$$f(x, t) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

MODEL SEIR

Model SEIR merupakan model matematika dengan S merupakan kelas *Susceptible* (rentan), E merupakan kelas *Exposed*, I merupakan kelas *Infected* (terinfeksi), dan R merupakan kelas *Recovered* (sembuh) (Asif, Khan, Haider, & Al-Mdallal, 2020). Model SEIR dapat digambarkan pada diagram kompartemen berikut ini:



Selanjutnya, dapat diperoleh model berupa persamaan diferensial nonlinear, yaitu :

$$\frac{dS(t)}{dt} = \theta N - \sigma S$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \sigma S - \phi E$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \phi E - \Gamma I$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \Gamma I$$

Dimana $\frac{dS(t)}{dt}$ = tingkat perubahan individu rentan pada waktu t , $\frac{dE(t)}{dt}$ = tingkat perubahan individu terekspose pada waktu t , $\frac{dI(t)}{dt}$ = tingkat perubahan individu terinfeksi pada waktu t , $\frac{dR(t)}{dt}$ = tingkat perubahan individu sembuh pada waktu t , dan N merupakan total populasi dari kompartemen S , E , I , dan R pada waktu t .

LINEARISASI

(Arsyad, Resmawan, & Achmad, 2020), mengungkapkan bahwa proses transformasi sistem persamaan diferensial nonlinear menjadi sistem persamaan diferensial linear disebut dengan linearisasi. Hasil dari linearisasi didapatkan dengan menggunakan matriks Jacobi, dimana hasil tersebut dapat digunakan untuk menganalisa kestabilan sistem persamaan diferensial. Jika diketahui suatu sistem $\dot{x} = f(x)$ dengan $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ dan $f_i \in C(E)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Maka, pada suatu titik \bar{x} diberikan matriks Jacobi seperti berikut:

$$Jf(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

NILAI EIGEN

Jika A adalah matriks $n \times n$ dan $Ax = \lambda x$ untuk suatu skalar x , maka skalar λ dinamakan nilai eigen. Untuk mencari nilai eigen matriks A , dapat dituliskan $Ax = \lambda x$ atau ekuivalen $(\lambda I - A)x = 0$, dimana persamaan tersebut akan mempunyai pemecah tak nol jika dan hanya jika $\det(\lambda I - A) = 0$ yang merupakan persamaan karakteristik dari A , skalar yang memenuhi persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$ adalah nilai eigen dari A (Anton, 1991).

BILANGAN REPRODUKSI DASAR (R_0)

Bilangan reproduksi dasar merupakan nilai parameter dari suatu model yang menghasilkan kriteria sederhana untuk keberadaan dan kestabilan titik ekuilibrium. Titik ekuilibrium bebas penyakit akan stabil ketika $R_0 < 1$ dan titik ekuilibrium endemik akan stabil ketika $R_0 > 1$ (Driessche & Watmough, 2002). Dalam mencari R_0 , penting untuk membedakan adanya parameter penyebab penyakit pada suatu populasi. Misalkan \mathcal{F} merupakan matriks dengan entri nilai parameter yang menyebabkan munculnya penyakit, dan \mathcal{V} merupakan matriks dengan entri nilai parameter tingkat perpindahan dari subpopulasi terinfeksi ke subpopulasi yang lainnya, dimana \mathcal{F} dan \mathcal{V} merupakan matriks $n \times n$ (Driessche & Watmough, 2002). Sehingga dapat diperoleh $F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(x_0) \right]$ dan $V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(x_0) \right]$ dengan $1 \leq i, j \leq m$, dimana x_j merupakan populasi infeksi dan x_0 merupakan titik ekuilibrium bebas penyakit (Driessche & Watmough, 2002). Selanjutnya di definisikan bahwa K merupakan *next generation matrix*, sehingga R_0 didapatkan dengan mencari nilai maksimum modulus dari nilai eigen K (Diekmann, Heesterbeek, & Roberts, 2010).

KESTABILAN

Sistem persamaan diferensial dapat stabil menuju pada suatu titik ekuilibrium dengan tidak akan ada perubahan lagi. (Boyce, Diprima, & Meade, 2016), mengungkapkan bahwa kestabilan suatu sistem dapat dilihat dari nilai eigennya, yaitu

Tabel 1. Kestabilan sistem berdasarkan nilai eigen

Nilai eigen	Kestabilan
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Tidak stabil
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Stabil
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak stabil

$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$		Stabil
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm bi$	$a > 0$	Tidak stabil
	$a < 0$	Stabil
	$a = 0$	Stabil

METODE

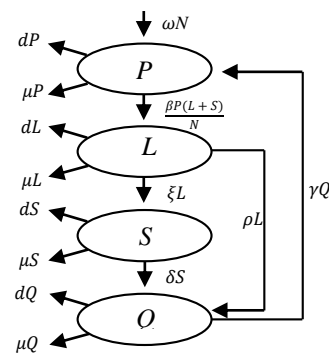
Pada penelitian ini, digunakan metode studi pustaka. Studi pustaka adalah metode yang digunakan untuk mengumpulkan data melalui buku, jurnal, dan literatur yang lain. Dalam penelitian ini, sumber literatur yang digunakan adalah buku, artikel, dan jurnal yang berkaitan dengan perilaku merokok dan model matematika penyebaran penyakit. Selanjutnya, dilakukan langkah-langkah untuk mencapai tujuan penelitian. Langkah-langkah tersebut adalah : (1) Menentukan permasalahan pada dunia nyata yang akan dikaji. (2) Menentukan asumsi-asumsi yang akan digunakan pada penelitian berdasarkan masalah yang sudah ditemukan. (3) Membuat diagram kompartemen berdasarkan asumsi-asumsi yang telah dibuat. (4) Menyusun model matematika berdasarkan diagram kompartemen. (5) Menentukan titik ekuilibrium atau titik kesetimbangan berdasarkan model. (6) Melakukan linearisasi di sekitar titik ekuilibrium sehingga didapatkan matriks jacob. (7) Menentukan nilai eigen yang merupakan akar persamaan karakteristik. (8) Menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0). (9) Menganalisa kestabilan berdasarkan titik ekuilibrium, nilai eigen, dan bilangan reproduksi dasar (R_0). (10) Melakukan simulasi sistem persamaan diferensial dengan menggunakan *software* Matlab. (11) Penarikan kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

