MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 12 No 01
Tahun 2024

SUBALJABAR FUZZY DAN IDEAL FUZZY BCK/BCI-ALJABAR DENGAN DERAJAT PADA INTERVAL (0,1]

Ayatulloh Afurqon
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
e-mail : ayatulloh.20011@mhs.unesa.ac.id

Raden Sulaiman
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
Penulis Korespondensi : radensulaiman@unesa.ac.id

Abstrak

BCK/BCI-aljabar dengan himpunan fuzzy merupakan dua cabang matematika yang berbeda, sehingga menjadi pembahasan unik ketika hal tersebut dipadukan. Fokus utama dari pembahasan penelitian ini adalah subaljabar fuzzy BCK/BCI-aljabar P didefinisikan, "Misal X dan P adalah BCK/BCI-aljabar, dengan $P \subseteq X$. Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ disebut sebagai subaljabar fuzzy pada P dengan derajat λ, dengan $\lambda \in [0,1]$, jika dan hanya jika $\forall x, y \in P$, $\mu_{\tilde{A}}(x * y) \geq \lambda \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$ ". Dan ideal fuzzy BCK/BCI-aljabar P dengan derajat (λ, κ) didefinisikan dengan, "Misal X dan P adalah BCK/BCI-aljabar, dengan $P \subseteq X$. Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ disebut ideal fuzzy pada P dengan derajat (λ, κ) dengan $\lambda \in (0,1]$ dan $\kappa \in (0,1]$ jika dan hanya jika, $\forall x \in P$, $\mu_{\tilde{A}}(0) \geq \lambda \mu_{\tilde{A}}(x)$, dan $\forall x, y \in P$, $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \kappa \min\{\mu_{\tilde{A}}(x * y), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$". Selain itu, terdapat 8 sifat beserta pembuktian dari subaljabar fuzzy dan 7 sifat beserta pembuktian dari ideal fuzzy BCK/BCI-aljabar dengan derajat pada interval (0,1].
Kata Kunci: Subaljabar Fuzzy, Ideal Fuzzy, BCK/BCI-Aljabar, Derajat.

Abstract

BCK/BCI-algebra and fuzzy set are two different branches of mathematics, so it becomes a unique discussion when they are combined. The main focus of the discussion of this research is the fuzzy subalgebra of BCK/BCI-algebra P defined, "Suppose X and P are BCK/BCI-algebras, with P ⊆ X. The fuzzy set $\tilde{A}$ is called a fuzzy subalgebra of P of degree λ, with $\lambda \in [0,1]$, if and only if $\forall x, y \in P$, $\mu_{\tilde{A}}(x * y) \geq \lambda\, min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$". And the fuzzy ideal of BCK/BCI-algebra P with degree (λ, κ) is defined by, "Let X and P be BCK/BCI-algebras, with P ⊆ X. The fuzzy set $\tilde{A}$ is called a fuzzy ideal on P of degree (λ, κ) with $\lambda \in (0,1]$ and $\kappa \in (0,1]$ if and only if, $\forall x \in P$, $\mu_{\tilde{A}}(0) \geq \lambda \mu_{\tilde{A}}(x)$, dan $\forall x, y \in P$, $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \kappa \min\{\mu_{\tilde{A}}(x * y), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$". In addition, there are 8 properties along with the proof of fuzzy subalgebra and 7 properties along with the proof of fuzzy ideal of BCK/BCI-algebra with degree on the interval (0,1].
Keywords: *Fuzzy Subalgebra, Fuzzy Ideal, BCK/BCI-Algebra, Degree.*

PENDAHULUAN

Bagian dari cabang matematika yang terkait dengan struktur dan sifat-sifat adalah ilmu aljabar (Matematika & Alifviansyah, 2022). Simbol-simbol digunakan untuk menyampaikan gagasan dari struktur aljabar (Jun et al., 2011). Dalam konteks ini, struktur aljabar akan selalu berkaitan dengan himpunan yang tidak kosong yang berisi elemen-elemen yang dapat dioperasikan dengan operasi penjumlahan, perkalian, atau keduanya, serta operasi biner lainnya. Hal ini berarti bahwa diskusi tentang topik aljabar abstrak melibatkan objek-objek abstrak yang diungkapkan dalam bentuk simbol (Meng & Guo, 2005).

