MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115
Volume 11 No 03
Tahun 2023

BILANGAN KROMATIK MODULAR BEBERAPA KELAS GRAF PLANAR

Sukma Kusuma Ambarwati
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : sukma.19037@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa
Program Studi, Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
Penulis Korespondensi : ketutbudayasa@yahoo.com

Abstrak

Misalkan G graf tanpa titik terasing. Titik v pada graf G, $N(v)$ merupakan persekitaran titik v. Jumlah warna $\sigma(v)$ pada v di G didefinisikan sebagai jumlah warna di $N(v)$, yaitu $\sigma(v) = \sum_{x \in N(v)} w(x) \pmod{k}$. Pewarnaan modular pada G adalah sebuah fungsi $w: V(G) \to \mathbb{Z}_k$, dengan $k \geq 2$ dimana $\sigma(u) \neq \sigma(v)$ dalam $\mathbb{Z}_k$ untuk semua pasang titik u dan v yang berhubungan langsung pada G. Bilangan kromatik modular G adalah minimum k dimana ada pewarnaan-k modular pada G yang dilambangkan dengan $mc(G)$. Pada artikel ini dijelaskan tentang batas atas dan batas bawah dari bilangan kromatik modular suatu graf dan bilangan kromatik modular pada beberapa kelas graf planar yaitu graf Sikel C_n, graf Pohon T_n, graf Roda W_n dan join dua graf $P_n + K_2$.
Kata Kunci: Pewarnaan modular, Bilangan kromatik modular, Graf Pohon, Graf Sikel, Graf Roda.

Abstract

Suppose G is a graph without isolated vertex. Vertex v in graph G, N(v) is the neighborhood of vertex v. The number of colors σ(v) on v in G is defined as the number of colors in N(v), that is $\sigma(v) = \sum_{x \in N(v)} w(x)$ (mod k). The modular coloring of G is a function $w: V(G) \to \mathbb{Z}_k$, with k ≥ 2 such that $\sigma(u) \neq \sigma(v)$ in $\mathbb{Z}_k$ for all pairs of directly connected vertex u and v in G. The modular chromatic number of G is the minimum k for which there exists a modular k-coloring of G denoted by mc(G). In this article, the upper and lower bounds of the modular chromatic number of a graph and the modular chromatic number of several classes of planar graphs, namely Cycle Graph C_n, Tree Graph T_n, Wheel Graph W_n, and the join of two graphs $P_n + K_2$ are explained.
Keywords: *Modular coloring, Modular chromatic number, Tree Graph, Cycle Graph, Wheel Graph*

PENDAHULUAN

Dalam kemajuan teknologi dan ilmu pengetahuan pada saat ini, peran matematika menjadi salah satu hal penting yang dapat mendukung hal tersebut. Peranan ilmu matematika sangat membantu dalam penyelesaian permasalahan yang ada pada kehidupan baik itu dalam konseptual maupun permasalahan yang lain. Salah satu cabang matematika yang telah ada selama lebih dari dua ratus tahun lalu adalah Teori graf. Teori graf diperkenalkan untuk pertama kalinya pada tahun 1736 oleh seorang ahli matematika yaitu Leonhard Euler. Oleh Euler, teori graf diterapkan dalam pemecahan masalah pada jembatan Konigsberg yaitu kemungkinan dapat melintasi tujuh jembatan yang ada masing-masing tepat satu kali. Dalam segi matematika, teori graf pada awalnya tidak terlalu signifikan, karena sebagian besar teori graf digunakan untuk memecahkan masalah teka-teki. Dalam beberapa dekade akhir, seiring berjalannya waktu teori graf berkembang begitu cepat karena teori graf dapat diterapkan secara luas dalam kehidupan sehari-hari hingga berbagai bidang ilmu : Teknik, Sains, Ilmu Komputasi, hingga Ilmu Sosial dan Bisnis (Budayasa, 2007).

Salah satu aplikasi pada teori graf yang sangat diminati adalah pewarnaan graf, karena dapat diterapkan untuk berbagai bidang. Pewarnaan pada graf terdapat 3 pewarnaan yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi dan pewarnaan bidang. Pada pewarnaan graf sendiri, pewarnaan titik merupakan penelitian yang mendapat banyak perhatian oleh ahli matematika. Pewarnaan titik adalah memberikan warna yang berbeda pada titik yang bertetangga, sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga memiliki warna yang sama. Pewarnaan modular merupakan salah satu kajian dalam pewarnaan titik. Pertama kali pewarnaan modular diperkenalkan adalah pada observasi permasalahan papan main dam oleh Futaba Okamoto, Ebrahim Salehi dan Ping Zhang. Pewarnaan modular pada G adalah sebuah fungsi $w: V(G) \to \mathbb{Z}_k$, dengan $k \geq 2$, jumlah warna v dilambangkan dengan $\sigma(v)$, dimana dua titik yang berhubungan langsung boleh berwarna sama dan $\sigma(u) \neq \sigma(v)$ untuk semua pasang titik u dan v yang berhubungan langsung pada G. Jumlah warna pada titik v di G didefinisikan sebagai jumlah label warna di $N(v)$, yaitu $\sigma(v) = \sum_{x \in N(v)} w(x) \pmod{k}$. Pewarnaan-$k$ modular pada G adalah sebuah pewarnaan modular G dengan menggunakan k warna. Bilangan kromatik modular, dilambangkan dengan $mc(G)$, didefinisikan sebagai berikut :

$$mc(G) = \text{minimum}\{k | \text{terdapat pewarnaan} - k \text{ modular pada } G\}$$

(Okamoto et al., 2010)

Terdapat beberapa penelitian mengenai bilangan kromatik modular graf. Diantaranya adalah bilangan kromatik modular pada graf pohon dan graf ulat (Okamoto et al., 2009); bilangan kromatik modular dari graf perkalian kartesian untuk graf sikel dan lintasan (Paramaguru & Sampathkumar, 2013); bilangan kromatik modular join dari dua buah graf khusus yaitu join dari dua graf bipartit, join dari dua lintasan dan graf komplit (Paramaguru & Sampathkumar, 2014); bilangan kromatik modular dari graf kipas, graf helm, graf persahabatan, dan graf gear (Nicholas & R, 2017); bilangan kromatik modular pada graf sikel, graf gear, graf lintasan dan graf persahabatan (Ajiji & Rahadjeng, 2020); dan bilangan kromatik modular pada graf bintang, graf ulat, graf kipas, graf helm dan graf triangular book (Kusumaningrum & Rahadjeng, 2021). Pada artikel ini akan dijelaskan mengenai batas atas dan batas bawah dari bilangan kromatik modular suatu graf dan bilangan kromatik modular pada beberapa kelas graf planar yaitu graf Sikel C_n, graf Pohon T_n, graf Roda W_n dan join dua graf $P_n + K_2$.