MODEL MATEMATIKA

Dibentuk asumsi-asumsi berdasarkan fakta yang ada untuk mempermudah dalam mengkonstruksi model matematika. Asumsi - asumsi tersebut adalah sebagai berikut: (1) Individu yang rentan terhadap rokok merupakan individu yang berpotensi untuk merokok dengan tingkat pertumbuhan rekrutmen sebesar ω . (2) Jumlah manusia konstan, sehingga tingkat pertumbuhan rekrutmen individu yang rentan terhadap rokok sama dengan tingkat kematian alami. (3) Terdapat tingkat kematian yang disebabkan oleh rokok sebesar d . (4) Individu perokok pemula maupun perokok berat dapat

mempengaruhi individu yang rentan terhadap rokok dengan tingkat pengaruh sebesar β . (5) Individu perokok pemula dapat berpotensi menjadi perokok berat dengan tingkat pertumbuhan sebesar ξ . (6) Individu perokok berat dapat berhenti merokok dengan tingkat kesadaran sebesar δ . (7) Individu perokok pemula dapat berhenti merokok dengan tingkat kesadaran sebesar ρ . (8) Individu yang telah berhenti merokok dapat kembali menjadi perokok aktif dengan tingkat kekambuhan sebesar γ . Pada model matematika ini, populasi dibagi menjadi 4 subpopulasi, yaitu $P(t)$ merupakan subpopulasi rentan, $L(t)$ merupakan subpopulasi perokok pemula, $S(t)$ merupakan subpopulasi perokok berat, dan $Q(t)$ merupakan subpopulasi yang telah berhenti merokok. Berdasarkan asumsi - asumsi tersebut, dapat dibuat diagram kompartemen seperti berikut ini



Gambar 1. Diagram Kompartemen.

Berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 1, dapat dibuat model matematika yang berupa sistem persamaan diferensial, yaitu:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \omega N + \gamma Q(t) - (d + \mu)P(t) - \frac{\beta P(t)(L(t) + S(t))}{N} \quad (1)$$

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{\beta P(t)(L(t) + S(t))}{N} - (d + \mu + \xi + \rho)L(t) \quad (2)$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = \xi L(t) - (d + \mu + \delta)S(t) \quad (3)$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \delta S(t) + \rho L(t) - (d + \mu + \gamma)Q(t) \quad (4)$$

dengan $N = P(t) + L(t) + S(t) + Q(t)$.

Dari sistem (1), (2), (3), dan (4), didapatkan $\frac{dN}{dt} = 0$, sehingga $N(t) = h$ untuk h bilangan real. Populasi ini bersifat konstan, sehingga tingkat pertumbuhan rekrutmen sama dengan tingkat kematian. Maka dapat dilakukan rescale pada persamaan diferensial yang telah diperoleh untuk memudahkan analisis dengan menskala sistem (1), (2), (3), dan (4) dengan total populasi N , maka proporsi banyaknya individu pada masing-masing subpopulasi dapat dinyatakan $p = \frac{P}{N}$, $l = \frac{L}{N}$, $s = \frac{S}{N}$, $q = \frac{Q}{N}$, didapatkan $p + l + s + q =$

$\frac{P}{N} + \frac{L}{N} + \frac{S}{N} + \frac{Q}{N} = 1$. Oleh karena itu, sistem (1), (2), (3), dan (4) ekuivalen dengan :

$$\frac{dp(t)}{dt} = \omega + \gamma q(t) - (d + \mu)p(t) - \beta p(t)(l(t) + s(t)) \quad (5)$$

$$\frac{dl(t)}{dt} = \beta p(t)(l(t) + s(t)) - (d + \mu + \xi + \rho)l(t) \quad (6)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \xi l(t) - (d + \mu + \delta)s(t) \quad (7)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = \delta s(t) + \rho l(t) - (d + \mu + \gamma)q(t) \quad (8)$$

Tabel 2. Deskripsi parameter yang digunakan pada model

Parameter	Deskripsi Parameter
ω	Tingkat rekrutmen individu yang rentan terhadap rokok.
β	Tingkat perubahan subpopulasi individu rentan menjadi subpopulasi individu perokok pemula.
ξ	Tingkat perubahan subpopulasi individu perokok pemula menjadi subpopulasi individu perokok berat.
δ	Tingkat kesadaran perokok berat untuk berhenti merokok.
ρ	Tingkat kesadaran perokok pemula untuk berhenti merokok.
γ	Tingkat kekambuhan penyintas rokok untuk merokok kembali.
d	Tingkat kematian yang disebabkan oleh rokok.
μ	Tingkat kematian alami.

