

**STRATEGI KONTROL OPTIMAL PADA SISTEM DINAMIK PEROKOK****Asmianto**

Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Malang

Email : [\\*asmianto.fmipa@um.ac.id](mailto:*asmianto.fmipa@um.ac.id)**Kridha Pusawidjayanti**

Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Malang

Email : [kridha.pusawidjayanti.fmipa@um.ac.id](mailto:kridha.pusawidjayanti.fmipa@um.ac.id)**Vita Kusumasari**

Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Malang

Email: [vita.kusumasari.fmipa@um.ac.id](mailto:vita.kusumasari.fmipa@um.ac.id)

\*corresponding author

**Abstrak**

Penelitian ini bertujuan untuk menyelidiki strategi optimal dalam model dinamik merokok. Model dinamik merokok dibagi menjadi 3 subpopulasi diantaranya perokok potensial (non-perokok), perokok aktif yang merokok setiap hari, dan orang-orang yang telah berhenti merokok secara permanen. Terdapat lima variabel strategi pengendalian model dinamik merokok diantaranya: pendidikan terkait bahaya rokok bagi kesehatan, vaksinasi, perpajakan tembakau, pengobatan, dan rehabilitasi. Dalam menyelesaikan masalah optimasi, penelitian ini menggunakan metode *Pontryagin Maximum Principle*. Selanjutnya, metode runge kutta orde-4 digunakan untuk mengimplementasikan solusi numerik dan Software Matlab untuk mensimulasikan model dinamik merokok yang telah diberi kontrol. Berdasarkan hasil simulasi terlihat bahwa strategi yang diberikan efektif mengurangi jumlah sub populasi yang berpotensi menjadi perokok dan perokok aktif sedangkan sub populasi yang berhenti merokok dapat berkurang.

**Kata Kunci:** kontrol optimal, sistem dinamik, merokok, *Pontryagin Maximum Principle*

**Abstract**

*This study aimed to investigate optimal strategies in dynamic models of smoking. The smoking dynamic model is divided into 3 subpopulations including potential smokers (non-smokers), active smokers who smoke daily, and people who have quit smoking permanently. There are five variables of the smoking dynamic model control strategy, including education related to the dangers of smoking for health, vaccination, tobacco taxation, treatment, and rehabilitation. In solving optimization problems, this study uses the Maximum Pontryagin Principle method. Furthermore, the 4th-order runge kutta method was used to implement numerical solutions and Matlab Software to simulate a control model of smoking dynamics. Based on the simulation results, it can be seen that the control provided is effective in reducing the number of smokers and increasing the number of people who quit smoking.*

**Keywords:** optimal control, dynamic system, smoking, *Pontryagin Maximum Principle*

**PENDAHULUAN**

Merokok merupakan suatu aktivitas yang sudah dianggap biasa di dunia ini, meskipun memiliki hubungan yang kuat dengan berbagai jenis penyakit berbahaya. Sebagian besar perokok tidak menyadari bahwa merokok mempengaruhi semua organ didalam tubuh, terutama perut, jantung, paru-paru, dll. Bahan kimia dalam rokok dapat merusak jantung kita untuk berfungsi dengan baik. Merokok meningkatkan risiko osteoporosis, suatu kondisi di

mana tulang menjadi lemah dan lebih mungkin patah (Zeb et al., 2018). Di Indonesia, jumlah perokok dari tahun ke tahun cenderung semakin bertambah. Banyak orang yang menyesal akibat merokok setelah mengidap penyakit kronis seperti jantung, paru-paru ataupun penyakit kronis lainnya. Saat ini Indonesia menduduki peringkat ke-3 perokok terbanyak di dunia, sedangkan peringkat 1 dan 2 masih diduduki oleh negara India dan China. Diantara para perokok tersebut, lebih dari 70 juta perokok

dewasa beresiko terkena penyakit menular dan tidak menular (Kementerian Kesehatan, 2023).

