

PELABELAN HARMONIS GANJIL KUAT BEBERAPA KELAS GRAF

Juwita Marlinda Sari

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
email: juwita.19005@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
Penulis Korespondensi: ketutbudayasa@unesa.ac.id

Abstrak

Misalkan graf G dengan q sisi. Sebuah pelabelan harmonis ganjil pada G adalah sebuah fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2, \dots, 2q - 1\}$ sedemikian hingga fungsi terinduksi $f^*: E(G) \rightarrow \{1,3,5, \dots, 2q - 1\}$ dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ merupakan fungsi bijektif. Jika kodomain fungsi f adalah $\{0,1,2, \dots, q\}$ maka f disebut pelabelan harmonis ganjil kuat pada G . Misalkan siklus C_m dan siklus C_n saling lepas. Misal $x \in V(C_m)$ dan $y \in V(C_n)$. Graf G dibentuk dari C_m dan C_n dengan "menghimpitkan/menyatukan" titik x dan titik y dilambangkan dengan $G = C_m \square C_n$. Misal $kl \in E(C_m)$ dan $mn \in E(C_n)$. Graf G dibentuk dari C_m dan C_n dengan "menghimpitkan/menyatukan" sisi kl dan sisi mn dilambangkan dengan $G = C_m \circ C_n$. Pada skripsi ini dibuktikan bahwa siklus C_n harmonis ganjil kuat jika $n \equiv 0 \pmod{4}$. Ditunjukkan juga bahwa graf bipartit komplet $K_{2,n}$ adalah graf harmonis ganjil kuat untuk $n \geq 1$. Selanjutnya, ditunjukkan jika G_1 dan G_2 graf harmonis ganjil kuat, maka $G_1 \circ G_2$ dan $G_1 \square G_2$ adalah graf harmonis ganjil kuat. Kelas-kelas graf berikut yaitu: $K_{\{2,n\}} \circ C_k \circ C_l \circ K_{\{2,m\}}$; $K_{\{2,n\}} \square C_k \square C_l \square K_{\{2,m\}}$; $K_{\{2,n\}} \circ C_k \square C_l \circ K_{\{2,m\}}$; dan $K_{\{2,n\}} \square C_k \circ C_l \square K_{\{2,m\}}$ dengan $n \geq 1, m \geq 1, k, l \equiv 0 \pmod{4}$ merupakan graf harmonis ganjil kuat.

Kata Kunci: pelabelan graf, pelabelan harmonis, pelabelan harmonis ganjil, pelabelan harmonis ganjil kuat.

Abstract

Let G be a simple graph with q edges. An odd harmonious labeling on G is an injective function $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2, \dots, 2q - 1\}$ such that the induced function $f^*: E(G) \rightarrow \{1,3,5, \dots, 2q - 1\}$ where $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ is a bijective function. If the codomain of the function f is $\{0,1,2, \dots, q\}$ then f is called strongly odd harmonious labeling in G . For example, cycle C_m and cycle C_n , is a unconnected graphs. For example $x \in V(C_m)$ and $y \in V(C_n)$. Graph G is formed from C_m and C_n by identifying the vertices x and y , is denoted by $G = C_m \square C_n$. For example $kl \in E(C_m)$ and $mn \in E(C_n)$. Graph G is formed from C_m and C_n by identifying the edges kl and mn , is denoted by $G = C_m \circ C_n$. In this thesis, we prove that cycle C_n is a strong odd harmonious if $n \equiv 0 \pmod{4}$. We also have shown that complete bipertite graph $K_{2,n}$ is a strong odd harmonious for $n \geq 1$. We proved that if G_1 and G_2 are strong odd harmonious graphs, then $G_1 \circ G_2$ and $G_1 \square G_2$ are also strong odd harmonious graph. The following graph classes: $K_{\{2,n\}} \circ C_k \circ C_l \circ K_{\{2,m\}}$; $K_{\{2,n\}} \square C_k \square C_l \square K_{\{2,m\}}$; $K_{\{2,n\}} \circ C_k \square C_l \circ K_{\{2,m\}}$; dan $K_{\{2,n\}} \square C_k \circ C_l \square K_{\{2,m\}}$ for $n \geq 1, m \geq 1, k, l \equiv 0 \pmod{4}$ are strong odd harmonious graphs.

Keywords: graph labeling, harmonious labeling, odd harmonious labeling, strong odd harmonious labeling.

PENDAHULUAN

Teori graf pertama kali dikenal ketika adanya upaya pemecahan masalah jembatan Konigsberg pada tahun 1736 oleh Leonhard Euler yang digambarkan dengan sebuah graf. Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ yang elemen-elemennya disebut titik

dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasang tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$ (Budayasa, 2007).

Dalam kegiatan sehari-hari aplikasi teori graf dapat digunakan di berbagai bidang ilmu pengetahuan seperti ilmu komputer, sains, teknik,

bisnis maupun ilmu sosial. Di dalam teori graf terdapat berbagai macam pokok bahasan, salah satunya yaitu pelabelan. Dalam perkembangannya, terdapat berbagai jenis pelabelan graf salah satunya yaitu pelabelan harmonis.

Pada tahun 1980, R.L. Graham dan N.J. Sloane mulai memperkenalkan pelabelan harmonis. Disebut graf harmonis yaitu ketika graf $G(p, q)$ dengan p titik dan q sisi terdapat f fungsi injektif dari titik-titik pada himpunan bilangan bulat modulo q sehingga ketika setiap $x, y \in V(G)$, sisi xy dilabeli dengan $f(x) + f(y) \pmod{q}$, maka hasil label setiap sisinya berbeda (Graham, R. L. dan N. J. A. Sloane, 1980).

Setelah itu, pelabelan harmonis berkembang menjadi pelabelan harmonis ganjil, pelabelan harmonis ganjil semi-kuat, dan pelabelan harmonis ganjil kuat.

Pada tahun 2009 telah dibuktikan beberapa sifat graf harmonis ganjil oleh Liang dan Bai diantaranya yaitu jika G adalah graf harmonis ganjil maka G adalah graf bipartit dan jika graf $G(p, q)$ adalah graf harmonis ganjil maka $2\sqrt{q} \leq p \leq 2q - 1$. Selain itu, Liang dan Bai (2009) juga membuktikan bahwa jika dan hanya jika $n \equiv 0 \pmod{4}$, maka graf lingkaran C_n adalah graf harmonis ganjil. Vaidya dan Shah (2012) membuktikan bahwa beberapa graf yaitu graf bintang $K_{1,n}$, graf *shadow* dan graf *split* dari graf lintasan P_n adalah graf harmonis ganjil. Pada tahun 2014, Abdel-Aal menemukan bahwa jika dua sikel panjangnya sama disatukan satu titik dari masing-masing sikel dan graf yang diperoleh dari dua sikel panjangnya sama disatukan satu sisi dari masing-masing adalah graf harmonis ganjil. Jeyanthi, Philo, Sugeng, K. A. (2015) membuktikan bahwa $DQ(n)$ dengan $n \geq 2$, graf $D_2(K_{2,n})$, graf $D_2(C_n)$, dan graf $D_2(H_{n,n})$ adalah graf harmonis ganjil. Jeyanthi dan Philo (2016) membuktikan bahwa beberapa kelas graf yang diperoleh dari dua sikel dengan menyatukan satu titik pada masing-masing sikel dan beberapa kelas graf yang diperoleh dari dua sikel dengan menyatukan satu sisi pada masing-masing sikel adalah graf harmonis ganjil. Firmansyah (2016) membuktikan bahwa gabungan graf ular $k C_4 \cup k C_4$ dengan $k \geq 1$ dan graf ular berlipat $k C_4(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil. Firmansyah dan Yuwono

(2017) membuktikan bahwa gabungan dari graf ular berlipat yaitu $k C_4(r) \cup k C_4(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil.