Seiring dengan kemajuan dalam bidang ilmu pengetahuan, simbol-simbol yang telah ada juga menjadi fokus penelitian. Sebagai contoh, pada tahun 1966, Y. Imai dan K. Iseki mengenalkan perkembangan baru dalam bidang struktur aljabar abstrak dengan munculnya BCK-aljabar dan BCI-aljabar (Al-masarwah & Ahmad, 2019). Pada tahun yang sama, Y. Imai dan K. Iseki memperkenalkan konsep BCI-aljabar, yang merupakan generalisasi dari BCK-aljabar, sehingga BCK-aljabar menjadi bagian dari BCI-aljabar (Matematika & Alifviansyah, 2022). Bidang ilmu baru ini belum ada sebelumnya dan diperkenalkan pertama kali pada tahun 1966. Pada tahu 1965, ide mengenai himpunan fuzzy pertama kali diajukan oleh Profesor Lotfi Asker Zadeh, seorang ilmuwan berkebangsaan Iran yang bekerja di Universitas California di Berkeley. Dia memperkenalkannya melalui tulisannya yang berjudul "Fuzzy Sets" pada tahun 1965 (C. W. Liu & Kang, 2014). Zadeh menjelaskan bahwa himpunan fuzzy adalah himpunan dimana derajat keanggotaannya memiliki nilai kekaburan yang berkisar antara 0 hingga 1 untuk setiap elemen yang ada di dalamnya (Andaru & Sulaiman, 2022).

Sebagai pengetahuan tambahan tentang subaljabar fuzzy dan ideal fuzzy BCK/BCI-aljabar serta menyelidiki hubungannya dengan subaljabar fuzzy dan ideal fuzzy BCK/BCI-aljabar dengan derajat pada interval (0,1], maka pada artikel ini akan membahas terkait subaljabar fuzzy dan ideal fuzzy BCK/BCI-aljabar dengan derajat pada interval (0,1], serta mengkonstuksi suatu himpunan diperbersar berkaitan dengan himpunan, Dimana himpunan tersebut merupakan himpunan bagian dari BCK/BCI aljabar. Selain itu, membuktikan sifat-sifat dari BCI/BCK-aljabar dengan derajat pada interval (0,1].

KAJIAN TEORI

Definisi 2.1. Diberikan himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada himpunan klasik X. Himpunan bagian bertingkat pada $\tilde{A}$ didefinisikan

$$U(\tilde{A};\, t) := \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq t\}, \forall t \in [0, 1]$$

(Jun, 2009)

Definisi 2.2. BCI-aljabar $(X,*,0)$ adalah suatu himpunan tak kosong X, dengan operasi biner "$*$" dan elemen khusus 0 yang memenuhi aksioma berikut:

1. $\big((x*y)*(x*z)\big)*(z*y) = 0, \forall x,y,z \in X$
2. $\big(x*(x*y)\big)*y = 0, \forall x,y \in X$
3. $x*x = 0,\ \forall x \in X$
4. $x*y = y*x = 0 \Rightarrow x = y, \forall x,y \in X$
   Jika BCI-aljabar memenuhi
5. $0*x = 0,\ \forall x \in X$
   Maka X disebut BCK-aljabar

(Jun et al., 2017)

Teorema 2.3. Setiap BCK-aljabar $(X,*,0)$ dengan himpunan tak kosong X, operasi biner "$*$" dan elemen khusus 0 juga memenuhi:

1. $x*0 = x,\ \forall x \in X$
2. $x*y = 0 \Rightarrow (x*z)*(y*z) = 0, (z*y)*(z*x) = 0, \forall x,y \in X$
3. $(x*y)*z = (x*z)*y, \forall x,y,z \in X$
4. $\big((x*z)*(y*z)\big)*(x*y) = 0, \forall x,y,z \in X$

(Jun et al., 2017)

Definisi 2.4. Urutan parsial didefinisikan "$\leq$" dengan $x \leq y$ jika dan hanya jika

$$x*y = 0, \forall x,y \in X.$$

(Meng & Guo, 2005)

Definisi 2.5. Himpungan tak kosong S himpunan bagian BCK/BCI-aljabar X disebut subaljabar pada X. Jika $\forall x,y \in S$, berlaku $x*y \in S$.