KAJIAN TEORI

Definisi 2.1 :

Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen dalam $E(G)$ merupakan pasang tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$. Himpunan $V(G)$ disebut himpunan titik G, dan himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi G.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.2 :

Graf G disebut graf planar jika G dapat digambar pada bidang datar sedemikian hingga sisi-sisinya tidak ada yang saling berpotongan, kecuali mungkin pada titik-titik akhir dari sisi-sisi tersebut.

(Budayasa, 2007)

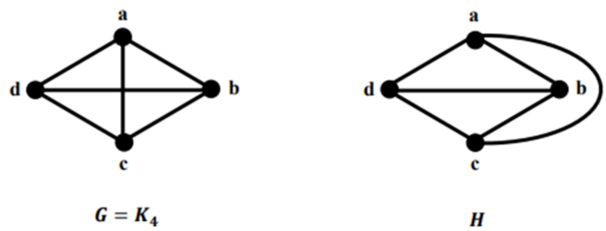
Definisi 2.3 :

Graf planar G yang digambar pada bidang datar sedemikian hingga tidak ada sisi-sisinya yang saling berpotongan kecuali mungkin pada titik-titik akhir sisi-sisi tersebut disebut graf bidang. Graf bidang merupakan graf planar, tetapi sebaliknya tidak berlaku.

(Budayasa, 2007)

Contoh 2.1 :

Graf $G = K_4$ di Gambar 2.1 adalah graf planar karena dapat digambar seperti graf H, tetapi G bukan graf bidang karena sisi ac dan bd di G digambar saling berpotongan.



Gambar 2. 1: Graf $G = K_4$ adalah graf planar

Definisi 2.4 :

Sikel adalah sebuah jejak tertutup yang titik awal dan titik akhirnya sama. Sikel dengan panjang n disebut sikel-n.

(Kay et al., 1977)

Graf Sikel C_n adalah graf terhubung beraturan yang memiliki n titik dengan $n \geq 3$.

(Chartrand & Lesniak, 2004)

Definisi 2.5 :

Graf Pohon T_n adalah graf terhubung yang tidak memuat sikel.

(Chartrand, 2012)

Definisi 2.6 :

Graf Roda W_n diperoleh dari sebuah graf sikel C_n dan graf komplet K_1 dimana setiap titik pada sikel tersebut terhubung langsung dengan titik pusat K_1. Graf Roda W_n didefinisikan sebagai berikut :

$$W_n = C_n + K_1$$

(Ihwan et al., 2014)

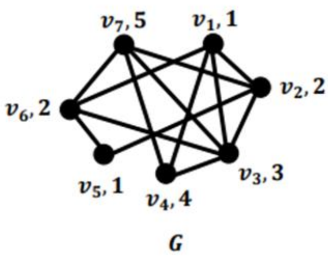
Definisi 2.7 :

Misalkan G graf. Sebuah pewarnaan- k sejati pada G adalah pewarnaan semua titik G dengan menggunakan k warna sedemikian hingga dua titik G yang berhubungan langsung mendapat warna yang berbeda. Jika G memiliki sebuah pewarnaan-k sejati maka G dikatakan dapat diwarnai dengan k warna. Sebuah pewarnaan-k dari graf G biasanya ditunjukkan dengan melabeli titik-titik G dengan warna 1,2,3, … , k.

(Budayasa, 2007)

Contoh 2.2 :

Misalnya, sebuah pewarnaan- 5 sejati graf G diperlihatkan pada gambar berikut.



Gambar 2. 2 : Pewarnaan-**5** sejati dari ***G***

Definisi 2.8 :

Bilangan kromatik (*Chromatic number*) dari graf G , dilambangkan dengan $\chi(G)$, didefinisikan sebagai berikut:

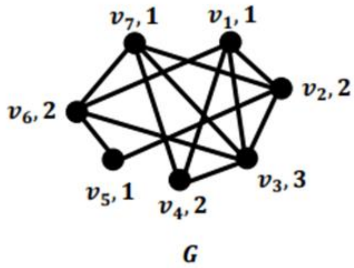
$$\chi(G) = \min\{k | ada\ pewarnaan - k\ sejati\ pada\ G\}$$

Dengan kata lain, bilangan kromatik graf G adalah minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik G, sedemikian hingga setiap dua titik yang berhubungan langsung mendapat warna yang berbeda. Jika $\chi(G) = k$ maka ada sebuah pewarnaan-k sejati pada graf G , tetapi sebaliknya tidak berlaku.

(Budayasa, 2007)

Contoh 2.3 :

Seperti diperlihatkan pada Gambar 2.2, terdapat sebuah pewarnaan-5 sejati pada graf G, tetapi$\chi(G) \neq 5$. Karena graf G dapat diwarnai dengan kurang dari 5 warna, misalnya G dapat diwarnai dengan 3 warna, seperti terlihat pada Gambar 2.3, dan karena graf G tidak dapat diwarnai dengan menggunakan kurang dari 3 warna, maka bilangan kromatik G adalah 3 atau $\chi(G) = 3$.



Gambar 2. 3 : Pewarnaan-**3** dari ***G***

Definisi 2.9 :

Misalkan G sebuah graf tanpa titik terasing dan $v \in V(G)$. Tetangga v, dilambangkan dengan $N(v)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$N(v) = \{x \in V(G) | vx \in E(G)\}$$

(Budayasa, 2007)

Sebuah pewarnaan titik pada graf G adalah sebuah fungsi w $: V(G) \to \mathbb{Z}_k$, dengan $k \geq 2$. Misalkan $v \in V(G)$, jumlah warna v dilambangkan dengan $\sigma(v)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\sigma(v) = \sum_{x \in N(v)} W(x)\ (mod\ k)$$

Pewarnaan w disebut pewarnaan- k modular dari graf G jika $\sigma(u) \neq \sigma(v)$ dalam Z_k untuk semua pasang titik u dan v yang berhubungan langsung pada G.

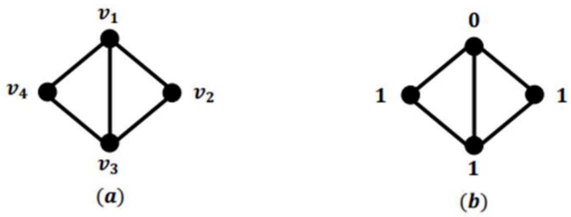
Bilangan kromatik modular G , dilambangkan dengan $mc(G)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$mc(G) = min\{k | terdapat\ pewarnaan - k\ modular\ pada\ G\}$$

(Okamoto et al., 2010)

Contoh 2.4 :

Graf G pada Gambar 2.4 (a) dan sebuah pewarnaan-titik w dengan $w(v_1) = 0$, $w(v_2) = w(v_3) = w(v_4) = 1$, seperti pada Gambar 2.4 (b). Perhatikan bahwa pewarnaan w adalah sebuah pewarnaan-3 modular pada G.