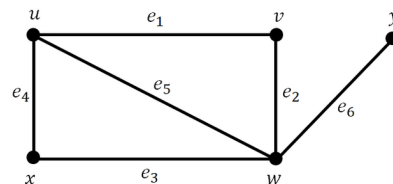
KAJIAN TEORI

Definisi 2.1:

Graf G berisikan dua himpunan yaitu $V(G)$ atau himpunan titik G dan $E(G)$ atau himpunan sisi G . $V(G)$ adalah himpunan berhingga yang tidak mungkin kosong sedangkan $(E(G))$ adalah himpunan berhingga yang mungkin kosong sedemikian sehingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasang tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$ (Budayasa, 2007).

Contoh 2.1:

Graf G dengan 5 titik dan 6 sisi dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2. 1 Graf G dengan 5 titik dan 6 sisi

Definisi 2.2:

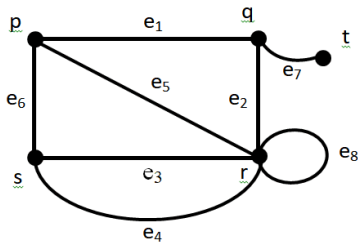
Misalkan G graf, $u, v \in V(G)$ dan $e_1 = uv \in E(G)$ seperti pada Gambar 2.1. Titik u dan v berhubungan langsung (*adjacent*) di G , sisi e_1 menghubungkan (*joining*) titik u dan titik v di G , u dan v titik-titik akhir sisi e_1 , dan sisi e_1 terkait (*incident*) dengan titik u dan titik v (Budayasa, 2007).

Definisi 2.3:

Graf G memiliki sisi gelung (*loop*) yaitu jika sebuah titik dihubungkan oleh sebuah sisi dengan titik itu sendiri. Misalnya pada Gambar 2.1 sisi e_8 adalah sebuah gelung. Graf G memiliki sisi rangkap/sisi-ganda (*multiple-edges*) yaitu jika dua titik graf G memiliki lebih dari satu sisi yang menghubungkannya. Misalnya pada Gambar 2.2 sisi-sisi e_3 dan e_4 adalah sisi-sisi rangkap. Budayasa (2007) menyebutkan bahwa graf G yang tidak memiliki sisi rangkap dan tidak memiliki gelung disebut graf sederhana dan jika graf tersebut memiliki sisi rangkap tetapi tidak memiliki gelung maka disebut graf rangkap (*multi graph*).

Contoh 2.2:

Contoh graf H dengan 5 titik dan 8 sisi dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2. 2 Graf H dengan 5 titik dan 8 sisi

Definisi 2.4:

Misalkan G adalah graf. Sebuah barisan berhingga tak kosong dengan suku bergantian titik dan sisi sehingga v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik akhir dari sisi e_i untuk $1 \leq i \leq k$ disebut jalan (*walk*) di G . Misalkan W salah satu jalan di G dari titik v_0 ke titik v_k atau jalan- (v_0, v_k) , $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$. Titik awal dan titik akhir dari W berturut-turut yaitu titik v_0 dan titik v_k sedangkan titik-titik internal W yaitu v_1, v_2, \dots, v_{k-1} . Panjang dari jalan W adalah k . Jadi, banyaknya sisi dalam W adalah panjang jalan W . Dalam jalan, sebuah titik di G maupun sisinya bisa muncul lebih dari satu kali. W disebut jejak (*trail*) jika dalam jalan W semua sisi e_1, e_2, \dots, e_k berbeda. W disebut lintasan (*path*) jika dalam jalan W semua titik v_0, v_1, \dots, v_k berbeda. Disebut sirkuit jika jejak tertutup yaitu semua sisi e_1, e_2, \dots, e_k berbeda dan memiliki titik awal dan titik akhir sama. Sirkuit Euler yaitu sebuah sirkuit di G yang memuat semua sisi G dan grafnya disebut Graf Euler. Disebut sikel (*cycle*) jika jejak tertutup dengan titik awal dan semua titik internalnya berbeda sehingga semua sisi dan semua titiknya berbeda. Panjang dari sikel yaitu banyaknya sisi dari sikel tersebut. Misalkan sikel dengan panjang k disebut sikel- k dan dilambangkan dengan C_k . Disebut Sikel Hamilton jika semua titik dari graf G termuat pada sebuah sikel dan graf tersebut disebut Graf Hamilton (Budayasa, 2007).

PEMBAHASAN

Berikut ditunjukkan konsep pelabelan harmonis ganjil pada graf G .

Definisi 3.1:

Misalkan G sebuah graf dengan q sisi. Sebuah pelabelan harmonis ganjil pada G adalah sebuah fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2q - 1\}$ sedemikian hingga fungsi terinduksi

$$f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2q - 1\}$$

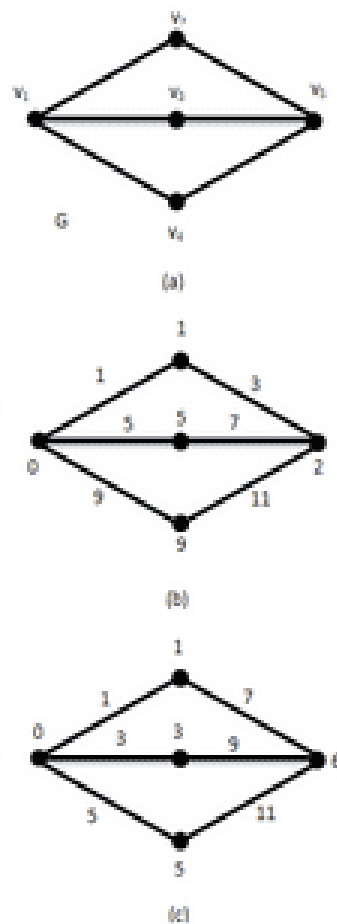
dengan

$$f^*(uv) = f(u) + f(v)$$

merupakan fungsi bijektif (Liang & Bai, 2009).

Contoh 3.1:

Pada Gambar 3.1 (a) ditunjukkan graf G dengan 5 titik dan 6 sisi. sebuah pelabelan harmonis ganjil dari G diperlihatkan pada Gambar 3.1 (b). begitu juga Gambar 3.1 (c) memperlihatkan pelabelan harmonis ganjil yang lain.



Gambar 3.1 Pelabelan harmonis ganjil graf G

Berikut diberikan syarat perlu sebuah graf merupakan graf harmonis ganjil.

Teorema 3.1:

Jika Graf G harmonis ganjil, maka setiap sikel di G panjangnya genap.