TITIK EKUILIBRIUM

Berdasarkan model matematika yang telah diperoleh, maka dapat dicari dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas perokok dan titik ekuilibrium endemik perokok. Titik ekuilibrium bebas perokok $E_1 = (P^0, L^0, S^0, Q^0)$ dimana $L^0 = S^0 = Q^0 = 0$. Dengan menjadikan ruas kanan pada persamaan (5) – (8) sama dengan nol, diperoleh:

$$\frac{\omega}{(d + \mu)} = P^0$$

Jadi, didapatkan

$$E_1 = (P^0, L^0, S^0, Q^0) = \left(\frac{\omega}{d + \mu}, 0, 0, 0\right) \quad (9)$$

Dan titik ekuilibrium endemik perokok

$$E_2 = (P^*, L^*, S^*, Q^*) \quad (10)$$

dimana

$$p^* = \frac{\omega(d + \mu + \delta)(d + \mu + \gamma) + \gamma l^*(\delta \xi + \rho)(d + \mu + \delta)}{(d + \mu + \gamma)((d + \mu)(d + \mu + \delta) + \beta l^*(d + \mu + \delta + \xi))} \quad (11)$$

$$l^* = \frac{(d + \mu + \delta)(d + \mu + \gamma)((d + \mu + \xi + \rho)(d + \mu)(d + \mu + \delta) - \omega \beta (d + \mu + \delta + \xi))}{\beta (d + \mu + \delta + \xi)(\rho \gamma (d + \mu + \delta) + \gamma \delta \xi - (d + \mu + \xi + \rho)(d + \mu + \delta)(d + \mu + \gamma))} \quad (12)$$

$$q^* = \frac{l^*(\delta \xi + \rho)(d + \mu + \delta)}{(d + \mu + \delta)(d + \mu + \gamma)} \quad (13)$$

$$s^* = \frac{\xi l^*}{(d + \mu + \delta)} \quad (14)$$

BILANGAN REPRODUKSI DASAR

Untuk menentukan tingkat penyebaran perokok, maka digunakan bilangan reproduksi dasar (R_0) yang ditentukan dengan metode *next generation matrix* (NGM) K . terdiri dari matriks F dan V . Matriks F terdiri dari f yang menunjukkan tingkat perubahan yang menyebabkan munculnya perokok, dan V terdiri dari v yang menunjukkan tingkat perpindahan dari subpopulasi terinfeksi ke subpopulasi yang lainnya, diperoleh :

$$f = \begin{bmatrix} \beta p(l + s) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } v = \begin{bmatrix} (d + \mu + \xi + \rho)l \\ -\xi l + (d + \mu + \delta)s \end{bmatrix}$$

dimisalkan $l = x_1$ dan $q = x_2$, sehingga

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \beta p(x_1 + x_2) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (d + \mu + \xi + \rho)x_1 \\ -\xi x_1 + (d + \mu + \delta)x_2 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta p & \beta p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d + \mu + \xi + \rho & 0 \\ -\xi & d + \mu + \delta \end{bmatrix}$$

$$K = FV^{-1}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\beta p}{d + \mu + \xi + \rho} + \frac{\beta p \epsilon}{(d + \mu + \xi + \rho)(d + \mu + \delta)} & \frac{\beta p}{d + \mu + \delta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen melalui $|\lambda I - K| = 0$, dan dengan mengambil nilai eigen yang maksimum, dapat diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta \omega (d + \mu + \delta + \xi)}{(d + \mu)(d + \mu + \xi + \rho)(d + \mu + \delta)}$$

ANALISA KESTABILAN

Dilakukan linearisasi pada sistem persamaan untuk mempermudah analisa kestabilan, sehingga diperoleh matriks Jacobi seperti berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -(d + \mu) - \beta(l + s) & -\beta p & -\beta p & \gamma \\ \beta(l + s) & \beta p - (d + \mu + \xi + \rho) & \beta p & 0 \\ 0 & \xi & -(d + \mu + \delta) & 0 \\ 0 & \rho & \delta & -(d + \mu + \gamma) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dihitung $|\lambda I - J| = 0$ untuk memperoleh nilai eigen yang jika disubstitusikan titik ekuilibrium bebas perokok, dapat diperoleh 4 nilai eigen, yaitu:

$$\lambda_1 = -d - \mu$$

Dapat dianalisa bahwa λ_1 bernilai negatif, karena semua parameter diasumsikan bernilai positif.

$$\lambda_2 = -d - \mu - \gamma$$

Sama halnya seperti λ_1 , λ_2 juga bernilai negatif karena semua parameter diasumsikan bernilai positif.

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta\omega}{d+\mu} - (2(d+\mu) + \xi + \rho + \delta) \right)$$

$$+ \sqrt{\frac{\beta^2\omega^2}{(d+\mu)^2} + \frac{2\beta\omega}{d+\mu}(\xi + \delta - \rho) + 2(-\delta\xi + \rho\xi - 2\delta\rho) + \xi^2 + (\rho + \delta)^2}$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta\omega}{d+\mu} - (2(d+\mu) + \xi + \rho + \delta) \right)$$

$$- \sqrt{\frac{\beta^2\omega^2}{(d+\mu)^2} + \frac{2\beta\omega}{d+\mu}(\xi + \delta - \rho) + 2(-\delta\xi + \rho\xi - 2\delta\rho) + \xi^2 + (\rho + \delta)^2}$$

Berdasarkan bentuk persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dimana jika akar-akar persamaan x_1 dan x_2

bernilai negatif, maka $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0$ dan $x_1 \cdot x_2 =$

$\frac{c}{a} > 0$. Sehingga, untuk λ_3 dan λ_4 yang berasal dari persamaan kuadrat $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ dimana λ_3 dan

λ_4 bernilai negatif, maka $\lambda_3 + \lambda_4 = \frac{-b}{a} < 0$ ketika

$$\beta < \frac{(2d+2\mu+\delta+\xi+\rho)(d+\mu)}{\omega} \text{ dan } \lambda_3 \cdot \lambda_4 = \frac{c}{a} > 0 \text{ ketika } \beta < \frac{(d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu+\delta)(d+\mu)}{\omega(d+\mu+\delta+\xi)}$$