Gambar 2. 4 : Sebuah pewarnaan-titik ***w*** pada ***G***

Jelas bahwa w bukan sebuah pewarnaan-2 modular pada graf G, karena dalam $\mathbb{Z}_2$, $\sigma(v_1) = 1 = \sigma(v_2)$ padahal v_1 dan v_2 berhubungan langsung pada G.

Perhatikan bahwa pewarnaan w adalah sebuah pewarnaan-3 modular pada G, karena dalam $\mathbb{Z}_3$, dipenuhi:

$$\sigma(v_1) = 0 \neq 1 = \sigma(v_2);$$
$$\sigma(v_1) = 0 \neq 2 = \sigma(v_3);$$
$$\sigma(v_1) = 0 \neq 1 = \sigma(v_4);$$
$$\sigma(v_2) = 1 \neq 2 = \sigma(v_3);$$
$$\sigma(v_3) = 2 \neq 1 = \sigma(v_4)$$

Ini berarti, bilangan kromatik modular dari G adalah 3, atau $\boldsymbol{mc(G) = 3}$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Secara umum, menentukan bilangan kromatik maupun bilangan kromatik modular suatu graf merupakan permasalahan yang sangat sulit dalam teori graf, kecuali untuk kelas-kelas graf tertentu.

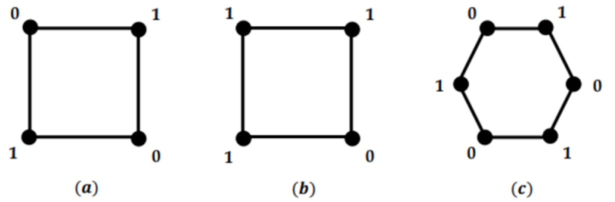
Lemma 3.1 :
Jika H adalah subgraf komplet dengan k titik dari graf G, maka $mc(G) \geq k$

Bukti :
Andaikan $mc(G) = t \leq k - 1$. Maka ada pewarnaan-t modular pada graf G, namakan w. Karena $|V(H)| = k; \mathbb{Z}_t = \{0,1,2, \ldots, t-1\}$ dan $t - 1 \leq k - 2$, maka ada 2 titik H mendapat warna yang sama, namakan titik x_1 dan titik x_2. Sehingga $\sigma(x_1) = \sigma(x_2)$ padahal x_1 dan x_2 berhubungan langsung. Ini berarti w bukan pewarnaan modular (kontradiksi). Dengan demikian lemma terbukti. ∎

Dengan argumen yang serupa, dapat dibuktikan lemma berikut.

Lemma 3.2 :
Jika graf G terhubung dan taktrivial, maka $mc(G) \geq \chi(G)$
Misalkan u dan v dua titik di G yang berhubungan langsung pada pewarnaan-titik sejati, warna titik u harus berbeda dengan warna titik-titik yang ada di $N(u)$ termasuk titik v. Demikian juga warna titik v harus berbeda dengan warna titik-titik yang ada di $N(v)$ termasuk titik u. Sedangkan dalam pewarnaan- k modular yang berbeda hanyalah jumlah warna di u dan jumlah warna di v, mungkin saja warna titik u dan warna titik di $N(u)$ sama, begitu juga warna titik v dan warna titik di $N(v)$ sama. Akibatnya, $\chi(G) \leq mc(G)$. ∎

Lemma 3.2 menunjukkan bahwa bilangan kromatik sebuah graf merupakan batas bawah dari bilangan kromatik modular graf tersebut. Perhatikan Gambar 3.1 (a) pewarnaan-titik w_1 pada graf sikel C_4, Gambar 3.1 (b) pewarnaan-titik w_2 pada sikel C_4 dan Gambar 3.1 (c) pewarnaan titik w_3 pada graf sikel C_6 berikut.



Gambar 3. 1: Sebuah pewarnaan-titik $\boldsymbol{w}$ pada sikel $\boldsymbol{C_4}$ dan $\boldsymbol{C_6}$

Perhatikan pewarnaan w_1 pada C_4, merupakan pewarnaan-titik sejati (titik-titik yang berhubungan langsung mendapat warna yang berbeda) dengan banyak warna minimum yaitu 2. Sehingga $\chi(C_4) = 2$, tetapi w_1 bukan sebuah pewarnaan-2 modular dari C_4 . Sedangkan w_2 merupakan sebuah pewarnaan-2 modular dari C_4 sehingga $mc(C_4) = 2$. Dalam hal ini, $mc(C_4) = \chi(C_4)$.

Pewarnaan-titik w_3 pada C_6 merupakan pewarnaan sejati dengan 2 warna. Sehingga $\chi(C_6) = 2$. Jadi, w_3 bukan sebuah pewarnaan-2 modular dari C_6. Tetapi w_3 adalah sebuah pewarnaan-3 modular dari C_6 dan tidak ada sebuah pewarnaan-2 modular dari C_6. Sehingga, $mc(C_6) = 3$ dengan demikian,

$$mc(C_6) = 3 > 2 = \chi(C_6)$$

Nanti secara umum akan ditunjukkan bahwa :

$$mc(C_n) = \begin{cases} 2, jika\ n \equiv 0\ (mod\ 4) \\ 3, \qquad yang\ lain. \end{cases}$$

Padahal,

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, \qquad jika\ n\ genap \\ 3, \qquad jika\ n\ ganjil \end{cases}$$

Ini berarti bahwa,
Untuk n genap dan $n = 0\ (mod\ 4)$ maka :

$$mc(C_n) = 2 = \chi(C_n)$$

Untuk n ganjil atau $n \neq 0\ (mod\ 4)$ maka :

$$mc(C_n) = 3 = \chi(C_n)$$

Untuk n genap dan $n \neq 0\ (mod\ 4)$ maka :

$$mc(C_n) = 3 > 2 = \chi(C_n)$$

Berikut ditunjukkan bahwa setiap graf terhubung taktrivial G memiliki sebuah pewarnaan-k modular. Ini berarti $mc(G)$ ada.

Lemma 3.3 :
Jika G graf terhubung dan taktrivial, maka ada sebuah pewarnaan-k modular dari G untuk suatu bilangan bulat $k \geq 2$
Bukti :
Misalkan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Definisikan sebuah pewarnaan titik w pada G sedemikian hingga

$$w(v_i) = 2^{i-1}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Misalkan $k = \sum_{i=1}^{n-1} 2^i = 2^n - 2$
Selanjutnya, pikirkan

$$w: V(G) \to \mathbb{Z}_k$$

Maka, $\forall_i, 1 \leq i \leq n, 1 \leq \sigma(v_i) \leq k$ dan $\sigma(v_i) \neq \sigma(v_j)$, jika v_i dan v_j berhubungan langsung. Sehingga w adalah sebuah pewarnaan-k modular dari graf G. ∎

Lemma 3.3 memberikan batas atas dari bilangan kromatik modular suatu graf sebagi berikut.