(Jun et al., 2017)

Definisi 2.6. Himpunan A himpunan bagian dari BCK/BCI-aljabar X disebut sebagai ideal dari X, jika memenuhi dua aksioma berikut:

1. $0 \in A$
2. $\forall x \in X$ dan $\forall y \in A,\ x*y \in A \Rightarrow x \in A$

(Y. L. Liu & Meng, 2001)

Definisi 2.7. Misal X dan P adalah BCK/BCI-aljabar, dengan $P \subseteq X$. Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ disebut sebagai subaljabar fuzzy pada P jika dan hanya jika $\forall x,y \in P$,

$$\mu_{\tilde{A}}(x*y) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}.$$

(Jun et al., 2017)

Definisi 2.8. Misal X dan P adalah BCK/BCI-aljabar, dengan $P \subseteq X$. Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ disebut ideal fuzzy pada P jika dan hanya jika,

1. $\forall x \in P, \mu_{\tilde{A}}(0) \geq \lambda\mu_{\tilde{A}}(x)$, dan
2. $\forall x,y \in P, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \kappa\min\{\mu_{\tilde{A}}(x*y), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$

(Jun et al., 2017)

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian hasil dan pembahasan ini akan dibahas tentang subaljabar Fuzzy pada BCK/BCI-aljabar dengan derajat pada interval (0, 1] dan Ideal Fuzzy pada BCK/BCI-aljabar dengan derajat pada interval (0, 1].

Berikut ini diberikan derajat berupa λ dan κ anggota dalam interval (0, 1], dan $\forall n \in N$ dan $\forall k \in R$. Dengan $k < n$, kecuali jika ada syarat yang mengubah hubungan tersebut.

Definisi 3.1 Misal X dan P adalah BCK/BCI-aljabar, dengan $P \subseteq X$. Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ disebut sebagai subaljabar fuzzy pada P dengan derajat λ, dengan $\lambda \in [0,1]$, jika dan hanya jika $\forall x, y \in P$,

$$\mu_{\tilde{A}}(x * y) \geq \lambda \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$$

(Jun et al., 2017)

Jelas, setiap subaljabar fuzzy adalah subaljabar fuzzy dengan derajat $\lambda \in (0,1]$, karena $0 < \lambda\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{A}}(x)$ atau dengan kata lain subaljabar fuzzy adalah subaljabar fuzzy dengan derajat $\lambda = 1$. Akan tetapi konversnya ada kemungkinan tidak benar seperti yang terlihat dalam contoh A berikut.

Contoh A. Diberikan himpunan BCK-aljabar X dimana $X = \{0, a, b, c, d\}$ dengan tabel cayley seperti pada gambar 1 berikut.

$*$	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	0
b	b	b	0	b	0
c	c	c	c	0	c
d	d	d	d	d	0

Gambar 1. Tabel Cayley

Misal himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada X, didefinisikan dengan:

$$\tilde{A} = \{(0,0.4), (a, 0.7), (b, 0.5), (c, 0.6), (d, 0.3)\}$$

Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ merupakan subaljabar fuzzy pada X dengan derajat $\frac{4}{7}$, akan tetapi $\tilde{A}$ bukan subaljabar fuzzy pada X karena ada $a, c \in X$ sedemikian sehingga,

$$\mu_{\tilde{A}}(a * c) = \mu_{\tilde{A}}(0) = 0.4 < 0.6 = \min\{\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{A}}(c)\}$$

Selain itu, $\tilde{A}$ juga bukan subaljabar fuzzy dari X dengan derajat $\frac{2}{3}$ karena ada $a, a \in X$ sedemikian sehingga,

$$\mu_{\tilde{A}}(a * a) = \mu_{\tilde{A}}(0) = 0.4 < \frac{2}{3}\min\{\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{A}}(a)\} = \frac{2}{3} \times 0.7 = 0.47$$

Dengan demikian setiap subaljabar fuzzy dengan derajat $\lambda \in (0,1]$ belum tentu merupakan subaljabar fuzzy.

Definisi 3.2. Misal X dan P adalah BCK/BCI-aljabar, dengan $P \subseteq X$. Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ disebut sebagai subaljabar fuzzy pada P jika dan hanya jika,

$$(\forall t \in [0,1])\ (U(\tilde{A}\,;\, t) \in S(P) \cup \emptyset)$$

(Jun, 2009)

Tetapi, jika $\tilde{A}$ adalah subaljabar fuzzy dari BCK/BCI-aljabar P dengan derajat $\lambda \in (0,1]$. Sehingga,

$$U(\tilde{A}; t) \notin S(P) \cup \emptyset, \forall t \in [0,1]$$

Seperti ditunjukkan oleh contoh B berikut.

Contoh B. Perhatikan himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada contoh A dengan $t \in (0.4, 0.5]$, karena, $\mu_{\tilde{A}}(a) \geq t$, $\mu_{\tilde{A}}(b) \geq t$ dan $\mu_{\tilde{A}}(c) \geq t$ sedangkan $\mu_{\tilde{A}}(0) < t$, $\mu_{\tilde{A}}(d) < t$ berdasarkan definisi 2.1 $U(\tilde{A}; t) = \{a, b, c\}$.