Jadi, berdasarkan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, sistem pada titik ekuilibrium bebas perokok akan stabil dengan

$$\text{syarat } \beta < \frac{(2d+2\mu+\delta+\xi+\rho)(d+\mu)}{\omega} \text{ dan } \beta < \frac{(d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu+\delta)(d+\mu)}{\omega(d+\mu+\delta+\xi)}.$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan titik ekuilibrium endemik perokok, dapat diperoleh 4 nilai eigen seperti berikut:

$$\lambda_5 = -(d+\mu) - \left(\frac{(d+\mu+\gamma)((d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu)(d+\mu+\delta) - \omega\beta(d+\mu+\delta+\xi))}{\rho\gamma(d+\mu+\delta) + \gamma\delta\xi - (d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu+\delta)(d+\mu+\gamma)} \right)$$

berdasarkan aturan pembagian bilangan positif dan negatif yaitu $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ dengan a dan b merupakan

bilangan positif, maka haruslah $(d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu)(d+\mu+\delta) - \omega\beta(d+\mu+\delta+\xi) < 0$ dan $\rho\gamma(d+\mu+\delta) + \gamma\delta\xi - (d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu+\delta)(d+\mu+\gamma) < 0$, sehingga λ_5 bernilai negatif ketika $\beta >$

$$\frac{(d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu)(d+\mu+\delta)}{\omega(d+\mu+\delta+\xi)} \text{ dan } \gamma > \frac{-(d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu+\delta)(d+\mu)}{((d+\mu)^2 + \delta(d+\mu) + \xi(d+\mu))}.$$

$$\lambda_6 = -d - \mu - \gamma$$

λ_6 bernilai negatif, karena semua parameter diasumsikan bernilai positif.

$$\lambda_7 = \frac{1}{2} (-2d - 2\mu - \delta - \xi - \rho - (d+\mu+\delta)(\beta\omega(d+\mu+\delta+\xi) - \rho\gamma + \gamma(2\rho+d+\mu+\xi) + (d+\mu)(d+\mu+\xi+\rho)) - \gamma(\delta\xi + \rho(d+\mu+\delta))(d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu) + \sqrt{D})$$

$$\lambda_8 = -\frac{1}{2} (2d + 2\mu + \delta + \xi + \rho + (d+\mu+\delta)(\beta\omega(d+\mu+\delta+\xi) - \rho\gamma + \gamma(2\rho+d+\mu+\xi) + (d+\mu)(d+\mu+\xi+\rho)) - \gamma(\delta\xi + \rho(d+\mu+\delta))(d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu) + \sqrt{D})$$

dengan

$$D = \delta^2 + \xi^2 + \rho^2 + 2(\rho\xi - \delta\rho - \delta\xi) + \frac{1}{a}(-\omega\beta\gamma^3(d+\mu)(d+\mu+\delta+\xi)^2(\delta\xi + \rho(d+\mu+\delta)) - (-2\rho + 2\delta + 2\xi) + \omega\beta\xi(d+\mu+\xi+\rho)^2(d+\mu+\delta)^2(d+\mu+\gamma)^2(d+\mu)(d+\mu+\delta+\xi)(-2\rho + 2\delta + 2\xi) + (d+\mu+\delta)^2(d+\mu+\gamma)((d+\mu+\xi+\rho)(-2\gamma(\delta\xi + \rho(d+\mu+\delta))(d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu+\gamma))$$

$$\mu)(\omega\beta^3(d+\mu+\delta+\xi) + \xi(d+\mu)(-\rho+\delta+\xi)) - 2\delta\xi\omega\beta\gamma(d+\mu+\delta+\xi)(d+\mu)(-\rho+\delta+\xi) - 2\gamma\omega\beta(d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu+\delta+\xi)^2(\rho\omega\beta^3 + 2\rho(d+\mu)(-\rho+\delta+\xi) + \omega^2\beta^2(-2\rho+2\delta+2\xi)(d+\mu+\delta+\xi)^2((d+\mu+\gamma)(d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu+\delta+\xi)) + \gamma(d+\mu+\delta)^2((d+\mu+\delta+\xi)(\omega^2\beta^4(d+\mu+\delta+\xi)(d+\mu+\xi+\rho)(\delta\xi + \rho(d+\mu+\delta)) + 2\rho\gamma\omega\beta\rho(d+\mu)(-\rho+\delta+\xi)(d+\mu+\delta+\xi) + 2\rho\gamma(d+\mu)^2(-\rho+\delta+\xi)(d+\mu+\xi+\rho)(\delta\xi + \rho(d+\mu+\delta))) + \beta^2\gamma(d+\mu+\xi+\rho)^2(d+\mu)^2(\delta\xi + (\rho)(d+\mu+\delta))^2) + \omega\beta(d+\mu+\delta)(d+\mu+\gamma)((d+\mu+\delta+\xi)^2((d+\mu+\xi+\rho)(-2\delta\xi\gamma\omega\beta^3 + \omega\beta^3(d^3 + \mu^3 + 3\mu d(d+\mu) + (d^2 + \mu^2)(\gamma + \delta + \xi + \rho) + 2(\rho\gamma(d+\mu) + \mu d(\gamma + \delta) + (\rho + \xi)(\gamma\delta + \mu d)) + (\gamma(\delta + \xi) + \delta(\xi + \rho))(d+\mu)) - 4\gamma\delta\xi(d+\mu)(-\rho+\delta+\xi)) + 2\gamma\omega\beta(-\rho+\delta+\xi)(-\delta\xi + \gamma(s\delta\xi + \rho(d+\mu+\delta))) + \xi\gamma^2(d+\mu+\xi+\rho)(-2\rho+2\delta+2\xi)(d+\mu)(\delta\xi + \rho(d+\mu+\delta))^2(d+\mu+\delta+\xi)))$$

dan

$$a = (d+\mu+\delta+\xi)^2((d+\mu+\delta)((d+\mu+\xi+\rho)^2(d+\mu)^2(d+\mu+\delta)(d+\mu+\gamma)^2 + (d+\mu+\rho+\gamma+\xi)(d+\mu)^3((d+\mu+\delta)((d+\mu)(d+\mu+\rho+\gamma+\xi) - 2(d+\mu+\gamma)(d+\mu+\xi+\rho)) - 2\xi\gamma(\delta+1)) + 2(d+\mu+\gamma)(d+\mu)(\xi\gamma(\delta+1)(d+\mu)(d+\mu+\xi+\rho) - \omega\beta\gamma(d+\mu+\delta+\xi)(\xi+\rho))) + \omega\beta(d+\mu+\gamma)(d+\mu+\delta+\xi)(-2\xi\gamma(\delta+1)(d+\mu) + \omega\beta(d+\mu+\delta+\xi)(d+\mu+\gamma)) + \xi^2\gamma^2(\delta+1)^2(d+\mu)^2)$$