Teorema 3.4 :
Jika G terhubung dan taktrivial, maka :

$$mc(G) \leq 2^n - 2$$

Bukti :
Misal $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Berdasarkan bukti Lemma 3.3 pewarnaan-titik w pada G , $w(v_i) = 2^{i-1}, 1 \leq i \leq n$ adalah sebuah pewarnaan-k modular dengan $k = \sum_{i=1}^{n-1} 2^i = 2^n - 2$. Sehingga berdasarkan Definisi 2.9, $mc(G) \leq k = 2^n - 2$. ∎

Batas atas $mc(G)$ dapat dibuat lebih kecil (tajam) seperti berikut.

Teorema 3.5 :
Jika G graf terhubung taktrivial dan derajat maksimum Δ, maka:

$$mc(G) \leq 2^n - 2^{n-\Delta}$$

Bukti :
Misal $x \in V(G)$, dengan $d(x) = \Delta$. Maka $|N(x)| = \Delta$ karena $N(x) \subseteq V(G)$, maka

$$|V(G) - N(x)| = |V(G)| - |N(x)| = n - \Delta$$

Pikirkan sebuah pewarnaan-k modular w seperti dalam pembuktian Lemma 3.3. Maka $\forall_i, 1 \leq i \leq n$,

$$\sigma(v_i) \leq \sum_{i=n-\Delta}^{n-1} 2^i = 2^{n-\Delta} + 2^{n-\Delta+1} + \dots + 2^{n-1} = 2^{n-\Delta}(1 + 2 + \dots + 2^{\Delta-1}) = 2^{n-\Delta}(2^\Delta - 1) = 2^n - 2^{n-\Delta}$$

Akibatnya,

$$mc(G) \leq 2^n - 2^{n-\Delta}$$

Dengan demikian teorema terbukti. ∎

Selanjutnya, akan ditentukan bilangan kromatik modular beberapa kelas graf planar. Graf G dikatakan planar jika G dapat digambar pada bidang datar, sedemikian hingga tidak ada sisi-sisi yang saling berpotongan, kecuali mungkin pada titik-titik akhir sisi-sisi tersebut. Misalnya, graf komplit K_n planar jika dan hanya jika $n \leq 4$. Graf Sikel C_n, graf Pohon T_n dan graf Roda W_n adalah beberapa kelas graf planar.

Teorema 3.6 :
Jika T adalah pohon taktrivial, maka

$$mc(T) = 2 \text{ atau } mc(T) = 3$$

Bukti :
Karena T pohon taktrival, maka T graf bipartit. Sehingga, bilangan kromatik T, $\chi(T) = 2$.
Berdasarkan Lemma 3.2,

$$mc(T) \geq \chi(T) = 2 \quad (1)$$

Jika T adalah bintang dengan titik pusat v, maka warnai titik v dengan 1 dan warnai setiap titik pendan T dengan warna 0. Namakan pewarnaan tersebut dengan w . Jelas bahwa $w: V(T) \to \mathbb{Z}_2$ memenuhi $\sigma(v) = 0 \neq 1 = \sigma(x), \forall x$, titik pendan T. Jadi w sebuah pewarnaan-2 modular pada T.
Berdasarkan Definisi 2.9,

$$mc(T) \leq 2 \quad (2)$$

Dari (1) dan (2), diperoleh jika T bintang, maka

$$mc(T) = 2$$

Misalkan T bukan bintang, maka $mc(T) \geq 3$. Berdasarkan sifat pohon, maka T memiliki lebih dari satu titik pendan (titik berderajat satu). Misalkan $x \in V(T)$ dengan $d(x) = 1$ dan $N(x) = \{y\}$. Eksentrisitis titik x dilambangkan dengan $e(x)$, adalah jarak titik terjauh dari x pada T. Misal, untuk $0 \leq i \leq e(x)$,

$$V_i = \{v \in V(T) | d(v, x) = i\}$$

Jelas bahwa, $V_0 = \{x\}$, $V_1 = \{y\}$ dan $\{V_0, V_1, \dots, V_{e(x)}\}$ adalah sebuah partisi dari himpunan $V(T)$.
Konstruksi sebuah pewarnaan titik w pada T sebagai berikut:

$$w(v) = \begin{cases} 0, & v \in V_i, 1 \leq i \leq e(x), i \text{ genap} \\ 1, & v = y \end{cases}$$

Jelas bahwa $\sigma(x) = 1$ dan $\sigma(u) = 0, u \in V_i, 1 \leq i \leq e(x), i$ ganjil
Karena T bukan bintang, maka $e(x) \geq 3$. Misalkan $w(v)$ telah ditentukan untuk semua titik $v \in V_i, 0 \leq i \leq 2k < e(x)$ untuk suatu bilangan bulat positif k,

sedemikian hingga $w(v) = 0$ jika dan hanya jika $v \in V_i$, i genap. Jika $w \in V_{2k}$ bukan titik pendan, maka misalkan

$$N(w) \cap V_{2k-1} = \{x_0\}$$

Dan

$$N(w) \cap V_{2k+1} = \{x_1, x_2, \dots, x_{d-1}\}$$

Dimana

$$d = d(w) \geq 2$$

Kemudian didefinisikan

$$w(x_i) = 1, \text{ jika } 1 \leq i \leq d-1 \text{ dan } \sum_{i=0}^{d-1} w(x_i) \not\equiv 0 (\text{mod } 3)$$

Jika yang lain, didefinisikan

$$w(x_i) = 2$$

Dan

$$w(x_i) = 1, \text{ untuk } 2 \leq i \leq d-1, \text{ jika } d \geq 3$$

Jelas bahwa w adalah sebuah pewarnaan-3 modular pada T. Berdasarkan Definisi 2.9,

$mc(T) \leq 3$ (3)

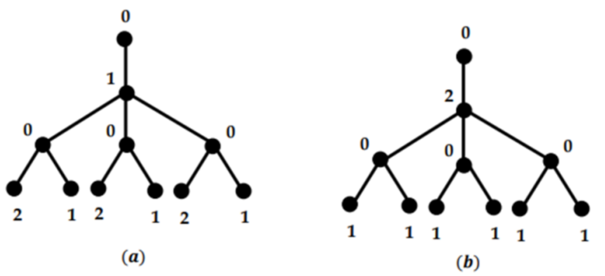
Dari (1) dan 2 disimpulkan

$$2 \leq mc(T) \leq 3$$

Karena $mc(T)$ bilangan bulat taknegatif, maka $mc(T) = 2$ atau $mc(T) = 3$

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Sebuah pewarnaan-3 modular pada graf Pohon T_{11} dapat dilihat pada Gambar 3.2 (a) atau 3.2 (b) berikut.