Dimana $U(\tilde{A}; t) = \{a, b, c\} \notin S(P) \cup \emptyset$ karena ada $a, b \in U(\tilde{A}; t)$ sedemikian sehingga

$$\mu_{\tilde{A}}(a * b) = \mu_{\tilde{A}}(0) = 0.4 < 0.5 = \min\{\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$$

Definisi 3.3. Diberikan S_1 himpunan bagian tak kosong dari BCK/BCI-aljabar X dimana S_1 tidak selalu subaljabar dari X. Misal S_2 himpunan bagian X, S_2 disebut subaljabar diperbesar pada X berkaitan dengan S_1 jika dan hanya jika:

1. S_1 himpunan bagian dari S_2
2. $\forall x, y \in S_1$, sedemikian sehingga $x * y \in S_2$

(Jun et al., 2017)

Contoh C. Diberikan himpunan $L = \{0, a, b, c, 1\}$ dimana himpunan L BCK/BCI-aljabar dengan tabel cayley berikut.

$*$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	a	0	0	0
c	c	a	a	0	0
1	1	c	c	a	0

Gambar 2. Tabel cayley

Berdasarkan definisi 2.5 $\{0, c, 1\}$ bukan subaljabar dari L karena ada $1, c \in \{0, c, 1\}$ tetapi

$$1 * c = a \notin \{0, c, 1\}.$$

berdasarkan definisi 2.5, $\{0, a, c, 1\}$ adalah subaljabar dari L yang memuat $\{0, c, 1\}$. Jadi berdasarkan definisi 3.3, $\{0, a, c, 1\}$ adalah subaljabar dari L yang diperbesar terkait dengan $\{0, c, 1\}$.

Teorema 3.4. Diberikan $t \in [0,1]$ sedemikian hingga $U(\tilde{A}; t)$ bukan subaljabar pada X. Jika himpunan fuzzy $\tilde{A}$ adalah subaljabar fuzzy pada BCK/BCI aljabar X dengan derajat $\lambda \in (0,1]$, maka $U(\tilde{A}; \lambda t)$ adalah subaljabar pada X diperbesar terkait dengan $U(\tilde{A}; t)$.

(Jun et al., 2017)

Bukti. Berdasarkan hipotesa $\lambda \in (0,1]$ sehingga $0 < \lambda \leq \lambda t$. Dengan menggunakan definisi 2.1 $U(\tilde{A}; t) \subseteq U(\tilde{A}; \lambda t)$ sehingga untuk setiap $t \in [0,1]$. Berdasarkan hipotesa $U(\tilde{A}; t)$ bukan subaljabar pada X. Misal $x, y \in U(\tilde{A}; t)$. Dengan demikian definisi 3.3 (1) terpenuhi.

Berdasarkan definisi 2.1 $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq t$ dan $\mu_{\tilde{A}}(y) \geq t$. Karena $\tilde{A}$ subaljabar fuzzy pada BCK/BCI aljabar X dengan derajat $\lambda \in (0,1]$, dengan demikian

$$\mu_{\tilde{A}}(x * y) \geq \lambda \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\} \geq \lambda t$$

sehingga $\mu_{\tilde{A}}(x * y) \geq \lambda t$ berdasarkan definisi 2.1 diperoleh $x * y \in U(\tilde{A}; \lambda t)$. Dengan demikian definisi 3.3 (2) terpenuhi.

Karena definisi 3.3 terpenuhi maka, $U(\tilde{A}; \lambda t)$ adalah subaljabar pada X diperbesar terkait dengan $U(\tilde{A}; t)$ ■

Teorema 3.5. Diberikan himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada BCK/BCI-aljabar X. Untuk setiap $t \in [0,1]$ dengan $t \leq \lambda$, jika $U(\tilde{A}; t)$ subaljabar diperbesar pada X terkait dengan $U\left(\tilde{A}; \frac{1}{\lambda} t\right)$, maka $\tilde{A}$ adalah subaljabar fuzzy dari X dengan derajat λ.

(Jun et al., 2017)

Bukti. Akan dibuktikan bahwa $\tilde{A}$ adalah subaljabar fuzzy dari X dengan derajat λ.

Andaikan $\tilde{A}$ bukan subaljabar fuzzy pada X dengan derajat λ. Selanjutnya, ada $a, b \in X$ sedemikian sehingga

$$\mu_{\tilde{A}}(a * b) < \lambda \min\{\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{A}}(b)\}.$$

Berdasarkan hipotesa $t \leq \lambda$, sehingga diperoleh

$$\mu_{\tilde{A}}(a * b) < t \leq \lambda \min\{\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{A}}(b)\}$$

untuk setiap $t \in (0, \lambda]$, dimana dapat diperoleh $\min\{\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{A}}(b)\} \geq \frac{1}{\lambda} t$.