Bukti :

Misalkan graf G harmonis ganjil, maka ada fungsi injektif $f:V(G) \rightarrow \{0,1,2, \dots, 2q - 1\}$ sedemikian hingga fungsi terinduksi $f^*:E(G) \rightarrow \{1,3,5, \dots, 2q - 1\}$ adalah fungsi bijektif.

Karena $\forall e = uv \in E(G), f^*(uv) = f(u) + f(v)$ bilangan ganjil. Maka, $f(u)$ ganjil dan $f(v)$ genap atau $f(u)$ genap dan $f(v)$ ganjil.

Misalkan $A = \{x \in V(G) | f(x) \text{ genap}\}$ dan $B = \{y \in V(G) | f(y) \text{ ganjil}\}$

Maka $A \cup B = V(G)$ dan setiap titik di A dan titik di B dihubungkan oleh sebuah sisi G . Akibatnya, graf G bipartit dengan bipartisi (A, B) .

Misalkan $C = \{v_1, v_2, \dots, v_k, v_1\}$ sebuah siklus panjang k pada graf G .

Tanpa menghilangkan keumuman, misal $v_1 \in A$. Karena G bipartit, maka titik-titik C berindeks genap terletak di B dan titik-titik berindeks ganjil terletak di A . Karena $v_k v_1 \in E(G), v_1 \in A$, dan G bipartit, maka $v_k \in B$. Akibatnya, k genap sehingga panjang siklus C adalah genap.

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Berikut ditunjukkan operasi graf yaitu penghimpitan satu titik dari dua graf.

Definisi 3.2:

Graf siklus C_n adalah graf yang terdiri dari tepat satu siklus $n \geq 3$. Misalkan graf siklus C_m dan graf siklus C_n saling lepas. Misal $x \in V(C_m)$ dan $y \in V(C_n)$. Graf G dibentuk dari C_m dan C_n dengan "menghimpitkan/menyatukan" titik x dan titik y dilambangkan dengan $G = C_m \square C_n$. Banyak titik dari graf $C_m \square C_n$ adalah $m + n - 1$ sedangkan banyak sisinya $m + n$.

Contoh 3.2:

Sebagai ilustrasi dari Definisi 3.2, graf $G = C_5 \square C_4$ dapat dilihat pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Graf $G = C_5 \square C_4$

Berikut ditunjukkan bahwa Teorema 3.1 bukan merupakan syarat cukup sebuah graf merupakan graf harmonis ganjil.

Teorema 3.2:

Jika $m \equiv 0 \pmod{4}$ dan $n \equiv 2 \pmod{4}$ atau $m \equiv 2 \pmod{4}$ dan $n \equiv 0 \pmod{4}$ maka graf $C_m \square C_n$ bukan graf harmonis ganjil.

Bukti:

Kasus 1: $m \equiv 0 \pmod{4}$ dan $n \equiv 2 \pmod{4}$.

Misalkan $m = 4k$ dan $n = 4l + 2$, maka $|V(C_m \square C_n)| = 4k + 4l + 1$ dan $|E(C_m \square C_n)| = 4k + 4l + 2$

Misalkan

$V(C_m \square C_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_{4l+1}\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_{4k-1}\} \cup \{u\}$
 Andaikan graf $C_m \square C_n$ graf harmonis ganjil dan f adalah pelabelan harmonis ganjil pada $C_m \square C_n$.

Maka,

$$2 \sum_{i=1}^{4l+1} f(u_i) + 2 \sum_{j=1}^{4k-1} f(v_j) + 4f(u) = q^2 = (m + n)^2 = (4k + 4l + 2)^2 = 4(2k + 2l + 1)^2$$

Dengan demikian,

$$2 \sum_{i=1}^{4l+1} f(u_i) + 2 \sum_{j=1}^{4k-1} f(v_j) + 4f(u) \text{ bernilai genap} \dots (3.1)$$

Subkasus 1: $f(u)$ genap

Pada C_n terdapat $2l + 1$ label genap dan $2l + 1$ label ganjil sehingga $2 \sum_{i=1}^{4l+1} f(u_i)$ adalah jumlah dari $2l$ bilangan genap dan $2l + 1$ bilangan ganjil sehingga hasilnya merupakan bilangan ganjil. Demikian juga, $2 \sum_{j=1}^{4k-1} f(v_j)$ adalah jumlah dari $2k - 1$ bilangan genap dan $2k$ bilangan ganjil sehingga hasilnya merupakan bilangan genap. Akibatnya, $2 \sum_{i=1}^{4l+1} f(u_i) + 2 \sum_{j=1}^{4k-1} f(v_j)$ adalah ganjil. Bertentangan dengan (3.1).

Subkasus 2: $f(u)$ ganjil

$2 \sum_{i=1}^{4l+1} f(u_i)$ adalah jumlah dari $2l$ bilangan ganjil dan $2l + 1$ bilangan genap sehingga hasilnya merupakan bilangan genap. Demikian juga, $2 \sum_{j=1}^{4k-1} f(v_j)$ adalah jumlah dari $2k - 1$ bilangan ganjil dan $2k$ bilangan genap sehingga hasilnya merupakan bilangan ganjil. Akibatnya, $2 \sum_{i=1}^{4l+1} f(u_i) + 2 \sum_{j=1}^{4k-1} f(v_j)$ adalah ganjil. Bertentangan dengan (3.1).

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Berikut ditunjukkan konsep pelabelan harmonis ganjil semi-kuat dan kuat.

Definisi 3.3:

Misalkan G sebuah graf dengan q sisi. Jika pelabelan f dengan

$$f:V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, q, q + 1\}$$

merupakan fungsi injektif, sedemikian hingga fungsi tereduksi

$$f^*:E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2q - 1\}$$

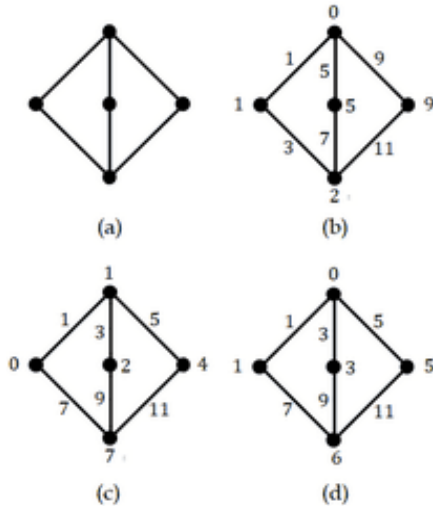
dengan

$$f^*(uv) = f(u) + f(v), \forall uv \in E(G)$$

merupakan fungsi bijektif, maka f disebut pelabelan harmonis ganjil semi-kuat. Jika kodomain fungsi f adalah $\{0, 1, 2, \dots, q\}$, maka f disebut pelabelan harmonis ganjil kuat pada G , dan graf G disebut graf harmonis ganjil kuat.

Contoh 3.3:

Perhatikan graf G pada Gambar 3.3 (a). setiap sikel di G mempunyai panjang 4(genap) dan banyak sisi di G adalah $q = 6$, sehingga $2q - 1 = 11$.