Gambar 3. 2: Pewarnaan-**3** modular pada graf Pohon $\boldsymbol{T_{11}}$

Teorema 3.6 :

Jika C_n sikel dengan $n \geq 3$ titik, maka

$$mc(C_n) = \begin{cases} 2, jika\ n \equiv 0\ (mod\ 4) \\ 3, \qquad yang\ lain. \end{cases}$$

Bukti:

Misalkan sikel

$$C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$$

Ditinjau tiga kasus,

Kasus 1: $n \equiv 0\ (mod\ 4)$

Karena n genap, maka

$mc(C_n) \geq 2$ (1)

Definisikan pewarnaan titik w pada C_n sebagai berikut

$$w: V(C_n) \to \mathbb{Z}_2$$

sedemikian hingga,

$$w(v_i) = \begin{cases} 1, jika\ i \equiv 0\ (mod\ 4) \\ 0, jika\ i \not\equiv 0\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Maka

$$\sigma(v_i) = \begin{cases} 1, jika\ i\ ganjil \\ 0, jika\ i\ genap \end{cases}$$

Sehingga, untuk i ganjil,

$$\sigma(v_i) = 1 \neq 0 = \sigma(v_{i+1})$$

dan untuk i genap,

$$\sigma(v_i) = 0 \neq 1 = \sigma(v_{i+1})$$

Untuk $i = n$, maka

$$\sigma(v_n) = 0 \neq 1 = \sigma(v_1)$$

Berdasarkan Definisi 2.9, pewarnaan w sebuah pewarnaan-2 modular pada C_n. Sehingga,

$mc(C_n) \leq 2$ (2)

Dari (1) dan (2), disimpulkan

$$mc(C_n) = 2$$

Kasus 2: $n \equiv 2\ (mod\ 4)$

Karena n genap, maka

$mc(C_n) \geq 2$ (3)

Klaim:

$$mc(C_n) \neq 2$$

Bukti klaim:

Andaikan $mc(C_n) = 2$

Berarti ada pewarnaan-titik w_1 modular

$$w_1: V(C_n) \to \mathbb{Z}_2$$

pada graf C_n

Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan

$$\sigma(v_i) = \begin{cases} 0, i\ ganjil \\ 1, i\ genap \end{cases}$$

Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan

$$w_1(v_1) = 1$$

Karena $\sigma(v_2) = 1$, maka $w_1(v_3) = 0$.

Karena $\sigma(v_3) = 0$, maka terdapat dua kemungkinan, yaitu $w_1(v_2) = 1$ dan $w_1(v_4) = 1$; atau $w_1(v_2) = 0$ dan $w_1(v_4) = 0$.

Jika $w_1(v_2) = 1$ dan $w_1(v_4) = 1$, maka $w_1(v_5) = 1$, agar $\sigma(v_4) = 1 \neq 0 = \sigma(v_3)$.

Agar $\sigma(v_5) = 0$, maka $w_1(v_6) = 1$. Agar $\sigma(v_6) = 1$, maka $w_1(v_7) = 0$. Akhirnya, berakibat $w_1(v_1) = 1$ dan $w_1(v_n) = 1$. Sehingga,

$$\begin{aligned} \sigma(v_n) &= w_1(v_1) + w_1(v_n) \\ &= 1 + 1 \\ &\not\equiv 0. \end{aligned}$$

Kontradiksi dengan $\sigma(v_n) = 1$, karena n genap.

Jika $w_1(v_2) = 0$ dan $w_1(v_4) = 0$, maka $w_1(v_5) = 1$, agar $\sigma(v_4) = 1$. Agar $\sigma(v_5) = 0$, maka $w_1(v_6) = 0$. Agar $\sigma(v_6) = 1$, maka $w_1(v_7) = 0$, agar $\sigma(v_7) = 0$, maka $w_1(v_8) = 0$; dan seterusnya diperoleh $w_1(v_{n-1}) = 1$ dan $w_1(v_n) = 0$. Sehingga,

$$\begin{aligned}\sigma(v_n) &= w_1(v_{n-1}) + w_1(v_1)\\ &= 1 + 1\\ &\not\equiv 0 \ (\text{mod } 2)\end{aligned}$$

Kontradiksi, karena n genap. Sehingga klaim terbukti.

Dari klaim dan (3) diperoleh

$$mc(C_n) \geq 3 \tag{4}$$

Selanjutnya, didefinisikan pewarnaan-titik pada G sebagai berikut:

$$w: V(C_n) \to \mathbb{Z}_3$$

Dengan,

$$w(v_i) = \begin{cases} 0, jika\ i\ ganjil \\ 1, jika\ i\ genap \end{cases}$$

Maka,

$$\sigma(v_i) = \begin{cases} 0, i\ genap \\ 2, i\ ganjil \end{cases}$$

Sehingga, untuk i ganjil,

$$\sigma(v_i) = 2 \neq 0 = \sigma(v_{i+1})$$

Dan untuk i genap

$$\sigma(v_i) = 0 \neq 2 = \sigma(v_{i+1})$$

Berdasarkan Definisi 2.9, w sebuah pewarnaan-titik-3 modular. Akibatnya,

$$mc(C_n) \leq 3 \tag{5}$$

Dari (4) dan (5), disimpulkan

$$mc(C_n) = 3$$

Kasus 3: n ganjil

Untuk n ganjil, $\chi(C_n) = 3$, sehingga

$$mc(C_n) \geq \chi(C_n) = 3 \tag{6}$$

Definisikan pewarnaan-titik w pada C_n sebagai berikut:

$$w: V(C_n) \to \mathbb{Z}_3$$

Dengan

$$w(v_i) = \begin{cases} 0, jika\ i \not\equiv 0 (mod\ 4), i < n \\ 1, \quad jika\ i \equiv 0 (mod\ 4) \\ 2, \quad jika\ i = n \end{cases}$$

Sehingga,

$$\sigma(v_i) = \begin{cases} 0; i\ genap, 2 \leq i \leq n-3; i = n \\ 1; \quad i\ ganjil, 3 \leq i \leq n-2 \\ 2; \quad i = 1\ atau\ i = n-1 \end{cases}$$

Terlihat bahwa,

i. Untuk i genap, $2 \leq i \leq n-3$,
$\sigma(v_i) = 0 \neq 1 = \sigma(v_{i+1})$

ii. Untuk i ganjil, $3 \leq i \leq n-2$
$\sigma(v_i) = 1 \neq 0 = \sigma(v_{i+1})$

iii. $\sigma(v_1) = 2 \neq 0 = \sigma(v_2)$;
$\sigma(v_1) = 2 \neq 0 = \sigma(v_n)$;
$\sigma(v_{n-1}) = 2 \neq 0 = \sigma(v_n)$;
$\sigma(v_{n-1}) = 2 \neq 1 = \sigma(v_{n-2})$;
$\sigma(v_{n-2}) = 1 \neq 0 = \sigma(v_{n-3})$;

Sehingga w sebuah pewarnaan-titik-3 modular pada C_n. Berdasarkan Definisi 2.9,

$$mc(C_n) \leq 3 \tag{7}$$

Dari (6) dan (7), disimpulkan

$$mc(C_n) = 3$$

Dengan demikian bukti teorema lengkap ■

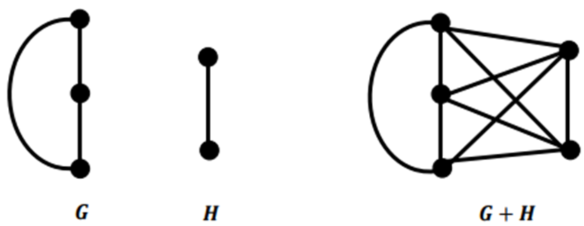
Definisi 3.1 :