Berdasarkan bentuk persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dimana jika akar-akar persamaan x_1 dan x_2

bernilai negatif, maka $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0$ dan $x_1 \cdot x_2 =$

$\frac{c}{a} > 0$. Sehingga, untuk λ_7 dan λ_8 yang berasal dari persamaan kuadrat $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ dimana λ_7 dan

λ_8 bernilai negatif, maka $\lambda_7 + \lambda_8 = \frac{-b}{a} < 0$ dan

$\lambda_7 \cdot \lambda_8 = \frac{c}{a} > 0$ ketika

$$\beta > \frac{\gamma(\delta\xi + \rho(d+\mu+\delta))(d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu)}{\omega(d+\mu+\delta+\xi)(-\rho\gamma + \gamma(2\rho+d+\mu+\xi) + (d+\mu)(d+\mu+\xi+\rho))}$$

Jadi, berdasarkan $\lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$, dan λ_8 , titik ekuilibrium endemik perokok akan stabil dengan syarat $\beta >$

$$\frac{(d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu)(d+\mu+\delta)}{\omega(d+\mu+\delta+\xi)}, \gamma > \frac{-(d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu+\delta)(d+\mu)}{((d+\mu)^2 + \delta(d+\mu) + \xi(d+\mu))}, \text{ dan}$$

$$\beta > \frac{\gamma(\delta\xi + \rho(d+\mu+\delta))(d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu)}{\omega(d+\mu+\delta+\xi)(-\rho\gamma + \gamma(2\rho+d+\mu+\xi) + (d+\mu)(d+\mu+\xi+\rho))}$$

SIMULASI

Simulasi numerik dilakukan untuk mengetahui kesesuaian pada hasil perhitungan analisis dan hasil perhitungan numerik. Nilai parameter yang digunakan disajikan pada tabel 3 berikut.

Tabel 3. Nilai Parameter

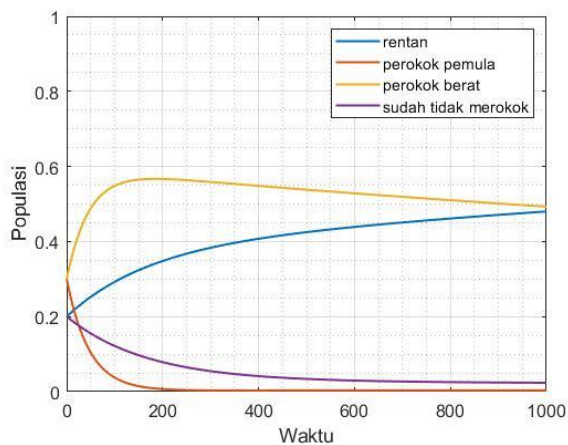
Simulasi dilakukan dengan bantuan *software* Matlab, dimana nilai awal yang digunakan adalah

Parameter	Nilai Parameter	Satuan	Sumber
ξ	0.021	hari^{-1}	(Alzaid & Alkahtani, 2021)
δ	0.000274	hari^{-1}	(Pang, Zhao, Liu, & Zhang, 2015)
ρ	0.0003	hari^{-1}	Asumsi
d	0.000005	hari^{-1}	(Huo & Zhu, 2013)
μ	0.00003	hari^{-1}	(Huo & Zhu, 2013)
ω	0.000035	hari^{-1}	Asumsi

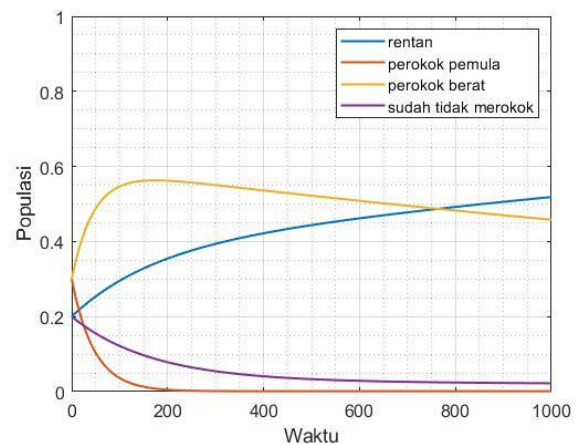
$p(0) = 0.2, l(0) = 0.3, s(0) = 0.3, q(0) = 0.2$.

Berdasarkan analisa kestabilan, titik ekuilibrium bebas perokok akan stabil ketika $\beta < \frac{(d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu+\delta)(d+\mu)}{\omega(d+\mu+\delta+\xi)}$. Substitusikan nilai parameter

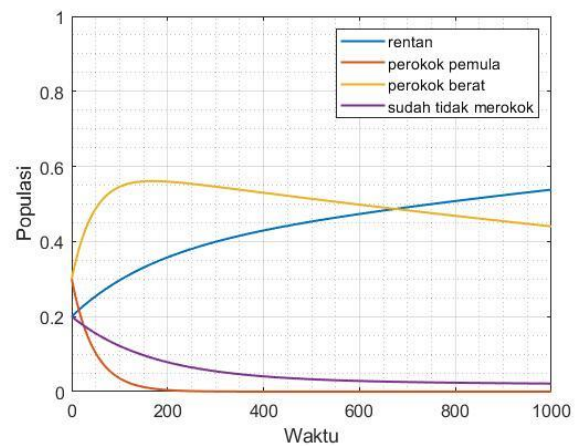
yang disajikan pada tabel 3, didapatkan $\beta < 0.0003093770238$. Sehingga simulasi kestabilan titik ekuilibrium bebas perokok berikut dilakukan dengan perubahan nilai β . Nilai γ yang digunakan adalah $\gamma = 0.006$ yang diambil berdasarkan artikel rujukan, yaitu artikel (Alzaid & Alkahtani, 2021).