Gambar 3.3 (a) Graf G ; (b) Pelabelan harmonis ganjil pada G ; (c) Pelabelan harmonis ganjil semi-kuat pada G ; (d) Pelabelan harmonis ganjil kuat pada G

Berikut ditunjukkan beberapa kelas graf harmonis ganjil semi-kuat dan kuat.

Definisi 3.4:

Graf bintang dibentuk dari sebuah titik, namakan titik x , dan ditambahkan sebanyak $n \geq 1$ sisi "pendant" pada x . Graf bintang tersebut dilambangkan dengan $S(n)$. Perhatikan bahwa $S(n) = K_{1,n}$. Titik x disebut titik pusat bintang. Jelas bahwa $S(n)$ mempunyai $n + 1$ titik dan n sisi.

Teorema 3.3:

Graf bintang $S(n)$ adalah harmonis ganjil. Jika $1 \leq n \leq 3$, maka $S(n)$ harmonis ganjil semi-kuat. Jika $1 \leq n \leq 2$, maka $S(n)$ harmonis ganjil kuat.

Bukti:

Untuk $n \geq 1$, misalkan titik pusat $S(n)$ adalah x dan himpunan titik pendant $S(n)$ adalah $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

Definisikan fungsi

$$f:V(S(n)) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\}$$

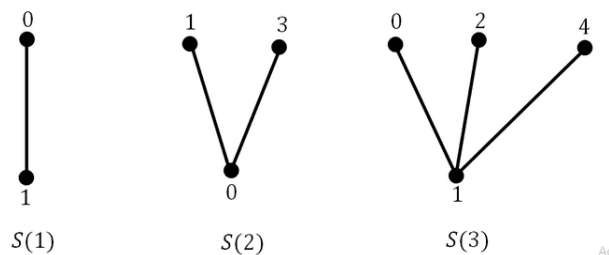
$$\text{dengan } f(v_i) = \begin{cases} 1, & \text{jika } v = x \\ 2i - 2, & \text{jika } v = y_i, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Dapat dibuktikan dengan mudah bahwa f fungsi injektif dan fungsi tereduksi

$$f^*:E(S(n)) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$$

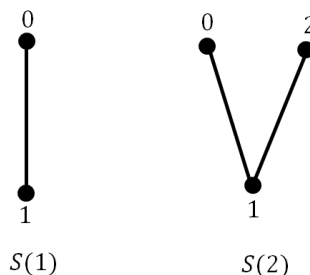
dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v), \forall uv \in E(S(n))$ adalah fungsi bijektif. Dengan demikian, f adalah pelabelan harmonis ganjil pada $S(n)$.

Untuk $1 \leq n \leq 3$, pelabelan harmonis ganjil semi-kuat dari graf $S(n)$, ditunjukkan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Pelabelan harmonis ganjil semi-kuat dari graf $S(1)$, $S(2)$ dan $S(3)$

Untuk $1 \leq n \leq 2$, pelabelan harmonis ganjil kuat dari graf $S(n)$ dapat ditunjukkan seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.5 Pelabelan harmonis ganjil kuat dari graf $S(1)$ dan $S(2)$

Teorema 3.4:

Untuk $n \geq 1$, fungsi $f:V(K_{2,n}) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$

$$\text{dengan } f(v) = \begin{cases} 0, & v = x_{11} \\ 2i - 1, & v = x_{2i}, 1 \leq i \leq n \\ 2n, & v = x_{12} \end{cases}$$

adalah pelabelan harmonis ganjil kuat pada graf bipartit komplit $K_{2,n}$.

Bukti:

$$|V(K_{2,n})| = 2 + n \text{ dan } |E(K_{2,n})| = 2n.$$

Misal $V_1 = \{x_{11}, x_{12}\}$ dan $V_2 = \{x_{2i}, 1 \leq i \leq n\}$.
 Himpunan peta titik-titik di V_1 oleh fungsi f adalah $A_1 = \{0, 2n\}$. Himpunan peta titik-titik di V_2 oleh fungsi f adalah $A_2 = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$ sehingga $R_f = A_1 \cup A_2 = \{0, 2n, 1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$ dan $|R_f| = |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| = 2 + n$
 Domain fungsi f adalah $D_f = V(K_{2,n})$, sehingga $|D_f| = |V(K_{2,n})| = 2 + n$. Karena $|D_f| = |R_f| = 2 + n$, f merupakan fungsi injektif.

Selanjutnya ditunjukkan fungsi tereduksi $f^*: E(K_{2,n}) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 4n - 1\}$.

dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v), \forall uv \in E(K_{2,n})$ merupakan fungsi bijektif.

Ditinjau dari 2 kasus.

Kasus 1: $\forall i, 1 \leq i \leq n, x_{11}x_{2i} \in E(K_{2,n})$

Berdasarkan fungsi f diperoleh

$$f^*(x_{11}x_{2i}) = f(x_{11}) + f(x_{2i}) = 0 + 2i - 1 = 2i - 1.$$

Dengan demikian, himpunan peta sisi $x_{11}x_{2i}$ oleh fungsi f^* adalah $B_1 = \{2i - 1 | 1 \leq i \leq n\} = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$

Kasus 2: $\forall i, 1 \leq i \leq n, x_{12}x_{2i} \in E(K_{2,n})$

Berdasarkan fungsi f diperoleh $f^*(x_{12}x_{2i}) = f(x_{12}) + f(x_{2i}) = 2n + 2i - 1$.

Dengan demikian, himpunan peta sisi $x_{12}x_{2i}$ oleh fungsi f^* adalah $B_2 = \{2n + 2i - 1 | 1 \leq i \leq n\} = \{2n + 1, 2n + 2, \dots, 4n - 1\}$.

Dari dua kasus di atas, diperoleh

$$R_f^* = B_1 \cup B_2 = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1, 2n + 1, \dots, 4n - 1\} \text{ dan}$$

$$|R_f^*| = |B_1 \cup B_2| = |B_1| + |B_2| = n + n = 2 \dots (3.2)$$

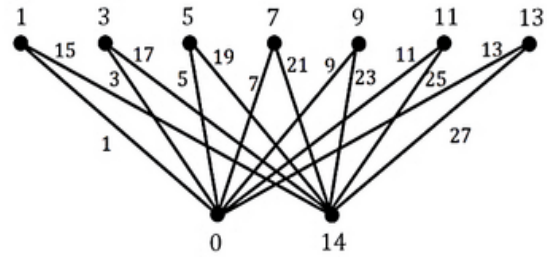
Domain fungsi f adalah $D_f^* = E(K_{2,n})$ sehingga $|D_f^*| = |E(K_{2,n})| = 2n \dots (3.3)$

Dari (3.2) dan (3.3) diperoleh $|D_f^*| = |E(K_{2,n})| = |R_f^*| = 2n$. Akibatnya, fungsi f^* bijektif.

Berdasarkan Definisi 3.3, fungsi f adalah pelabelan harmonis ganjil kuat pada graf $K_{2,n}$. Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Contoh 3.4:

Sebagai ilustrasi, pelabelan harmonis ganjil kuat pada graf bipartit komplit $K_{2,7}$ dapat dilihat pada Gambar 3.6.



Gambar 3.6 Pelabelan harmonis ganjil kuat pada graf $K_{2,7}$

Teorema 3.5:

Jika $n \equiv 0 \pmod{4}$ maka siklus C_n merupakan graf harmonis ganjil kuat.