Misalkan G dan H dua graf yang saling pisah. Join graf G dan graf H, dilambangkan dengan $G + H$ adalah sebuah graf yang diperoleh dari G dan H dan setiap titik G dihubungkan dengan setiap titik H dengan sebuah sisi. Join $G + H$ memiliki himpunan titik $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi sebagai berikut :

$$E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv | u \in V(G), u \in V(H)\}$$

(Chartrand et al., 2010)

Contoh dari graf $G + H$ adalah sebagai berikut :

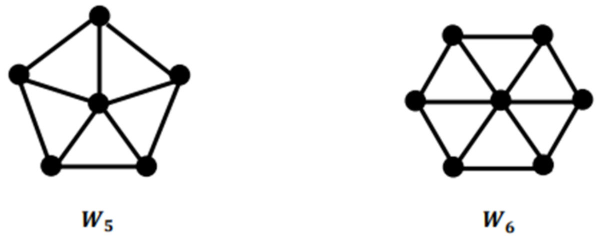


Gambar 3. 3: Graf $\boldsymbol{G + H}$

Ingat bahwa graf Roda W_n adalah join dari graf Komplet K_1 dan graf Sikel C_n. Dengan kata lain,

$$W_n = C_n + K_1$$

Jelas bahwa, banyak titik W_n adalah $n + 1$ dan banyak sisi adalah $2n$. Perhatikan graf Roda W_3 isomorfik dengan graf Komplit K_4. Graf Roda W_5 dan W_6 dapat dilihat pada gambar berikut :



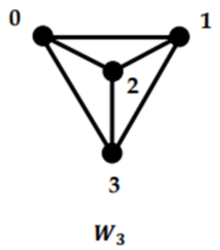
Gambar 3. 4: Graf $\boldsymbol{W_5}$ dan $\boldsymbol{W_6}$

Perhatikan bahwa graf Roda W_n adalah graf planar.

Teorema 3.7 :
Jika W_n graf Roda, maka :

$$mc(W_n) = \begin{cases} 3, jika\ n\ genap \\ 4, jika\ n\ ganjil \end{cases}$$

Bukti:
Misalkan roda $W_n = C_n + K_1$ dan $C_n = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_1)$ dan titik Z adalah titik dari K_1 sebagai titik pusat dari W_n.
Untuk $n = 3$, maka $W_3 = K_4$. Berdasarkan Lemma 3.1,
$mc(W_3) \geq 4$ (1)
Pewarnaan-titik berikut menunjukkan sebuah pewarnaan-titik-4 modular pada W_3.



Gambar 3. 5: Pewarnaan-titik-**4** modular pada $\boldsymbol{W_3}$

Berdasarkan Definisi 2.9,
$mc(W_3) \leq 4$ (2)
Dari (1) dan (2), diperoleh

$$mc(W_3) = 4$$

Selanjutnya, misalkan $n \geq 4$
Kasus 1: n genap
Karena $K_3 \subseteq W_n$, maka berdasarkan Lemma 3.1,
$mc(W_n) \geq 3$ (3)
Konstruksi sebuah pewarnaan-titik w pada graf W_n sebagai berikut:

$$w: V(W_n) \to \mathbb{Z}_3$$

Dengan

$$w(v) = \begin{cases} 0, & v = Z \\ 1, v = x_i, i\ ganjil \\ 2, v = x_i, i\ genap \end{cases}$$

Jelas bahwa, $\forall v \in V(W_n)$ berlaku

$$\sigma(v) = \begin{cases} 0, & jika\ v = Z \\ 1, jika\ v = x_i, i\ ganjil \\ 2, jika\ v = x_i, i\ genap \end{cases}$$

Untuk i ganjil, diperoleh
$\sigma(x_i) = 1 \neq 2 = \sigma(x_{i+1})$ dan
$\sigma(x_i) = 1 \neq 0 = \sigma(Z)$

Untuk i genap, diperoleh
$\sigma(x_i) = 2 \neq 1 = \sigma(x_{i+1})$ dan
$\sigma(x_i) = 2 \neq 0 = \sigma(Z)$

Sehingga, berdasarkan Definisi 2.9, w sebuah pewarnaan-titik-3 modular pada graf W_n dan
$mc(W_n) \leq 3$ (4)
Dari (3) dan (4), diperoleh

$$mc(W_3) = 3$$

Kasus 2: n ganjil
Karena $K_3 \subseteq W_n$, maka berdasarkan Lemma 3.1,
$mc(W_n) \geq 3$ (5)
Dengan cara yang sama dengan cara pembuktian Teorema 3.6, dapat ditunjukkan
$mc(W_n) \neq 3$ (6)
Dari (5) dan (6), diperoleh
$mc(W_n) \geq 4$ (7)
Selanjutnya, ditunjukkan ada pewarnaan-titik-4 modular pada W_n. Untuk itu ditinjau dua subkasus.
<u>Subkasus 2.1:</u> $n \equiv 1 \pmod 4$
Misalkan $n = 4k + 1$, untuk suatu bilangan bulat positif k.
Definisikan pewarnaan-titik-4 w pada graf W_n sebagai berikut:

$$w: V(W_n) \to \mathbb{Z}_4$$

Dengan

$$w(v) = \begin{cases} k+3, & v = Z \\ 2, & v = x_{4k+1} \\ 1, v = x_i, i \in \{4, 8, \dots, 4k\} \\ 0, & jika\ v\ yang\ lain \end{cases}$$

Sehingga,

$$\sigma(v) = \begin{cases} k+2, & jika\ v = Z \\ k+1, & jika\ v = x_1\ atau\ v = x_{4k} \\ k+3, jika\ v = x_i, i\ genap, 2 \leq i \leq 4k-2 \\ k, & jika\ v = x_i, i\ ganjil, 3 \leq i \leq 4k+1 \end{cases}$$

Untuk i genap, $2 \leq i \leq 4k - 2$,
$\sigma(x_i) = k + 3 \neq k = \sigma(x_{i+1})$ dan
$\sigma(x_i) = k + 3 \neq k + 2 = \sigma(Z)$

Untuk i ganjil, $3 \leq i \leq 4k + 1$
$\sigma(x_i) = k \neq k + 3 = \sigma(x_{i-1})$ dan
$\sigma(x_i) = k \neq k + 2 = \sigma(Z)$