Model epidemik penyebaran penyakit menular adalah epidemi rentan-terinfeksi-pulih atau dikenal dengan *SIR* (*Susceptible-Infected-Recovered*), dimana model ini pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan Mckendrick (Kermack & McKendrick, 1927). Pada model *SIR* terdapat tiga persamaan diferensial yang terdiri dari *S*, *I*, dan *R*. Ketiga persamaan differensial ini mewakili tingkat perubahan populasi masing-masing. Dalam model epidemi *SIR*, individu dikategorikan menjadi tiga sub populasi; *S* merepresentasikan sub populasi yang rentan terhadap penyakit, *I* merepresentasikan sub populasi yang terinfeksi penyakit pada waktu tertentu dan *R* merepresentasikan sub populasi yang telah pulih setelah terinfeksi suatu penyakit. Penelitian terkait model epidemik perokok sudah pernah dilakukan oleh beberapa peneliti (Agegnehu Matintu, 2017; Alkhudari et al., 2014).

Pada penelitian sebelumnya, Zaman dkk. (Zaman et al., 2017) melakukan penelitian menggunakan model epidemi *SIR* terkait perokok dengan tingkat insiden standar dan hanya menggunakan dua variabel kontrol yaitu vaksinasi untuk meminimalkan individu yang rentan menjadi perokok dan edukasi bahaya merokok untuk populasi yang rentan atau potensi menjadi perokok. Dalam penelitian ini, model matematika dari epidemi merokok (Zaman et al., 2017) kami menambahkan tiga kontrol optimal, yaitu, pengobatan, peningkatan pajak dan rehabilitasi sehingga total variabel kontrol pada model matematika menjadi lima. Dengan adanya strategi pemberian kontrol terlihat bagaimana perilaku penyebaran populasi perokok pada model yang digunakan, dimana dalam penelitian ini metode pontryagin maksimum principle digunakan untuk mengoptimalkan penyebaran setiap sub populasi perokok.

## KAJIAN TEORI

Diberikan sistem linear invarian-waktu yang disajikan oleh persamaan:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ \dot{y}(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

**Definisi Keterkontrolan.** Sistem linear dikatakan terkontrol bila untuk setiap keadaan sebarang  $x(0) =$

$x_0$  terdapat inputan  $u(t)$  yang tidak dibatasi mentransfer keadaan  $x_0$  ke sebarang keadaan akhir  $x(t_1) = x_1$  dengan waktu akhir  $t_1$  hingga.

Dari pengertian sistem terkontrol yang diberikan, hal ini berarti bahwa bila diberikan sebarang keadaan awal  $x(0)$  dan sebarang keadaan akhir  $x(t_1)$  akan selalu ada pengontrol  $u(t)$  yang akan mentransfer keadaan awal  $x(0)$  ke keadaan akhir yang diinginkan  $x(t_1)$  dalam waktu yang berhingga  $t_1$ . Perlu diingat bahwa sebarang keadaan awal dan sebarang keadaan akhir ini terdiri dari  $n$  komponen dan apa bila semua komponen dari keadaan awal ini bisa dikontrol ke  $n$  komponen yang sesuai keadaan akhir, maka sistem bisa dikontrol. Sedangkan maksud dari keberadaan pengontrol  $u(t)$  yang tak dibatasi adalah tidak disyaratkan apa-apa kecuali hanya untuk mentransfer sebarang keadaan awal yang diberikan ke sebarang keadaan akhir yang diinginkan dalam waktu yang berhingga. Dalam kajian kontrol optimal pemilihan pengontrol  $u(t)$  ini merupakan pengontrol yang mentransfer keadaan awal ke keadaan akhir yang diinginkan dengan energi yang sekecil mungkin (minimum).