Gambar 2. Simulasi numerik saat $\beta = 0.000298$ dan $\gamma = 0.006$



Gambar 3. Simulasi numerik saat $\beta = 0.0001$ dan $\gamma = 0.006$

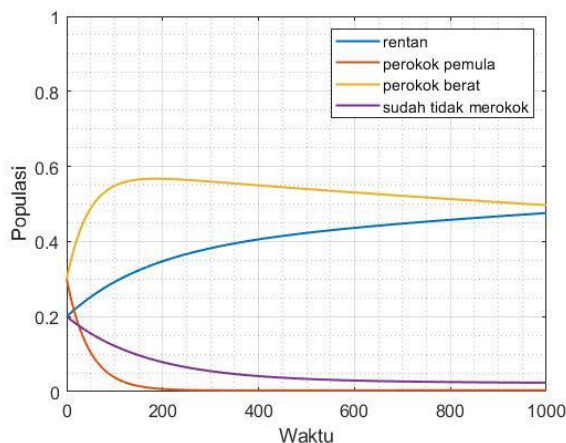


Gambar 4. Simulasi numerik saat $\beta = 0.0000005$ dan $\gamma = 0.006$

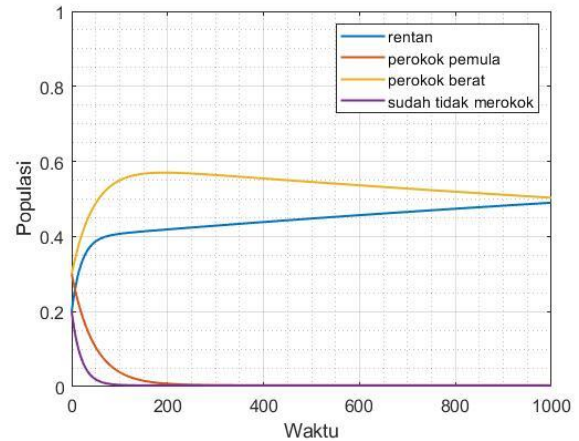
Gambar 2-4 menunjukkan bahwa dengan modifikasi nilai parameter β , subpopulasi rentan

meningkat dan membutuhkan waktu lebih dari 1000 hari untuk stabil. Subpopulasi perokok pemula menurun dan mulai stabil lebih cepat ketika $\beta = 0.0000005$ yaitu pada hari ke-269, dibandingkan ketika $\beta = 0.0001$ yang mulai stabil pada hari ke-366 atau ketika $\beta = 0.000298$ yang mulai stabil pada hari ke-631. Subpopulasi perokok berat membutuhkan waktu lebih dari 1000 hari untuk stabil dan grafiknya cenderung meningkat, namun mulai menurun lebih cepat ketika $\beta = 0.0000005$ yaitu pada hari ke-174, dibandingkan ketika $\beta = 0.0001$ yang mulai menurun pada hari ke-178 atau $\beta = 0.000298$ yang mulai menurun pada hari ke-189. Subpopulasi yang sudah tidak merokok mulai stabil lebih cepat ketika $\beta = 0.0000005$ yaitu pada hari ke-994, dibandingkan ketika $\beta = 0.0001$ yang mulai stabil pada hari ke-996 atau ketika $\beta = 0.000298$ yang mulai stabil pada hari ke-997.

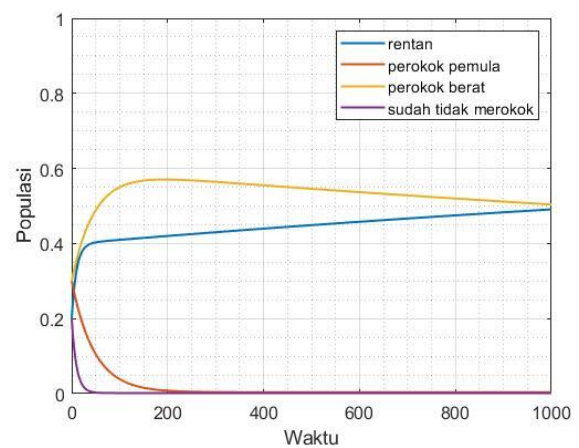
Selanjutnya dilakukan simulasi pada kestabilan titik ekuilibrium endemik perokok dengan perubahan nilai parameter β dan γ , karena berdasarkan analisa kestabilan, titik ekuilibrium endemik perokok akan stabil ketika $\beta > \frac{(d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu)(d+\mu+\delta)}{\omega(d+\mu+\delta+\xi)}$ dan $\gamma > \frac{-(d+\mu+\xi+\rho)(d+\mu+\delta)(d+\mu)}{((d+\mu)^2+\delta(d+\mu)+\xi(d+\mu))}$, sehingga dengan mensubstitusikan nilai parameter pada tabel 3, didapatkan $\beta > 0.0003093770238$ dan $\gamma > -1.423496079$.