Bukti:

Misalkan $C_n = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v_1)$.

Didefinisikan $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$ sedemikian hingga

$$f(v_i) = \begin{cases} i - 1, & 1 \leq i \leq \frac{n}{2} \text{ atau } i \text{ genap dari } \frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n \\ i + 1, & i \text{ ganjil dari } \frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Ditunjukkan bahwa f fungsi injektif. Misalkan $v_i, v_j \in V(C_n)$ dengan $i \neq j$.

Terdapat 3 kasus:

Kasus 1: $1 \leq i < j \leq \frac{n}{2}$

Maka, $f(v_i) = i - 1, f(v_j) = j - 1$. Karena $i \neq j$ sehingga $f(v_i) = i - 1 \neq j - 1 = f(v_j)$

Kasus 2: $\frac{n}{2} + 1 \leq i < j \leq n$. (Terdapat 4 subkasus)

Subkasus 2.1: i, j genap.

Maka, $f(v_i) = i - 1, f(v_j) = j - 1$. Karena $i \neq j$ sehingga $f(v_i) = i - 1 \neq j - 1 = f(v_j)$

Subkasus 2.2: i genap, j ganjil.

Maka, $f(v_i) = i - 1, f(v_j) = j + 1$. Karena $i < j$ sehingga $f(v_i) = i - 1 \neq j + 1 = f(v_j)$

Subkasus 2.3: i ganjil, j genap.

Maka, $f(v_i) = i + 1, f(v_j) = j - 1$. Karena $i < j$ sehingga $f(v_i) = i + 1 \neq j - 1 = f(v_j)$

Subkasus 2.4: i, j ganjil.

Maka, $f(v_i) = i + 1, f(v_j) = j + 1$. Karena $i \neq j$ sehingga $f(v_i) = i + 1 \neq j + 1 = f(v_j)$

Kasus 3: $1 \leq i \leq \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1 \leq j \leq n$.

Terdapat 2 subkasus

Subkasus 3.1: j genap.

Maka, $f(v_i) = i - 1, f(v_j) = j + 1$. Karena $i \neq j$ sehingga $f(v_i) = i - 1 \neq j + 1 = f(v_j)$

Subkasus 3.2: j ganjil.

Maka, $f(v_i) = i - 1, f(v_j) = j - 1$.Karena $i \neq j$ sehingga $f(v_i) = i - 1 \neq j - 1 = f(v_j)$
 Jadi, f fungsi injektif.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa fungsi $f^*: E(C_n) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$ dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v) \forall uv \in E(C_n)$ merupakan fungsi bijektif.

$$E(C_n) = \{V_i V_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{V_n V_1\}$$

Kasus 1: $1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i - 1) + ((i - 1) + 1) = 2i - 1 \\ A_1 &= \{1, 3, 5, \dots, n - 3\} \end{aligned}$$

Kasus 2: $i = \frac{n}{2}$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= \left(\frac{n}{2} - 1\right) + \left(\left(\frac{n}{2} + 1\right) + 1\right) = n + 1 \\ A_2 &= \{n + 1\} \end{aligned}$$

Kasus 3: $\frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n - 1$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i - 1) + ((i + 1) + 1) \text{ jika } i \text{ genap } \vee \\ &= (i + 1) + ((i + 1) - 1) \text{ jika } i \text{ ganjil} = 2i + 1 \\ A_3 &= \{n + 3, n + 5, \dots, 2n - 1\} \end{aligned}$$

Kasus 4: $v_n v_1$

$$\begin{aligned} f^*(v_n v_1) &= f(v_n) + f(v_1) \\ &= (n - 1) + (1 - 1) = n - 1 \\ A_4 &= \{n - 1\} \end{aligned}$$

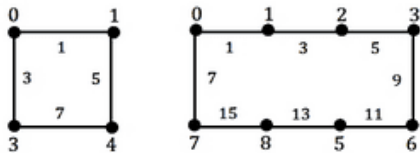
Sehingga, $R_{f^*} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$ dan $|R_{f^*}| = n = |E(C_n)|$

Akibatnya f^* merupakan fungsi bijektif. Berdasarkan Definisi 3.3 f adalah pelabelan harmonis ganjil kuat.

Dengan demikian teorema terbukti. ■

Contoh 3.5:

Sebagai ilustrasi dari Teorema 3.5, pelabelan harmonis ganjil kuat graf C_4, C_8 , dan C_{12} dapat dilihat pada Gambar 3.7.



Gambar 3.6 Pelabelan harmonis ganjil kuat C_4 dan C_8

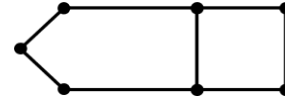
Definisi 3.5:

Misalkan graf siklus C_m dan graf siklus C_n saling lepas. Misal $e_1 \in E(C_m)$ dan $e_2 \in E(C_n)$. Graf G dibentuk dari C_m dan C_n dengan

”menghimpitkan/menyatukan” sisi e_1 dan sisi e_2 dilambangkan dengan $G = C_m \circ C_n$. Banyaknya sisi pada graf G adalah $m + n - 1$ dan banyaknya titik pada graf G adalah $m + n - 2$.

Contoh 3.6:

Graf $G = C_5 \circ C_4$ dapat dilihat pada Gambar 3.7



Gambar 3.7 Graf $G = C_5 \circ C_4$

Teorema 3.6:

Misalkan G_1 graf harmonis ganjil kuat dengan n_1 titik dan m_1 sisi, dan G_2 graf harmonis ganjil kuat dengan n_2 titik dan m_2 sisi. Misalkan $e_1 = x_1 y_1$ sisi di G_1 sedemikian hingga, titik x_1 berlabel m_1 dan titik y_1 berlabel $m_1 - 1$. Sisi $e_2 = x_2 y_2$ di G_2 sedemikian hingga, titik x_2 berlabel 1 dan titik y_2 berlabel 0. Graf G didapatkan dari G_1 dan G_2 dengan ”menghimpitkan” sisi e_1 dan e_2 , sedemikian hingga x_1 berimpit dengan x_2 dan y_1 berimpit dengan y_2 , adalah graf harmonis ganjil kuat.

Bukti:

Misalkan f_1 pelabelan harmonis ganjil kuat pada G_1 dan f_2 pelabelan harmonis ganjil kuat pada G_2 .

Didefinisikan fungsi f dari f_1 dan f_2 pada graf G yaitu

$$f(v) = \begin{cases} f_1(v), & \text{jika } v \in V(G_1) \\ f_2(v) + m_1 - 1, & \text{jika } v \in V(G_2) - \{x_2, y_2\} \end{cases}$$

Ditunjukkan fungsi f dengan

$$f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m_1 + m_2 - 1\}$$

adalah fungsi injektif.

Ditinjau 3 kasus, yaitu:

Kasus-1: $u, v \in V(G_1)$ dengan $u \neq v$.

$f(u) = f_1(u)$ dan $f(v) = f_1(v)$. Karena f_1 harmonis ganjil, maka $f_1(u) \neq f_1(v)$. Akibatnya, $f(u) \neq f(v)$.