Berdasarkan definisi 2.1 diperoleh $a, b \in U\left(\tilde{A}; \frac{1}{\lambda} t\right)$.

Sehingga, $a * b \in U(\tilde{A}; t)$, dimana, $\mu_{\tilde{A}}(a * b) \geq t$, sehingga terjadi kontradiksi dengan pengandaian. Jadi benar bahwa,

$$\mu_{\tilde{A}}(x * y) \geq \lambda \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$$

untuk setiap $x, y \in X$. Konsekuensinya $\tilde{A}$ subaljabar fuzzy pada X dengan derajat λ. ■

Lemma 3.6. Diberikan X adalah BCK/BCI-aljabar. Untuk setiap subaljabar fuzzy $\tilde{A}$ pada X dengan derajat λ memenuhi ketaksamaan,

$$\mu_{\tilde{A}}(0) \geq \lambda \mu_{\tilde{A}}(x).$$

untuk setiap $x \in X$.

(Jun et al., 2017)

Bukti. Berdasarkan hipotesa $\tilde{A}$ adalah subaljabar fuzzy pada BCK/BCI-aljabar X dengan derajat λ, dan menurut definisi 2.2 (3) $x * x = 0$ untuk setiap $x \in X$, dengan demikian

$$\mu_{\tilde{A}}(0) = \mu_{\tilde{A}}(x * x) \geq \lambda \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x)\} = \lambda \mu_{\tilde{A}}(x)$$

untuk setiap $x \in X$. ■

Lemma 3.7. Jika $\tilde{A}$ adalah subaljabar fuzzy dari BCK/BCI-aljabar X, maka

$$\mu_{\tilde{A}}(0) \geq \mu_{\tilde{A}}(x)$$

untuk setiap $x \in X$

(Jun et al., 2017)

Bukti. Berdasarkan hipotesa $\tilde{A}$ adalah subaljabar fuzzy pada BCK/BCI-aljabar X, dan menurut definisi 2.2(3) $x * x = 0$ untuk setiap $x \in X$, dengan demikian

$$\mu_{\tilde{A}}(0) = \mu_{\tilde{A}}(x * x) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x)\} = \mu_{\tilde{A}}(x)$$

untuk setiap $x \in X$. ■

Proposisi 3.8. Diberikan $\tilde{A}$ subaljabar fuzzy pada BCK-aljabar X dengan derajat λ. Misal $y \in X$,

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$ dimana ada $k \in \{1,2,\dots,n\}$ sedemikian hingga $x_k = y$, berlaku

$$\mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left((y * x_1) * x_2\right) * \cdots\right) * x_n\right) \geq \lambda\mu_{\tilde{A}}(x)$$

untuk setiap $x \in X$.

(Jun et al., 2017)

Bukti. Dengan menggunakan definisi 2.2 (3 dan 5) dan teorema 2.3 (3), beserta lemma 3.6.
Berdasarkan hipotesa $\tilde{A}$ subaljabar fuzzy pada BCK-aljabar X dengan derajat λ. Misal $y \in X$, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$.
Kasus 1. Jika $k = n$ sehingga $x_n = x_k = y$, maka

$\mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((x_n * x_1) * x_2\right) * \cdots\right) * x_{n-1}\right) * x_n\right)$
$= \mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((x_n * x_1) * x_2\right) * \cdots\right) * x_n\right) * x_{n-1}\right)$
$= \mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((x_n * x_1) * x_n\right) * \cdots\right) * x_{n-2}\right) * x_{n-1}\right)$
$= \mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((x_n * x_n) * x_1\right) * \cdots\right) * x_{n-2}\right) * x_{n-1}\right)$
$= \mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((0) * x_1\right) * \cdots\right) * x_{n-2}\right) * x_{n-1}\right)$
$= \mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((0)\right) * \cdots\right) * x_{n-2}\right) * x_{n-1}\right)$
$= \mu_{\tilde{A}}(0 * x_{n-1})$
$= \mu_{\tilde{A}}(0)$
$\geq \lambda\mu_{\tilde{A}}(x)$

Kasus 2. Jika $k = 1$ sehingga $x_1 = x_k = y$, maka

$\mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((x_1 * x_1) * x_2\right) * \cdots\right) * x_{n-1}\right) * x_n\right)$
$= \mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((0) * x_2\right) * \cdots\right) * x_{n-1}\right) * x_n\right)$
$= \mu_{\tilde{A}}(0 * x_n)$
$= \mu_{\tilde{A}}(0)$
$\geq \lambda\mu_{\tilde{A}}(x)$