Berdasarkan Definisi 2.9, w sebuah pewarnaan-titik-4 modular pada W_n, sehingga
$mc(W_n) \leq 4$ (8)
<u>Subkasus 2.2:</u> $n \equiv 3 \pmod 4$
Misalkan $n = 4k + 3$, untuk suatu bilangan bulat positif k
Definisikan pewarnaan-titik-4 w pada W_n sebagai berikut :

$$w: V(W_n) \to \mathbb{Z}_4$$

Dengan

$$w(v) = \begin{cases} k+3, & v = Z \\ 2, & v = x_{4k+3} \\ 1, v = x_i, i \in \{4,8,\dots,4k\} & \\ 0, & yang\ lain \end{cases}$$

Diperoleh,

$$\sigma(v) = \begin{cases} k+2, & v = Z \\ k+1, & v = x_1\ atau\ v = x_{4k+2} \\ k+3, v = x_i, i \in \{2,4,\dots,4k\} \cup \{4k+3\} & \\ k, & v = x_i, i \in \{3,5,\dots,4k+1\} \end{cases}$$

Perhatikan bahwa, untuk i genap $2 \le i \le 4k$ atau $i = 4k+3$,
$\sigma(x_i) = k+3 \ne k = \sigma(x_{i+1})$ dan
$\sigma(x_i) = k+3 \ne k+2 = \sigma(Z)$

Untuk n ganjil, $3 \le i \le 4k+1$, diperoleh
$\sigma(x_i) = k \ne k+3 = \sigma(x_{i-1})$ dan
$\sigma(x_i) = k \ne k+2 = \sigma(Z)$

Begitu juga,
$\sigma(x_1) = k+1 \ne k+3 = \sigma(x_2)$;
$\sigma(x_1) = k+1 \ne k+2 = \sigma(Z)$;
$\sigma(x_2) = k+3 \ne k+2 = \sigma(Z)$

Berdasarkan Definisi 2.9, w sebuah pewarnaan-titik-4 modular pada W_n sehingga,
$mc(W_n) \le 4$ (9)
Dari (7), (8) dan (9) untuk n ganjil berlaku

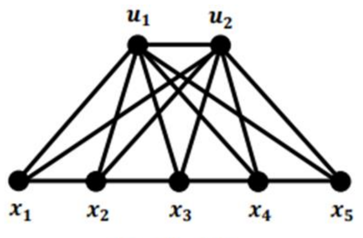
$$mc(W_n) = 4$$

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Perhatikan bahwa, join dari graf komplet K_2 dan lintasan P_n merupakan graf planar,

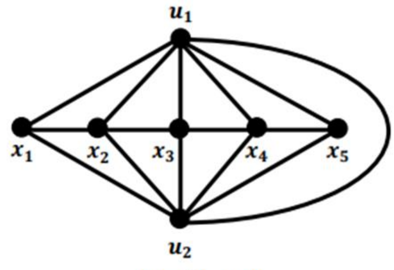
$$K_2 + P_n$$

Misalnya, graf $G = K_2 + P_5$ dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3. 6: Graf $G = K_2 + P_5$

Graf G dapat digambarkan pada bidang datar sedemikian hingga tidak ada sisi yang saling berpotongan kecuali mungkin pada titik-titik akhir dari sisi-sisi G; seperti tampak pada gambar berikut.



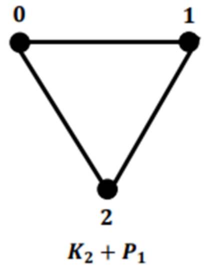
Gambar 3. 7: Pajangan (*embedding*) graf $K_2 + P_5$

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa bilangan kromatik modular graf planar $K_2 + P_n$ untuk $n \ge 2$ adalah 4.

Teorema 3.8 :
Untuk bilangan bulat positif n, berlaku,

$$mc(K_2 + P_n) = \begin{cases} 3, n = 1 \\ 4, n \ge 2 \end{cases}$$

Bukti:
Untuk $n = 1$, graf $G = K_2 + P_1 = K_3$
Berdasarkan Lemma 3.1,
$mc(K_2 + P_1) \ge 3$ (1)
Sebuah pewarnaan-titik-3 modular dari graf $K_2 + P_1$ dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3. 8: Pewarnaan-titik-**3** modular graf $K_2 + P_1$

Berdasarkan Lemma 3.2,
$mc(K_2 + P_1) \le 3$ (2)
Dari (1) dan (2) disimpulkan,

$$mc(K_2 + P_1) = 3$$

Untuk $n \ge 2$, misalkan $V(K_2) = \{u_1, u_2\}$ dan lintasan $P_n = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.
Perhatikan bahwa himpunan sisi $E_1 = \{u_1u_2, x_1x_2, u_1x_1, u_1x_2, u_2x_1, u_2x_2\}$ membangun sebuah subgraf komplet K_4 pada graf $K_2 + P_n$.
Sehingga berdasarkan Lemma 3.1,
$mc(K_2 + P_n) \ge 4$ (3)
Pertama-tama, definisikan sebuah pewarnaan-titik-2 w_1 pada lintasan P_n sebagai berikut:

$$w_1 : V(P_n) \to \mathbb{Z}_2$$

Jika $n \equiv 0$ (mod 4),

$$w_1(x_i) = \begin{cases} 1, i \equiv 2\ (mod\ 4) \\ 0, i \not\equiv 2\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Jika $n \not\equiv 0$ (mod 4),

$$w_1(x_i) = \begin{cases} 1, i \equiv 1\ (mod\ 4) \\ 0, i \not\equiv 1\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Selanjutnya, misalkan $G = K_2 + P_n$
Definisikan sebuah pewarnaan-titik-4 w pada G sebagai berikut:

$$w: V(G) \to \mathbb{Z}_4$$

Dengan

$$w(v) = \begin{cases} 1, & v = u_1 \\ 3, & v = u_2 \\ 2w_1(x_i), & v = x_i, 1 \le i \le n \end{cases}$$

Mudah dicek, untuk $n \equiv 0$ (mod 4),
Misalkan $n = 4k$, maka

$$\sigma(v) = \begin{cases} 0; v = x_i, i\ genap, 1 \le i \le n \\ 2; v = x_i, i\ ganjil, 1 \le i \le n \\ 2k+3; & v = u_1 \\ 2k+1; & v = u_2 \end{cases}$$

Untuk $n \not\equiv 0$ (mod 4), maka ada 3 kemungkinan, yaitu:

i. $n \equiv 1$ (mod 4), misal $n = 4k + 1$
ii. $n \equiv 2$ (mod 4), misal $n = 4k + 2$
iii. $n \equiv 3$ (mod 4), misal $n = 4k + 3$

Untuk setiap kemungkinan tersebut, diperoleh:

$$\sigma(v) = \begin{cases} 0; v = x_i, i\ ganjil, 1 \le i \le n \\ 2; v = x_i, i\ genap, 1 \le i \le n \\ 2k+3; & v = u_2 \\ 2k+1; & v = u_1 \end{cases}$$

Perhatikan, untuk $n \equiv 0$ (mod 4), i ganjil, $1 \le i \le n$,
$\sigma(x_i) = 2 \neq 0 = \sigma(x_{i+1})$;
$\sigma(x_i) = 2 \neq 1 = \sigma(u_1)$;
$\sigma(x_i) = 2 \neq 3 = \sigma(u_2)$;
$\sigma(x_{i+1}) = 0 \neq 1 = \sigma(u_1)$;
$\sigma(x_{i+1}) = 0 \neq 3 = \sigma(u_2)$.
Begitu juga berlaku untuk i genap.