Kasus-2: $u, v \in V(G_2)$ dengan $u \neq v$

Diperoleh, $f(u) = f_2(u) + m_1 - 1$ dan $f(v) = f_2(v) + m_1 - 1$. Karena f_2 pelabelan harmonis ganjil, maka $f_2(u) \neq f_2(v)$ sehingga $f(u) \neq f(v)$.

Kasus-3: $u \in V(G_1)$ dan $v \in V(G_2)$

Diperoleh $f(u) = f_1(u)$ dan $f(v) = f_2(v) + m_1 - 1$ sehingga $f(u) \neq f(v)$.

Dari kasus di atas disimpulkan bahwa f fungsi injektif.

Selanjutnya ditunjukkan fungsi tereduksi

$$f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2(m_1 + m_2 - 1) - 1\}$$

dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v), \forall uv \in E(G)$ adalah fungsi bijektif. Untuk itu, ditinjau 2 kasus yaitu:

Kasus-1: $\forall uv \in E(G_1)$

Berdasarkan fungsi f diperoleh

$$f^*(uv) = f(u) + f(v) = f_1(u) + f_1(v) = f^*(uv)$$

sehingga himpunan peta sisi-sisi uv oleh f^* adalah $A_1 = \{1, 3, 5, \dots, 2m_1 - 1\}$.

Kasus-2: $uv \in E(G_2) - \{e = x_2y_2\}$

Berdasarkan fungsi f diperoleh

$$\begin{aligned} f^*(uv) &= f(u) + f(v) \\ &= f_2(u) + m_1 - 1 + f_2(v) + m_1 - 1 \\ &= f_2(u) + f_2(v) + 2m_1 - 2 \\ &= f_2^*(uv) + 2m_1 - 2. \end{aligned}$$

Karena himpunan peta sisi uv di G_2 oleh f_2 adalah $A_2^* = \{3, 5, \dots, 2m_1 - 1\}$, maka himpunan peta sisi uv di G_2 kecuali sisi $e = x_2y_2$ oleh fungsi f^* adalah $A_2 = \{2m + 1, 2m + 3, \dots, 2(m_1 + m_2 - 1) - 1\}$ sehingga

$$R_f^* = A_1 \cup A_2 = \{1, 3, 5, \dots, 2m - 1, 2m + 1, 2m + 2, \dots, 2(m_1 + m_2 - 1) - 1\}.$$

$$\text{Maka, } |R_f^*| = |A_1 \cup A_2| = m_1 + m_2 - 1 \quad \dots (3.4)$$

Karena $D_f^* = E(G)$,

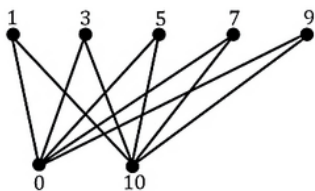
$$\text{maka } |D_f^*| = |E(G)| = m_1 + m_2 - 1 \quad \dots (3.5)$$

Dari (3.4) dan (3.5) dapat disimpulkan $|R_f^*| = |D_f^*| = m_1 + m_2 - 1$ sehingga f^* fungsi bijektif.

Berdasarkan Definisi 3.3, f adalah pelabelan harmonis kuat pada G . Jadi, G graf hamonis ganjil kuat. Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Contoh 3.7:

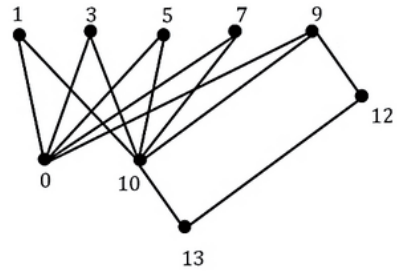
Sebagai ilustrasi, dari teorema 3.4, diperoleh pelabelan harmonis ganjil kuat dari graf $G_1 = K_{2,5}$ seperti pada Gambar 3.8.



Gambar 3.8 Pelabelan harmonis ganjil kuat f_1 pada graf $G_1 = K_{2,5}$

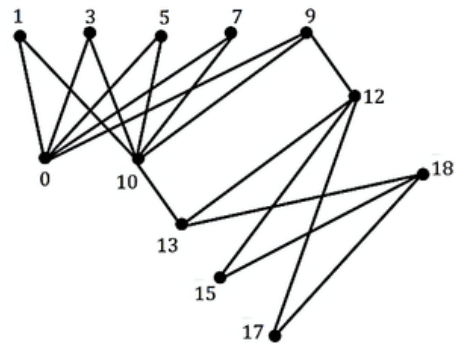
Dalam hal ini, banyak titik G_1 adalah $n_1 = 7$ dan banyaknya sisi G_1 adalah $m_1 = 10$. Sisi $e_1 = x_1y_1$, dimana titik x_1 berlabel 10 dan titik y_1 berlabel 9. Sedangkan dari Teorema 3.5, diperoleh pelabelan harmonis ganjil kuat f_2 dari graf C_4 , seperti tampak pada Gambar 3.6 (a). Dalam hal ini, jelas bahwa banyak titik G_2 adalah $n_2 = 4$ dan banyak sisi G_2

adalah $m_2 = 4$. Sisi $e_2 = x_2y_2$ dengan x_2 adalah titik berlabel 1 dan y_2 titik berlabel 0. Konstruksi graf G dari G_1 dan G_2 dengan menghimpitkan sisi e_1 dengan sisi e_2 dan pelabelan harmonis ganjil kuat f pada G , seperti tampak pada Gambar 3.9.



Gambar 3.9 Pelabelan harmonis ganjil kuat graf $G = K_{2,5} \circ C_4$

Misalkan $G_1 = K_{2,5} \circ C_4$ dan $G_2 = K_{2,3}$, maka pelabelan harmonis ganjil kuat dari graf $G_1 \circ G_2 = (K_{2,5} \circ C_4) \circ K_{2,3}$ dapat dilihat seperti Gambar 3.10.



Gambar 3.10 Pelabelan harmonis ganjil kuat f pada graf $G = (K_{2,5} \circ C_4) \circ K_{2,3}$

Teorema 3.7:

Misalkan G_1 graf harmonis ganjil kuat dengan n_1 titik dan m_1 sisi, dan G_2 graf harmonis ganjil kuat dengan n_2 titik dan m_2 sisi. Misal titik x di G_1 berlabel m_1 dan titik y di G_2 berlabel 0. Maka, graf G didapatkan dari G_1 dan G_2 dengan “menghimpitkan” titik x dan titik y , adalah graf harmonis ganjil kuat.

Bukti:

Misalkan f_1 pelabelan harmonis ganjil kuat pada G_1 dan f_2 pelabelan harmonis ganjil kuat pada graf G_2 . Perhatikan bahwa $|V(G)| = n_1 + n_2 - 1$ dan $|E(G)| = m_1 + m_2$.

Definisikan fungsi f dari f_1 dan f_2 pada graf G sebagai berikut

$$f(v) = \begin{cases} f_1, & \text{jika } v \in V(G_1) \\ f_2 + m_1, & \text{jika } v \in V(G_2) - \{y\} \end{cases}$$

Ditunjukkan fungsi f dengan $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m_1 + m_2\}$ adalah fungsi injektif.