Penyelesaian dari  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  diberikan oleh:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Bila sistem terkontrol, yaitu ada masukan  $u(t)$  yang mentransfer  $x_0$  ke  $x_1$  dalam waktu berhingga  $t = t_1$ . Dalam hal ini  $x_1$  diberikan oleh:

$$x_1 = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

**Teorema terkait sistem terkontrol.** Syarat perlu dan cukup sistem (2) terkontrol adalah: Matriks  $M_c = (B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B)$  mempunyai rank sama dengan  $n$ .

Metode Pontryagin Maximum Principle merupakan salah satu cara dalam menyelesaikan masalah kendali optimal dengan kendala yang terbatas. Metode ini digunakan untuk memperoleh kendali terbaik pada sistem dinamik dari state awal hingga akhir, yaitu dengan memaksimalkan fungsi objektif. Permasalahan ini telah dikembangkan oleh L.S. Pontryagin dan rekan kerjanya pada tahun 1950 yang diaplikasikan untuk semua masalah kalkulus variasi. Oleh karena itu, prinsip ini disebut sebagai Pontryagin Maximum Principle. Metode ini merupakan metode yang lebih modern

dibanding metode lainnya, LQR salah satunya. Prinsip ini menyatakan secara informal bahwa persamaan Hamiltonian akan dimaksimalkan sepanjang  $u$  yang merupakan himpunan kendali yang mungkin. Dengan memperhatikan persamaan keadaan dan fungsi tujuan yang telah diberikan, langkah dalam menyelesaikan masalah kendali optimal adalah sebagai berikut (Subiono, 2013).

a. Langkah 1

Bentuk fungsi Hamiltonian ( $H$ ) sebagai berikut:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), \lambda(t), t) + \lambda'(t)f(x(t), u(t), t),$$

dimana ( $'$ ) merupakan *transpose*.

b. Langkah 2 Memaksimumkan  $H$  terhadap  $u(t)$  dengan cara:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u(t)}\right) = 0,$$

Sehingga diperoleh kondisi stasioner  $u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$

c. Langkah 3

Dengan menggunakan hasil yang diperoleh dari langkah 2, akan didapatkan fungsi Hamiltonian yang optimal  $H^*$  yaitu:

$$H^*(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t) = H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

d. Langkah 4

Selesaikan  $2n$  persamaan diferensial, dengan  $n$  adalah jumlah variabel keadaan:

$$\dot{x}(t) = \left(\frac{\partial H^*(x, \lambda, t)}{\partial \lambda}\right) \quad \text{Persamaan state}$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\left(\frac{\partial H^*(x, \lambda, t)}{\partial x}\right) \quad \text{Persamaan co - state}$$

dengan kondisi-kondisi batas diberikan.

e. Langkah 5

Untuk memperoleh kontrol optimal substitusikan hasil langkah 4 kedalam ekspresi  $u^*$ .

**METODE**

Dalam penelitian ini, digunakan model epidemik perokok pada penelitian Zaman et al., (2017) dimana populasi dibagi menjadi tiga kategori diantaranya  $P(t)$  yang merepresentasikan sub populasi yang berpotensi untuk menjadi perokok dalam waktu  $t$ ,  $T(t)$  merepresentasikan sub populasi yang merokok setiap hari dalam waktu  $t$  (perokok aktif), dan  $Q(t)$  merepresentasikan jumlah orang yang berhenti merokok secara

permanen dalam waktu  $t$ . Sistem persamaan differensial non-linear terkait model epidemik perokok yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \mu N(t) - \mu P(t) - \frac{\alpha P(t)T(t)}{N(t)}, P(0) = P_0 \geq 0,$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{\alpha P(t)T(t)}{N(t)} - (\omega + \mu)T(t), T(0) = T_0 \geq 0,$$

(1)

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \omega T(t) - \mu Q(t), Q(0) = Q_0 \geq 0$$