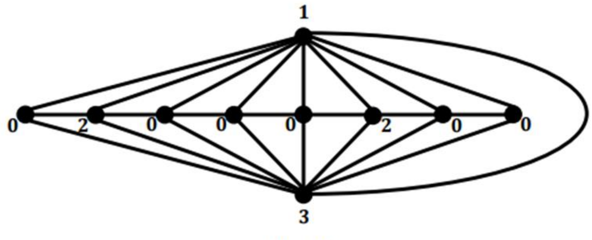
Untuk $n \not\equiv 0$ (mod 4), i ganjil, $1 \le i \le n$, diperoleh:
$\sigma(x_i) = 2 \neq 0 = \sigma(x_{i+1})$;
$\sigma(x_i) = 0 \neq 1 = \sigma(u_1)$;
$\sigma(x_i) = 0 \neq 3 = \sigma(u_2)$;
$\sigma(x_{i+1}) = 2 \neq 1 = \sigma(u_1)$;
$\sigma(x_{i+1}) = 2 \neq 3 = \sigma(u_2)$.
Begitu juga berlaku untuk i genap.

Berdasarkan Definisi 2.9, w adalah pewarnaan-titik-4 modular pada graf $K_2 + P_n$. Akibatnya,
$mc(K_2 + P_n) \le 4$ (4)
Dari (3) dan (4), diperoleh

$$mc(K_2 + P_n) = 4$$

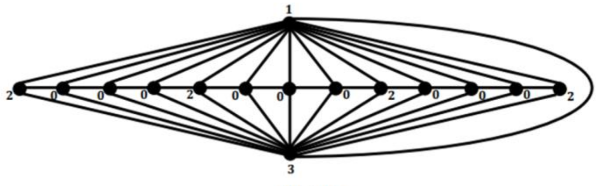
Dengan demikian, bukti teorema lengkap. ■

Sebuah pewarnaan-titik-4 modular pada graf $K_2 + P_8$ dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3. 9: Pewarnaan-titik-4 modular graf $\boldsymbol{K_2 + P_8}$

Sebuah pewarnaan-titik-4 modular pada graf $K_2 + P_{13}$ terlihat pada gambar berikut.



Gambar 3. 10: Pewarnaan-4 modular pada graf $\boldsymbol{K_2 + P_{13}}$

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada skripsi ini, maka dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik modular beberapa kelas graf planar yaitu sebagai berikut :

1. Jika H subgraf komplet dengan k titik dari graf G, maka :
$$mc(G) \ge k$$
2. Jika G graf terhubung dan taktrivial, maka :
$$mc(G) \ge \chi(G)$$
3. Jika G graf terhubung dan taktrivial, maka ada sebuah pewarnaan- k modular dari G untuk suatu bilangan bulat $k \ge 2$
4. Jika G graf terhubung dan taktrivial, maka :
$$mc(G) \le 2^n - 2$$
5. Jika G graf terhubung dan taktrivial dan derajat maksimum Δ, maka :
$$mc(G) \le 2^n - 2^{n-\Delta}$$
6. Graf Pohon T taktrivial memiliki bilangan kromatik modular yaitu :
$$mc(T) = 2 \text{ atau } mc(T) = 3$$
7. Graf Sikel C_n dengan $n \ge 3$ memiliki bilangan kromatik modular yaitu :
$$mc(C_n) = \begin{cases} 2, jika\ n \equiv 0 (mod\ 4) \\ 3, \quad\quad yang\ lain \end{cases}$$
8. Graf Roda W_n memiliki bilangan kromatik modular yaitu :

$$mc(W_n) = \begin{cases} 3, jika\ n\ genap \\ 4, jika\ n\ ganjil \end{cases}$$

9. Join dari graf Komplet K_2 dan lintasan P_n memiliki bilangan kromatik modular yaitu :

$$mc(K_2 + P_n) = \begin{cases} 3, jika\ n = 1 \\ 4, jika\ n \geq 2 \end{cases}$$

SARAN

Pada skripsi ini hanya fokus pada pewarnaan modular pada beberapa kelas graf planar, yaitu graf Pohon, graf Sikel, graf Roda dan join dari graf Komplet dan graf Lintasan. Bagi pembaca yang tertarik untuk mengembangkan tulisan ini, pembaca dapat membahas pewarnaan modular pada kelas-kelas graf lain yang dapat ditentukan nilai eksak modularnya.

DAFTAR PUSTAKA

Ajiji, M. A., & Rahadjeng, B. (2020). Pewarnaan Modular Pada Beberapa Subkelas Graf. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, *8*(3), 261–268. https://doi.org/10.26740/mathunesa.v8n3.p261-268

Budayasa, K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya* (4 ed.). Unesa University Press.

Chartrand, G. (2012). *A FIRST COURSE IN THEORY*. DOVER PUBLICATIONS, Inc.

Chartrand, G., & Lesniak, L. (2004). *Graphs & Digraphs, Fourth Edition*.

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2010). Graphs & digraphs. In *Graphs and Digraphs*. https://doi.org/10.1201/b19731

Ihwan, M. D., Rahmawati, A., & Sumargono, S. (2014). Kajian bilangan clique graf gear Gn dan graf barbel Bn. *Gamatika*, *5*(1), 39–50.

Kay, E., Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (1977). Graph Theory with Applications. *Operational Research Quarterly (1970-1977)*, *28*(1), 237. https://doi.org/10.2307/3008805

Kusumaningrum, F. A., & Rahadjeng, B. (2021). BILANGAN KROMATIK MODULAR PADA BEBERAPA SUBKELAS GRAF. *Jurnal Ilmiah Matematika*.

Nicholas, T., & R, S. G. (2017). Modular Colorings of Cycle Related Graphs. In *Global Journal of Pure and Applied Mathematics* (Vol. 13, Nomor 7). http://www.ripublication.com

Okamoto, F., Salehi, E., & Zhang, P. (2009). On modular colorings of caterpillars. *Congr. Numerantium*, *197*, 213–220.

Okamoto, F., Salehi, E., & Zhang, P. (2010). A checkerboard problem and modular colorings of graphs. *Bull. Inst. Comb. Appl.*, *58*(January 2010), 29–47.

Paramaguru, N., & Sampathkumar, R. (2013). *Modular chromatic number of c*. *2*(2), 47–72.

Paramaguru, N., & Sampathkumar, R. (2014). Modular colorings of join of two special graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, *2*(2), 139–149. https://doi.org/10.5614/ejgta.2014.2.2.6