Kasus 1: $u, v \in V(G_1)$ dengan $u \neq v$

Dalam hal ini, $f(u) = f_1(u)$ dan $f(v) = f_1(v)$. Karena f_1 pelabelan harmonis ganjil, maka $f_1(u) \neq f_1(v)$. Akibatnya, $f(u) \neq f(v)$.

Kasus 2: $u, v \in V(G_2)$ dengan $u \neq v$

Dalam hal ini, $f(u) = f_2(u) + m_1$ dan $f(v) = f_2(v) + m_1$. Karena f_2 pelabelan harmonis ganjil, maka $f_2(u) \neq f_2(v)$ sehingga $f(u) = f_2(u) + m_1 \neq f_2(v) + m_1 = f(v)$.

Kasus 3: $u \in V(G_1)$ dan $v \in V(G_2)$

Dalam hal ini, $f(u) = f_1(u)$ dan $f(v) = f_2(v) + m_1$. Andaikan $f(u) = f(v)$, maka $f_1(u) = f_2(v) + m_1$.

Karena f_1 pelabelan harmonis ganjil kuat pada G_1 , maka $f_1(u) \leq m_1, \forall u \in V(G_1)$. Dengan demikian, $f_2(v) + m_1 \leq m_1$. Akibatnya, $f_2(v) \leq 0$. Kontradiksi, karna $\forall v \in V(G_2) - \{y\}, f_2(v) \geq 1$. Jadi, $f(u) \neq f(v)$.

Dengan demikian, fungsi f injektif.

Kemudian ada titik di G_2 , katakan u , dengan label $f_2(u) = m_2$. Maka, label titik u di G adalah $f(u) = f_2(u) + m_1 = m_1 + m_2$.

Selanjutnya, ditunjukkan fungsi terinduksi

$$f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2(m_1 + m_2) - 1\}$$

dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v), \forall uv \in E(G)$ adalah fungsi bijektif.

Ditinjau 2 kasus, yaitu:

Kasus 1: $\forall uv \in E(G_1) \subset E(G)$

Dari fungsi f diperoleh $f^*(uv) = f(u) + f(v) = f_1(u) + f_1(v) = f_1^*(uv)$ sehingga himpunan peta sisi-sisi uv oleh f^* adalah $A_1 = \{1, 3, 5, \dots, 2m_1 - 1\}$

Kasus 2: $uv \in E(G_2)$

Dari fungsi f diperoleh $f^*(uv) = f(u) + f(v) = f_2(u) + m_1 + f_2(v) + m_1 = f_2(u) + f_2(v) + 2m_1 = f_2^*(uv) + 2m_1$.

Karena himpunan peta sisi uv di G_2 oleh f_2 adalah $A_2^* = \{1, 3, 5, \dots, 2m_2 - 1\}$, maka himpunan peta sisi uv di G_2 oleh fungsi f_2^* adalah $A_2^* = \{1, 3, 5, \dots, 2m_2 - 1\}$. Himpunan peta sisi uv di G_2 oleh fungsi f^* adalah $A_2 = \{2m_1 + 1, 2m_1 + 3, \dots, 2(m_1 + m_2) - 1\}$ sehingga $R_{f^*} = A_1 \cup A_2 = \{1, 3, 5, \dots, 2m_1 - 1, 2m_1 + 1, 2m_1 + 3, \dots, 2(m_1 + m_2) - 1\}$. Jadi,

$$|R_{f^*}| = |A_1 \cup A_2| = m_1 + m_2 \quad \dots (3.6)$$

Karena $D_{f^*} = E(G)$, maka

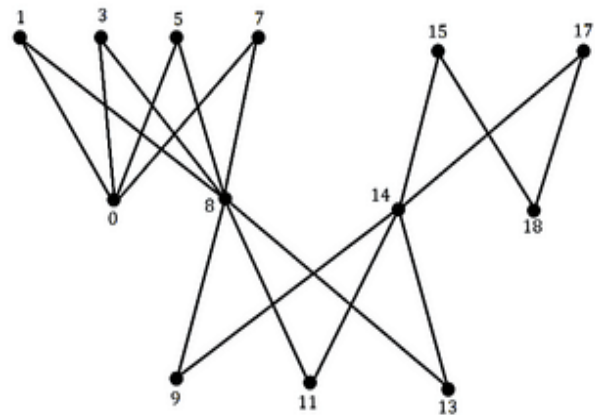
$$|D_{f^*}| = |E(G)| = m_1 + m_2 \quad \dots (3.7)$$

Dari (3.6) dan (3.7) dapat disimpulkan $|R_{f^*}| = |D_{f^*}| = m_1 + m_2$. Sehingga f^* fungsi bijektif.

Akibatnya, fungsi f adalah fungsi pelabelan harmonis ganjil kuat pada graf G . Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Contoh 3.8:

Sebagai ilustrasi, pelabelan harmonis ganjil kuat graf $= ((K_{2,4} \square K_{2,3}) \square K_{2,2})$ dapat dilihat pada Gambar 3.11.



Gambar 3.11 Pelabelan harmonis ganjil kuat pada graf $G = ((K_{2,4} \square K_{2,3}) \square K_{2,2})$

Selanjutnya ditunjukkan beberapa akibat dari teorema-teorema sebelumnya beserta ilustrasinya.

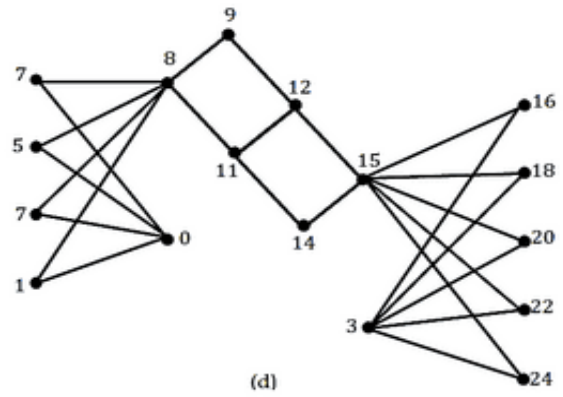
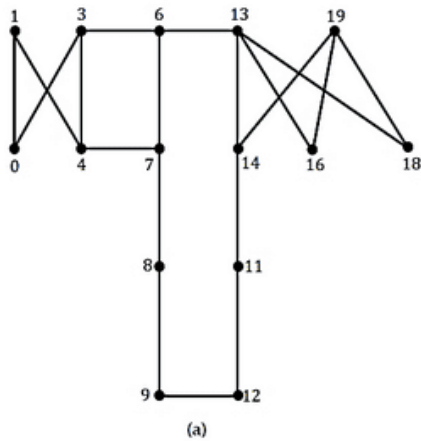
Akibat 3.8:

Jika $n \geq 1 \wedge m \geq 1, k, l \equiv 0(mod 4)$, maka

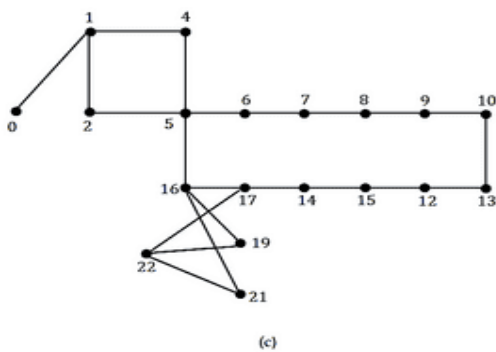
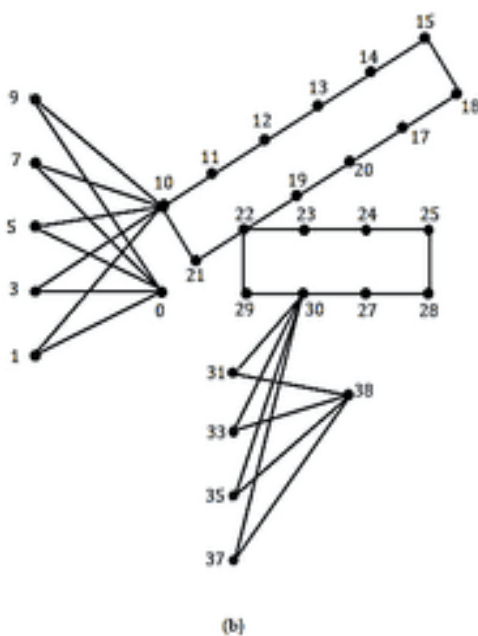
1. $K_{2,n} \circ C_k \circ C_l \circ K_{2,m}$ adalah graf harmonis ganjil kuat.
2. $K_{2,n} \square C_k \square C_l \square K_{2,m}$ adalah graf harmonis ganjil kuat.
3. $K_{2,n} \circ C_k \square C_l \circ K_{2,m}$ adalah graf harmonis ganjil kuat.
4. $K_{2,n} \square C_k \circ C_l \square K_{2,m}$ adalah graf harmonis ganjil kuat.

Contoh 3.9:

Ilustrasi dari Akibat 3.8 dapat dilihat pada Gambar 3.13.



Gambar 3.12 Pelabelan harmonis ganjil pada
 (a) $K_{2,2} \circ C_4 \circ C_8 \circ K_{2,3}$; (b) $K_{2,5} \square C_{12} \square C_8 \square K_{2,4}$;
 (c) $K_{2,1} \circ C_4 \square C_{12} \circ K_{2,3}$; (d) $K_{2,4} \square C_4 \circ C_4 \square K_{2,5}$



PENUTUP

SIMPULAN

1. Jika G graf harmonis ganjil, maka panjang tiap sikel di G genap.
2. Jika $m \equiv 0 \pmod{4}$ dan $n \equiv 2 \pmod{4}$ atau $m \equiv 2 \pmod{4}$ dan $n \equiv 0 \pmod{4}$ maka graf $C_m \square C_n$ bukan graf harmonis ganjil.
3. Graf bintang $S(n)$ adalah harmonis ganjil. Jika $1 \leq n \leq 3$, maka $S(n)$ harmonis ganjil semi-kuat. Jika $1 \leq n \leq 2$, maka $S(n)$ harmonis ganjil kuat.
4. Untuk $n \geq 1$, fungsi $f: V(K_{2,n}) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$ dengan $f(v) = \begin{cases} 0, & v = x_{11} \\ 2i - 1, & v = x_{2i}, 1 \leq i \leq n \\ 2n, & v = x_{12} \end{cases}$ adalah pelabelan harmonis ganjil kuat pada graf bipartit komplit $K_{2,n}$.
5. Jika $n \equiv 0 \pmod{4}$ fungsi $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$ dengan $f = \begin{cases} i - 1, & 1 \leq i \leq \frac{n}{2} \text{ atau } i \text{ ganjil dari } \frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n \\ i + 1, & i \text{ genap dari } \frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n \end{cases}$ adalah pelabelan harmonis ganjil kuat pada sikel C_n .
6. Misalkan G_1 graf harmonis ganjil kuat dengan n_1 titik dan m_1 sisi dan G_2 graf harmonis ganjil kuat dengan n_2 titik dan m_2 sisi. Misalkan $e_1 = x_1 y_1$ sisi di G_1 sedemikian hingga, titik x_1 berlabel m_1 dan titik y_1 berlabel $m_1 - 1$. Dan $e_2 = x_2 y_2$ sisi di G_2 sedemikian hingga, titik x_2 berlabel 1 dan titik y_2 berlabel 0. Maka graf G didapatkan dari G_1 dan G_2 dengan "menghimpitkan" sisi e_1 dan e_2 , sedemikian hingga x_1 bermpit dengan x_2 dan y_1

bermpit dengan y_2 , adalah graf harmonis ganjil kuat.

7. Misalkan G_1 graf harmonis ganjil kuat dengan n_1 titik dan m_1 sisi, dan G_2 graf harmonis ganjil kuat dengan n_2 titik dan m_2 sisi. Misalkan titik x di G_1 berlabel m_1 dan titik y di G_2 berlabel 0. Maka, graf G didapatkan dari G_1 dan G_2 dengan “menghimpitkan” titik x dan titik y , adalah graf harmonis ganjil kuat.
8. Jika $n \geq 1 \wedge m \geq 1, k, l \equiv 0 \pmod{4}$, maka
 - a. $K_{2,n} \circ C_k \circ C_l \circ K_{2,m}$ adalah graf harmonis ganjil kuat.
 - b. $K_{2,n} \square C_k \square C_l \square K_{2,m}$ adalah graf harmonis ganjil kuat.
 - c. $K_{2,n} \circ C_k \square C_l \circ K_{2,m}$ adalah graf harmonis ganjil kuat.
 - d. $K_{2,n} \square C_k \circ C_l \square K_{2,m}$ adalah graf harmonis ganjil kuat.

harmonious labeling of some new families of graphs. *SUT Journal of Mathematics*, 51(2), 181–193.

Liang, Z.-H., dan Bai, Z.-L., 2009. On the odd harmonious graphs with applications. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 29, 105–116.

Slamin, 2023. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Malang: CV. Rumpun Dua Belas (R12 Grup), 2nd ed.

Vaidya, S., dan Shah, N., 2012. Odd harmonious labeling of some graphs. *International J. Math. Combin*, 3(3), 105–112.

SARAN

Berdasarkan pembahasan skripsi ini, saran bagi pembaca yaitu agar dapat menemukan pelabelan harmonis ganjil kuat pada graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdel-Aal, M., 2014. New families of odd harmonious graphs. *International Journal of Soft Computing, Mathematics and Control (IJSCMC)*, 3(1).
- Budayasa, I. K., 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.
- Firmansah, F., 2016. Pelabelan harmonis ganjil pada gabungan graf ular dan graf ular berlipat.
- Firmansah, F., dan Yuwono, M. R., 2017. Pelabelan harmonis ganjil pada kelas graf baru hasil operasi gabungan. Dalam *Prosiding, Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika, Diselenggarakan oleh Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA UNY*, vol. 11.
- Graham, R. L., dan Sloane, N. J. A., 1980. On additive bases and harmonious graphs. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 1(4), 382–404.
- Jeyanthi, P., dan Philo, S., 2016. Odd harmonious labeling of some cycle related graphs. *Proyecciones (Antofagasta)*, 35(1), 85–98.
- Jeyanthi, P., Philo, S., dan Sugeng, K. A., 2015. Odd