Dimana jumlah populasi  $N(t) = P(t) + T(t) + Q(t)$ ,  $\mu > 0$  laju sistem,  $\omega > 0$  tingkat setiap individu perokok berhenti pada saat  $t$  dan  $\alpha$  merepresentasikan tingkat pengaruh keefektifan pada saat  $t$ . Tingkat standar yang dipertimbangkan pada model ini adalah

$$\frac{\alpha P(t)T(t)}{N(t)}, \text{ dimana } \alpha = cq \text{ merupakan hasil}$$

perkalian antara rata-rata interaksi  $c$  dengan probabilitas seseorang menjadi perokok  $q$ . Pada model matematika (1) jika tidak diberikan suatu tindakan atau kontrol maka jumlah orang di populasi yang menjadi perokok akan bertambah atau menurun dengan laju yang sangat pelan dan jumlah orang yang berhenti merokok secara permanen akan berkurang dalam waktu  $t$ . Berdasarkan hal tersebut pada penelitian ini dilakukan strategi optimalisasi pada model matematika dengan strategi mengoptimalkan kontrol  $u(t)$  yang berupa kampanye anti-rokok atau edukasi  $u_1(t)$ , vaksinasi  $u_2(t)$ , peningkatan pajak  $u_3(t)$ , pengobatan  $u_4(t)$ , dan rehabilitasi  $u_5(t)$ , dimana metode kontrol optimal yang digunakan adalah *Pontryagin Maximum Principle*. Tujuan utama dari pemberian atau penambahan kontrol pada model epidemik perokok adalah untuk mengurangi laju jumlah sub populasi perokok dan meningkatkan laju jumlah sub populasi yang berhenti merokok.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

Model matematika perokok setelah ditambahkan variabel kontrol menjadi sebagai berikut :

$$\frac{dP(t)}{dt} = \mu N(t) - (\mu + u_1 + u_2 + u_3)P(t) - \frac{\alpha P(t)T(t)}{N(t)}$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{\alpha P(t)T(t)}{N(t)} - (\omega + \mu + u_4 + u_5)T(t)$$

(2)

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \omega T(t) - \mu Q(t) + (u_1 + u_2 + u_3)P(t) + (u_4 + u_5)T(t)$$

Permasalahan kontrol optimal pada penelitian ini memiliki fungsi objektif sebagai berikut :  $J(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = \int_0^{t_{akhir}} [P(t) + T(t) + \frac{1}{2}(k_1 u_1^2(t) + \frac{1}{2}(k_2 u_2^2(t) + \frac{1}{2}(k_3 u_3^2(t) + \frac{1}{2}(k_4 u_4^2(t) + \frac{1}{2}(k_5 u_5^2(t))]$

dimana  $k_1, k_2, k_3, k_4$  dan  $k_5$  merupakan konstanta positif untuk menjaga kesetimbangan besarnya kontrol dari  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , dan  $u_5$ . Dalam mendapatkan solusi optimal digunakan metode *Pontryagin Maximum Principle*. Berikut langkah-langkah pada metode *PMP* (*Pontryagin Maximum Principle*) :

Pertama, Menentukan fungsi lagrange dan Hamiltonian

$$\begin{aligned} L(P, T, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) &= P(t) + T(t) + \frac{1}{2}(k_1 u_1^2(t) \\ &+ \frac{1}{2}(k_2 u_2^2(t) + \frac{1}{2}(k_3 u_3^2(t) \\ &+ \frac{1}{2}(k_4 u_4^2(t) + \frac{1}{2}(k_5 u_5^2(t) \end{aligned}$$

dan fungsi hamiltonian,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(P, T, Q, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ) &= \\ L(P, T, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) + \lambda_1 (\mu N(t) - (\mu + u_1 + u_2 + & \\ u_3)P(t) - \frac{\alpha P(t)T(t)}{N(t)}) + \lambda_2 (\frac{\alpha P(t)T(t)}{N(t)} - (\omega + \mu + u_4 + & \\ u_5)T(t)) + \lambda_3 (\omega T(t) - \mu Q(t) + (u_1 + u_2 + u_3)P(t) + & \\ (u_4 + u_5)T(t)). \end{aligned}$$