Kasus 3. Jika $1 < k < n$ sehingga $x_k = x_k = y$, maka

$\mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((x_k * x_1) * x_2\right) * \cdots\right) * x_{n-1}\right) * x_n\right)$
$= \mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((x_k * x_2) * x_1\right) * \cdots\right) * x_{n-1}\right) * x_n\right)$

Karena $1 < k < n$ sehingga $x_2 = x_k = y$

$= \mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((x_k * x_k) * x_1\right) * \cdots\right) * x_{n-1}\right) * x_n\right)$
$= \mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((0) * x_1\right) * \cdots\right) * x_{n-1}\right) * x_n\right)$
$= \mu_{\tilde{A}}(0 * x_n)$
$= \mu_{\tilde{A}}(0)$
$\geq \lambda\mu_{\tilde{A}}(x)$

Karena disetiap kasus terpenuhi untuk $x_k = y$, dengan $k \in \{1,2,\dots,n\}$ sehingga,
$\mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left((y * x_1) * x_2\right) * \cdots\right) * x_n\right) \geq \lambda\mu_{\tilde{A}}(x)$. ■

Proposisi 3.9. Diberikan $\tilde{A}$ subaljabar fuzzy pada BCK-aljabar X. Misal $y \in X$, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$ dimana ada $k \in \{1,2,\dots,n\}$ sedemikian hingga $x_k = y$, berlaku

$$\mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left((y * x_1) * x_2\right) * \cdots\right) * x_n\right) \geq \mu_{\tilde{A}}(x)$$

untuk setiap $x \in X$.

(Jun et al., 2017)

Bukti. Dengan menggunakan definisi 2.2 (3 dan 5) dan teorema 2.3 (3), beserta lemma 3.6. Berdasarkan hipotesa $\tilde{A}$ subaljabar fuzzy pada BCK-aljabar X. Misal $y \in X$, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$.

Kasus 1. Jika $k = n$ sehingga $x_n = x_k = y$, maka

$\mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((x_n * x_1) * x_2\right) * \cdots\right) * x_{n-1}\right) * x_n\right)$
$= \mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((x_n * x_1) * x_2\right) * \cdots\right) * x_n\right) * x_{n-1}\right)$
$= \mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((x_n * x_1) * x_n\right) * \cdots\right) * x_{n-2}\right) * x_{n-1}\right)$
$= \mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((x_n * x_n) * x_1\right) * \cdots\right) * x_{n-2}\right) * x_{n-1}\right)$
$= \mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((0) * x_1\right) * \cdots\right) * x_{n-2}\right) * x_{n-1}\right)$
$= \mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((0)\right) * \cdots\right) * x_{n-2}\right) * x_{n-1}\right)$
$= \mu_{\tilde{A}}(0 * x_{n-1})$
$= \mu_{\tilde{A}}(0)$
$\geq \mu_{\tilde{A}}(x)$

Kasus 2. Jika $k = 1$ sehingga $x_1 = x_k = y$, maka

$\mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((x_1 * x_1) * x_2\right) * \cdots\right) * x_{n-1}\right) * x_n\right)$
$= \mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((0) * x_2\right) * \cdots\right) * x_{n-1}\right) * x_n\right)$
$= \mu_{\tilde{A}}(0 * x_n)$
$= \mu_{\tilde{A}}(0)$

$\geq \mu_{\tilde{A}}(x)$

Kasus 3. Jika $1 < k < n$ sehingga $x_k = x_k = y$, maka

$\mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((x_k * x_1) * x_2\right) * \cdots\right) * x_{n-1}\right) * x_n\right)$

$= \mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((x_k * x_2) * x_1\right) * \cdots\right) * x_{n-1}\right) * x_n\right)$

Karena $1 < k < n$ sehingga $x_2 = x_k = y$

$= \mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((x_k * x_k) * x_1\right) * \cdots\right) * x_{n-1}\right) * x_n\right)$

$= \mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left(\left((0) * x_1\right) * \cdots\right) * x_{n-1}\right) * x_n\right)$

$= \mu_{\tilde{A}}(0 * x_n)$
$= \mu_{\tilde{A}}(0)$
$\geq \mu_{\tilde{A}}(x)$

Karena disetiap kasus terpenuhi untuk $x_k = y$, dengan $k \in \{1,2, \dots, n\}$ sehingga,

$\mu_{\tilde{A}}\left(\left(\left((y * x_1) * x_2\right) * \cdots\right) * x_n\right) \geq \mu_{\tilde{A}}(x)$. ■

Proposisi 3.10. Jika $\tilde{A}$ subaljabar fuzzy pada BCI-aljabar X dengan derajat λ, maka

$$\mu_{\tilde{A}}(0 * x) \geq \lambda^2 \mu_{\tilde{A}}(x)$$

untuk setiap $x \in X$.