Gambar 5. Simulasi numerik saat $\beta = 0.00032$ dan $\gamma = 0.006$

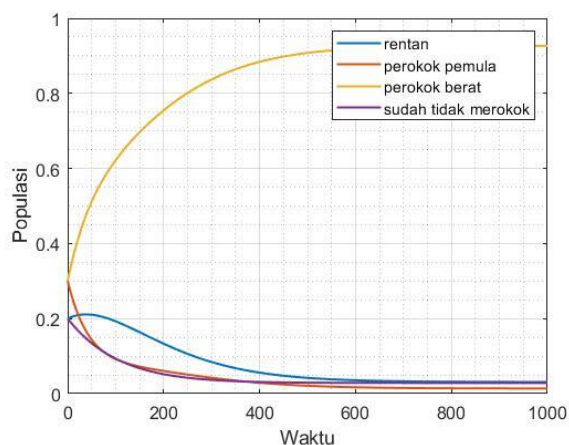


Gambar 6. Simulasi numerik saat $\beta = 0.00032$ dan $\gamma = 0.05$

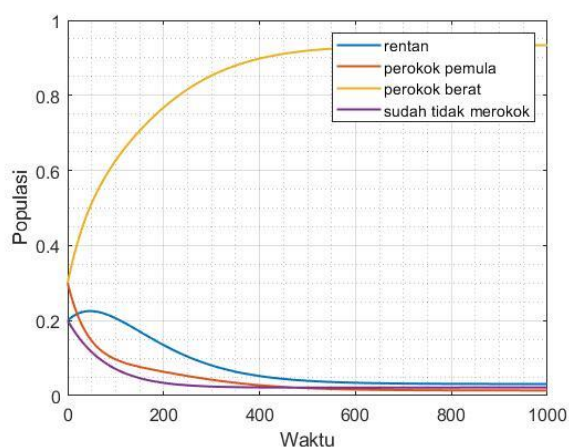


Gambar 7. Simulasi numerik saat $\beta = 0.00032$ dan $\gamma = 0.1$

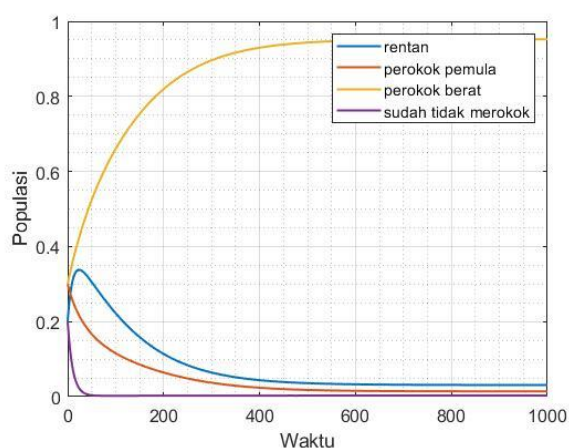
Gambar 5-7 menunjukkan simulasi numerik dengan $\beta = 0.00032$ dan modifikasi nilai γ . Subpopulasi rentan meningkat dan membutuhkan waktu lebih dari 1000 hari untuk mulai stabil. Subpopulasi perokok pemula menurun dan mulai stabil lebih cepat ketika $\gamma = 0.1$ yaitu pada hari ke-320, dibandingkan ketika $\gamma = 0.05$ yang mulai stabil pada hari ke-324 atau ketika $\gamma = 0.006$ yang mulai stabil pada hari ke-330. Subpopulasi perokok berat membutuhkan waktu lebih dari 1000 hari untuk mulai stabil, grafik subpopulasi perokok berat meningkat lalu mulai menurun lebih cepat ketika $\gamma = 0.006$ dibandingkan ketika $\gamma = 0.05$ atau $\gamma = 0.1$. Subpopulasi yang sudah tidak merokok menurun dan mulai stabil lebih cepat ketika $\gamma = 0.1$ yaitu pada hari ke-70 dibandingkan ketika $\gamma = 0.05$ yang mulai stabil pada hari ke-117 atau ketika $\gamma = 0.006$ yang mulai stabil pada hari ke-559.



Gambar 8. Simulasi numerik saat $\beta = 0.01$ dan $\gamma = 0.009$



Gambar 9. Simulasi numerik saat $\beta = 0.01$ dan $\gamma = 0.012$



Gambar 10. Simulasi numerik saat $\beta = 0.01$ dan $\gamma = 0.095$

Gambar 8-10 menunjukkan simulasi numerik dengan $\beta = 0.01$ dan modifikasi nilai parameter γ . Subpopulasi rentan meningkat namun mulai menurun dan mulai stabil lebih cepat ketika $\gamma = 0.095$ yaitu mulai menurun pada hari ke-26 dan mulai stabil pada hari ke-666, dibandingkan ketika

$\gamma = 0.012$ yang mulai menurun pada hari ke-51 dan mulai stabil pada hari ke-725 atau ketika $\gamma = 0.009$ yang mulai menurun pada hari ke-47 dan mulai stabil pada hari ke-772. Subpopulasi perokok pemula menurun dan mulai stabil lebih cepat ketika $\gamma = 0.095$ yang mulai stabil pada hari ke-527, dibandingkan ketika $\gamma = 0.012$ yang mulai stabil pada hari ke-752 atau ketika $\gamma = 0.009$ yang mulai stabil pada hari ke-596. Subpopulasi perokok berat meningkat dan mulai stabil lebih cepat ketika $\gamma = 0.095$ yaitu mulai stabil pada hari ke-574, dibandingkan ketika $\gamma = 0.012$ yang mulai stabil pada hari ke-958 atau ketika $\gamma = 0.009$ yang mulai stabil pada hari ke-994. Subpopulasi yang sudah tidak merokok menurun dan mulai stabil lebih cepat ketika $\gamma = 0.095$ yaitu pada hari ke-64, dibandingkan ketika $\gamma = 0.012$ yang mulai stabil pada hari ke-355 atau ketika $\gamma = 0.009$ yang mulai stabil pada hari ke-446.

Dari Gambar 5-10, dapat diketahui bahwa modifikasi nilai γ tidak mempengaruhi subpopulasi perokok, sehingga ketika diambil nilai γ berapapun, sistem akan tetap menuju titik ekuilibrium endemik perokok. Selanjutnya, semakin tinggi nilai β , maka subpopulasi perokok akan semakin tinggi juga.