Kedua, Menentukan kondisi stasioner fungsi hamiltonian terhadap variabel kontrol  $u_1, u_2, u_3, u_4$  dan  $u_5$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} = k_1 u_1^*(t) - \lambda_1 P(t) + \lambda_3 P(t) = 0$$

$$u_1^*(t) = \frac{\lambda_1 P(t) - \lambda_3 P(t)}{k_1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} = k_2 u_2^*(t) - \lambda_1 P(t) + \lambda_3 P(t) = 0$$

$$u_2^*(t) = \frac{\lambda_1 P(t) - \lambda_3 P(t)}{k_2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_3} = k_3 u_3^*(t) - \lambda_1 P(t) + \lambda_3 P(t) = 0$$

$$u_3^*(t) = \frac{\lambda_1 P(t) - \lambda_3 P(t)}{k_3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_4} = k_4 u_4^*(t) - \lambda_2 T(t) + \lambda_3 T(t) = 0$$

$$\begin{aligned} u_4^*(t) &= \frac{\lambda_2 T(t) - \lambda_3 T(t)}{k_4} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_5} &= k_5 u_5^*(t) - \lambda_2 T(t) + \lambda_3 T(t) = 0 \end{aligned}$$

$$u_5^*(t) = \frac{\lambda_2 T(t) - \lambda_3 T(t)}{k_5}$$

Karena  $u_1^*(t) = u_2^*(t) = u_3^*(t) = u_4^*(t) = u_5^*(t)$  himpunan tertutup  $[0,1]$ , maka,

$$\begin{aligned} u_1^*(t) &= \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_1 P(t) - \lambda_3 P(t)}{k_1} \right\}, 1 \right\} \\ u_2^*(t) &= \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_1 P(t) - \lambda_3 P(t)}{k_2} \right\}, 1 \right\} \\ u_3^*(t) &= \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_1 P(t) - \lambda_3 P(t)}{k_3} \right\}, 1 \right\} \\ u_4^*(t) &= \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_2 T(t) - \lambda_3 T(t)}{k_4} \right\}, 1 \right\} \\ u_5^*(t) &= \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_2 T(t) - \lambda_3 T(t)}{k_5} \right\}, 1 \right\} \end{aligned}$$

Ketiga, Menyelesaikan persamaan state  $\dot{P}^*(t), \dot{T}^*(t)$  dan  $\dot{Q}^*(t)$

$$\begin{aligned} \dot{P}^*(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_1} = \mu N(t) \\ &\quad - (\mu + u_1 + u_2 \\ &\quad + u_3)P(t) - \frac{\alpha P(t)T(t)}{N(t)} \\ \dot{T}^*(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_2} = \frac{\alpha P(t)T(t)}{N(t)} - (\omega + \mu + u_4 \\ &\quad + u_5)T(t) \\ \dot{Q}^*(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_3} = \omega T(t) - \mu Q(t) \\ &\quad + (u_1 + u_2 + u_3)P(t) \\ &\quad + (u_4 + u_5)T(t) \end{aligned}$$

Keempat, Menentukan persamaan adjoin atau co-state  $\lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t)$  dan  $\lambda_3^*(t)$

$$\lambda_1^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = -1 \left( \left( -1(\mu + u_1 + u_2 + u_3) - \frac{\alpha T(t)}{N(t)} \right) \lambda_1 + \lambda_2 \left( \frac{\alpha T(t)}{N(t)} \right) + \lambda_3(u_1 + u_2 + u_3) \right)$$