(Jun et al., 2017)

Bukti. Dengan menggunakan definisi subaljabar fuzzy dengan derajat λ, dan menggunakan definisi 2.2 (3), untuk setiap $x \in X$, sehingga

$\mu_{\tilde{A}}(0 * x)$
$\geq \lambda \min\{\mu_{\tilde{A}}(0), \mu_{\tilde{A}}(x)\}$
$= \lambda \min\{\mu_{\tilde{A}}(x * x), \mu_{\tilde{A}}(x)\}$
$\geq \lambda \min\{\lambda \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x)\}, \mu_{\tilde{A}}(x)\}$
$= \lambda^2 \mu_{\tilde{A}}(x)$. ■

Proposisi 3.11. Jika $\tilde{A}$ subaljabar fuzzy pada BCI-aljabar X, maka

$$\mu_{\tilde{A}}(0 * x) \geq \lambda^2 \mu_{\tilde{A}}(x)$$

untuk setiap $x \in X$.

(Jun et al., 2017)

Bukti. Dengan menggunakan definisi subaljabar fuzzy, dan menggunakan definisi 2.2 (3), untuk setiap $x \in X$, sehingga,

$\mu_{\tilde{A}}(0 * x)$
$\geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(0), \mu_{\tilde{A}}(x)\}$
$= \min\{\mu_{\tilde{A}}(x * x), \mu_{\tilde{A}}(x)\}$
$\geq \min\{\min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x)\}, \mu_{\tilde{A}}(x)\}$
$= \mu_{\tilde{A}}(x)$. ■

Definisi 3.12 Misal X dan P adalah BCK/BCI-aljabar, dengan $P \subseteq X$. Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ disebut ideal fuzzy pada P dengan derajat (λ, κ) dengan $\lambda \in (0, 1]$ dan $\kappa \in (0, 1]$ jika dan hanya jika, $\forall x \in P$,

1. $\mu_{\tilde{A}}(0) \geq \lambda \mu_{\tilde{A}}(x)$, dan
2. $\forall x, y \in P, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \kappa \min\{\mu_{\tilde{A}}(x * y), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$.

(Y. L. Liu & Meng, 2001)

Contoh D. Diberikan himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada contoh A karena $\tilde{A}$ memenuhi, $\forall x \in X$, $\mu_{\tilde{A}}(0) \geq \lambda \mu_{\tilde{A}}(x)$, dan $\forall x, y \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \kappa\, min\{\mu_{\tilde{A}}(x * y), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$.
Jadi, berdasarkan definisi 3.15 himpunan fuzzy $\tilde{A}$ ideal fuzzy pada X dengan derajat $\left(\frac{4}{7}, \frac{4}{7}\right)$. Tetapi $\tilde{A}$ bukan ideal fuzzy pada X dengan derajat $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ karena ada $0, a \in X$, tetapi $\mu_{\tilde{A}}(0) = 0.4 < \frac{2}{3} \times 0.7 = \frac{2}{3} \mu_{\tilde{A}}(a)$.

Definisi 3.13. Diberikan himpunan I tak kosong subset dari BCK/BCI-aljabar X dimana I tidak selalu ideal dari X. J subset X, J disebut ideal diperbesar pada X terkait dengan I, jika dan hanya jika:

1. I *subset* J,
2. $0 \in J$, *dan*
3. $\forall x \in X, \forall y \in I, x * y \in I \Rightarrow x \in J$

(Al-masarwah & Ahmad, 2019)

Contoh E. Diberikan $X = \{0,1, a, b, c\}$ BCI-aljabar dengan tabel cayley pada gambar 3 berikut.

$*$	0	1	a	b	c
0	0	0	a	b	c
1	1	0	a	b	c
a	a	a	0	c	b
b	b	b	c	0	a
c	c	c	b	a	0

Gambar 3. Tabel cayley

Perhatikan bahwa $\{0, a\}$ bukan ideal pada X, karena tidak memenuhi kondisi ke dua dari definisi 2.6 yaitu ada $1 \in X$ dan $a \in \{0, a\}, 1 * a \in \{0, a\} \Rightarrow 1 \notin \{0, a\}$.
Berdasarkan definisi 3.13 $\{0,1, a\}$ adalah ideal diperbesar pada X terkait dengan $\{0, a\}$.