Simulasi dilakukan dengan model matematika berupa persamaan diferensial yang sudah di *rescale*, ketika populasi $N = 1000$, maka subpopulasi awal adalah $P = 2000$ jiwa, $L = 3000$ jiwa, $S = 3000$ jiwa, dan $Q = 2000$ jiwa.

Jika dibandingkan dengan artikel rujukan (Alzaid & Alkahtani, 2021), ketika ditambahkan asumsi bahwa tingkat kesembuhan subpopulasi perokok pemula dan tingkat perubahan subpopulasi rentan menjadi perokok karena dipengaruhi oleh perokok pemula dan perokok berat, maka untuk stabil menuju titik ekuilibrium baik bebas perokok maupun perokok akan selalu ada, dibutuhkan waktu yang lebih banyak.

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian analisis model perilaku perokok dengan adanya faktor kekambuhan merokok, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika pada perilaku merokok yang berupa sistem persamaan diferensial, yaitu:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \omega N + \gamma Q - (d + \mu)P - \frac{\beta P(L + S)}{N}$$

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{\beta P(L+S)}{N} - (d + \mu + \xi + \rho)L$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = \xi L - (d + \mu + \delta)S$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \delta S + \rho L - (d + \mu + \gamma)Q$$

2. Titik ekuilibrium bebas perokok stabil saat $\beta < 0.0003093770238$ dengan $R_0 < 1$, yaitu:
 - a. $R_0 = 0.9632260223$ ketika $\beta = 0.000298$.
 - b. $R_0 = 0.3232302088$ ketika $\beta = 0.0001$.
 - c. $R_0 = 0.00161615144$ ketika $\beta = 0.000005$.
3. Titik ekuilibrium endemik atau perokok akan selalu ada stabil saat $\beta > 0.0003093770238$ dengan $R_0 > 1$, yaitu:
 - a. $R_0 = 1.034336668$ ketika $\beta = 0.00032$.
 - b. $R_0 = 32.32302088$ ketika $\beta = 0.01$.
4. Berdasarkan hasil analisa model perilaku perokok dengan adanya faktor kekambuhan merokok, dapat diperoleh bahwa semakin kecil tingkat penularan oleh perokok, maka lebih cepat menuju masa bebas perokok. Sebaliknya, jika tingkat penularan oleh perokok semakin besar, maka lebih cepat menuju masa endemik perokok. Sehingga, upaya pencegahan pada perilaku perokok haruslah lebih besar supaya perilaku perokok dapat semakin berkurang dan habis.

SARAN

Perlu adanya metode penelitian dan upaya penerapan yang lebih lanjut tentang model perilaku perokok, sehingga penulis berharap bahwa selanjutnya dapat dilanjutkan penelitian dengan menambahkan variabel kontrol.

DAFTAR PUSTAKA

- Alzaid, S. S., & Alkahtani, B. S. (2021). Asymptotic analysis of a giving up smoking model with relapse and harmonic mean type incidence rate. *elsevier*, 104437.
- Anton, H. (1991). *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.
- Arsyad, S. H., Resmawan, & Achmad, N. (2020). Analisis model predator-prey leslie-gower dengan pemberian racun pada predator. *JRAM*, 1-16.
- Asif, M., Khan, Z. A., Haider, N., & Al-Mdallal, Q. (2020). Numerical simulation for solution of SEIR models by meshless and finite difference methods. *elsevier*, 110340.

Astuti, S. I. (2017). Educating Youth Againsts Tobacco Advertising: A Media Literacy Approach for Reducing Indonesia's Replacement Smokers. *MediaTor*, 65-74.

Bhawna, G. (2013). Burden of Smoked and Smokeless Tobacco Consumption in India-Results from the Global adult Tobacco Survey India(GATS-India)-2009-2010. *Asian Pacific Journal of Cancer Prevention*, 3323-3329.

Boyce, W. E., Diprima, R. C., & Meade, D. B. (2016). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley.

Diekmann, O., Heesterbeek, J. A., & Roberts, M. G. (2010). The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models. *Interface*, 873-885.

Driessche, P. v., & Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *elsevier*, 29-48.

Hajdusianek, W., Zorawik, A., Waliszewska-Prosol, M., Poreba, R., & Gac, P. (2021). Tobacco and Nervous System Development and Function-New Findings 2015-2020. *brain sciences*, 1-15.

Holipah, H., Sulistomo, H. W., & Maharani, A. (2020). Tobacco smoking and risk of all-cause mortality in Indonesia. *PLOS ONE*, 1-12.

Huo, H.-F., & Zhu, C.-C. (2013). Influence of Relapse in a Giving Up Smoking Model. *Abstract and Applied Analysis*, 1-12.

Kumboyono. (2011). Analisis faktor penghambat motivasi berhenti merokok berdasarkan health belief model pada mahasiswa fakultas teknik universitas brawijaya malang. *Jurnal Keperawatan Soedirman*, 1-8.

Nadeem, F., Fahim, A., & Bugti, S. (2012). Effects of cigarette smoking on male fertility. *TUBITAK*, 1400-1405.

Pang, L., Zhao, Z., Liu, S., & Zhang, X. (2015). A mathematical model approach for tobacco control in China. *elsevier*, 497-509.

Rahman, G. u., Agarwal, R. P., & Din, Q. (2019). Mathematical analysis of giving up smoking model via harmonic mean type incidence rate. *elsevier*, 128-148.

Sreeramareddy, C. T., Kishore, P., Paudel, J., & Menezes, R. G. (2008). Prevalence and correlates of tobacco use amongst junior collegiates in twin cities of western Nepal: A cross-sectional, questionnaire-based survey. *BMC Public Health* .