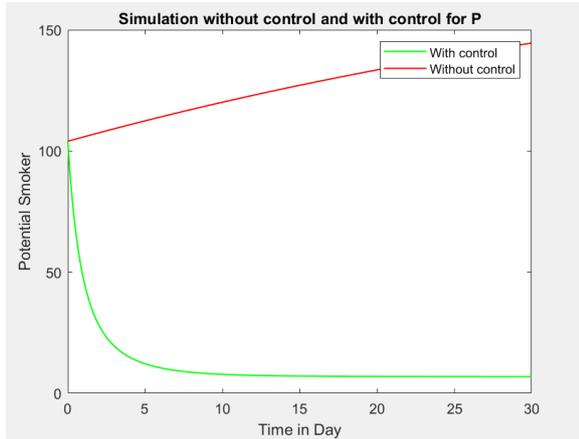
$$\lambda_2^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} = -1 \left( (-1) \left( \frac{\alpha P(t)}{N(t)} \right) \lambda_1 + \lambda_2 \left( \frac{\alpha P(t)}{N(t)} \right) - \omega + \mu + u_4 + u_5 \right) + \lambda_3(\omega + u_4 + u_5)$$

$$\lambda_3^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q} = \lambda_3 \mu$$

Kelima, Penyelesaian dengan forward-backward sweep Runge Kutta orde 4.

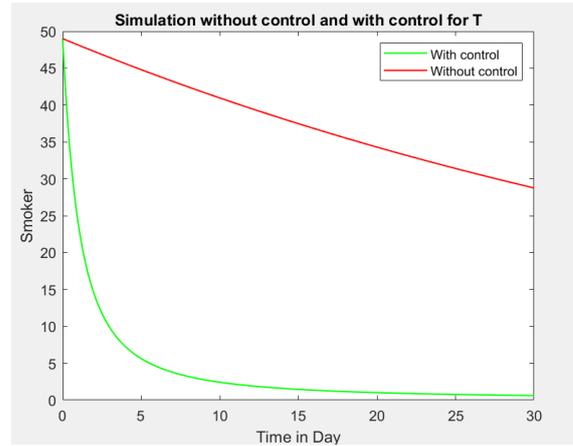
Pada tahap ini permasalahan diselesaikan secara numerik menggunakan runge kutta orde-4 dan dilakukan simulasi menggunakan software Matlab dengan paramater mengikuti studi literatur (Ilmayasinta et al., 2021):

$$\begin{aligned} \mu &= 0.019, \omega = 0.00015, \alpha = 0.0022, k_1 = k_2 = k_3 \\ &= k_4 = 100, P(0) = 104, T(0) \\ &= 49, Q(0) = 47 \end{aligned}$$



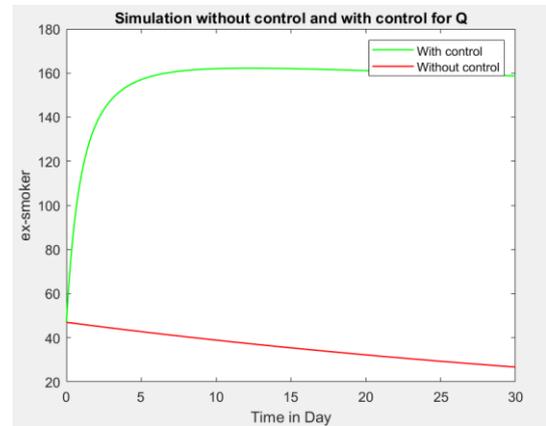
Gambar 1. Plot sub populasi perokok potensial dengan dan tanpa kontrol

Pada gambar 1 bisa dilihat bahwasanya strategi kontrol pada orang yang berpotensi untuk merokok berkurang cukup drastis khususnya pada 7 hari pertama.



Gambar 2. Plot sub populasi perokok dengan dan tanpa kontrol

Gambar 2 mensimulasikan perilaku perokok sebelum dan setelah diberikan kontrol. Kontrol atau strategi yang digunakan dapat dikatakan efektif karena jumlah perokok aktif berkurang drastis sampai hari ke-30.



Gambar 3. Plot sub populasi berhenti merokok dengan dan tanpa kontrol

Pada gambar 3 disimulasikan perilaku sub populasi yang sudah berhenti merokok secara permanen. Terdapat perbedaan yang cukup signifikan sebelum dan sesudah diberikan kontrol. Sub populasi yang berhenti merokok sebelum diberikan kontrol memang sudah menurun hanya saja menurunnya sangat pelan dan sedikit, sedangkan setelah diberikan tambahan kontrol sub populasi yang berhenti merokok bisa lebih dioptimalkan.

Berdasarkan hasil simulasi ketiga sub populasi, strategi penambahan kontrol membuat perubahan yang cukup signifikan. Terdapat perbedaan yang mencolok perilaku sub populasi sebelum dan sesudah diberikan kontrol. Jumlah sub

populasi perokok dapat berkurang drastis dan sub populasi yang berhenti secara permanen meningkat. Hal ini menunjukkan bahwa strategi yang digunakan pada sistem dinamik perokok optimal.

## PENUTUP

### SIMPULAN

Pada penelitian ini, dilakukan strategi optimalisasi pada model epidemik perokok beserta simulasinya. Strategi yang digunakan diantaranya edukasi terkait bahaya rokok, vaksinasi, peningkatan pajak, pengobatan dan rehabilitasi. Model matematika yang sudah diberikan variabel kontrol disimulasikan dan dibandingkan dengan model sebelum diberikan kontrol. Berdasarkan hasil simulasi terlihat bahwa jumlah sub populasi yang berpotensi menjadi perokok dan perokok aktif menurun cukup drastis jika dibandingkan tanpa menggunakan kontrol. Sedangkan, jumlah sub populasi yang berhenti merokok secara permanen jumlahnya meningkat. Hal ini menunjukkan bahwa strategi yang ditambahkan efektif dan model epidemik perokok dapat dioptimalkan.

### SARAN

Saran untuk penelitian selanjutnya, peneliti bisa mencoba menggunakan metode lain untuk mengoptimalkan model dinamik perokok dan mempertimbangkan terkait biaya yang dikeluarkan untuk setiap strategi yang digunakan.

### UCAPAN TERIMA KASIH

Tim peneliti mengucapkan terima kasih kepada PNBPN Universitas Negeri Malang karena sudah mendanai penelitian ini sehingga penelitian dapat berjalan dengan baik.

### DAFTAR PUSTAKA

- Agegnehu Matintu, S. (2017). Smoking as Epidemic: Modeling and Simulation Study. *American Journal of Applied Mathematics*, 5(1), 31.  
<https://doi.org/10.11648/j.ajam.20170501.14>
- Alkhudari, Z., Al-Sheikh, S., & Al-Tuwairqi, S. (2014). The effect of occasional smokers on the dynamics of a smoking model. *International Mathematical*

*Forum*, 9, 1207–1222.

<https://doi.org/10.12988/imf.2014.46120>

Alkhudhari, Z., Al-Sheikh, S., & Al-Tuwairqi, S. (2014). Global Dynamics of a Mathematical Model on Smoking. *ISRN Applied Mathematics*, 2014, 1–7.

<https://doi.org/10.1155/2014/847075>

Ilmayasinta, N., Anjarsari, E., & Ahdi, M. W. (2021). *Optimal Control for Smoking Epidemic Model*. Kementerian Kesehatan. (2023, June).

Kermack, W. O., & McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 115(772), 700–721. <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>

Subiono. (2013). *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*.

Zaman, G., Kang, Y. H., Cho, G., & Jung, I. H. (2017).

Optimal strategy of vaccination & treatment in an SIR epidemic model. *Mathematics and Computers in Simulation*, 136, 63–77.

<https://doi.org/10.1016/j.matcom.2016.11.010>

Zeb, A., Bano, A., Alzahrani, E., & Zaman, G. (2018).

Dynamical analysis of cigarette smoking model with a saturated incidence rate. *AIP Advances*, 8(4).

<https://doi.org/10.1063/1.5028157>