Proposisi 3.14. Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ merupakan ideal fuzzy pada BCK-aljabar X dengan derajat (λ, κ) jika memenuhi,

1. $\mu_{\tilde{A}}(x * y) \geq \lambda\kappa\mu_{\tilde{A}}(x), dan$
2. $x \leq y \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \lambda\kappa\mu_{\tilde{A}}(y)$.

untuk setiap $x, y \in X$.

(Jun et al., 2017)

Bukti.

1. Dengan menggunakan definisi 3.12, 2.2 (3 dan 5) dan teorema 2.3 (3).
$\mu_{\tilde{A}}(x * y) \geq \kappa \min\{ \mu_{\tilde{A}}((x * y) * x), \mu_{\tilde{A}}(x)\}$
$= \kappa \min\{ \mu_{\tilde{A}}((x * x) * y), \mu_{\tilde{A}}(x)\}$
$= \kappa \min\{ \mu_{\tilde{A}}(0 * y), \mu_{\tilde{A}}(x)\}$
$= \kappa \min\{ \mu_{\tilde{A}}(0), \mu_{\tilde{A}}(x)\}$
$\geq \kappa \min\{ \lambda\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x)\}$
$= \lambda\kappa\mu_{\tilde{A}}(x)$
untuk setiap $x, y \in X$.
2. Misal $x, y \in X$ dengan $x \leq y$, berdasarkan definisi 2.4 $x * y = 0$, sehingga
$\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \kappa \min\{ \mu_{\tilde{A}}(x * y), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$
$= \kappa \min\{ \mu_{\tilde{A}}(0), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$
$\geq \kappa \min\{ \lambda\mu_{\tilde{A}}(y), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$
$= \lambda\kappa\mu_{\tilde{A}}(y)$.

dengan ini bukti lengkap. ■

Proposisi 3.15. Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ merupakan ideal fuzzy pada BCK-aljabar X dengan derajat (λ, κ).
Jika $\lambda = \kappa$, maka

1. $\mu_{\tilde{A}}(x * y) \geq \lambda^2\mu_{\tilde{A}}(x)$, dan
2. $x \leq y \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \lambda^2\mu_{\tilde{A}}(y)$.

untuk setiap $x, y \in X$.

(Jun et al., 2017)

Bukti.

1. Dengan menggunakan definisi 3.12, 2.2 (3 dan 5) dan teorema 2.3 (3). Dengan mensubtitusi $\lambda = \kappa$,
$\mu_{\tilde{A}}(x * y) \geq \lambda \min\{ \mu_{\tilde{A}}((x * y) * x), \mu_{\tilde{A}}(x)\}$
$= \lambda \min\{ \mu_{\tilde{A}}((x * x) * y), \mu_{\tilde{A}}(x)\}$
$= \lambda \min\{ \mu_{\tilde{A}}(0 * y), \mu_{\tilde{A}}(x)\}$
$= \lambda \min\{ \mu_{\tilde{A}}(0), \mu_{\tilde{A}}(x)\}$
$\geq \lambda \min\{ \lambda\, \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x)\}$
$= \lambda^2\mu_{\tilde{A}}(x)$
untuk setiap $x, y \in X$.
2. Misal $x, y \in X$ dengan $x \leq y$, berdasarkan definisi 2.4 $x * y = 0$, sehingga
$\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \lambda \min\{ \mu_{\tilde{A}}(x * y), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$
$= \lambda \min\{ \mu_{\tilde{A}}(0), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$
$\geq \lambda \min\{ \lambda\mu_{\tilde{A}}(y), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$
$= \lambda^2\kappa\mu_{\tilde{A}}(y)$.

dengan ini bukti lengkap. ■

Definisi 3.16. Diberikan himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada BCK/BCI-aljabar P subset BCK/BCI-aljabar X. Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ disebut ideal fuzzy pada P jika,

$$(\forall t \in [0,1]), \left(U(\tilde{A}; t) \in \mathcal{I}(P) \cup \emptyset\right).$$

(Jun & Roh, 1994)

Teorema 3.17. Diberikan himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada BCK/BCI-aljabar X. Untuk setiap $t \in [0,1]$ dengan $t \leq \max\{\lambda, \kappa\}$, jika $U(\tilde{A}; t)$ ideal yang diperbesar pada X berkaitan dengan $U\left(\tilde{A}; \frac{t}{\max\{\lambda,\kappa\}}\right)$, maka $\tilde{A}$ ideal fuzzy pada X dengan derajat (λ, κ).

(Jun et al., 2017)

Bukti. Andaikan $\tilde{A}$ bukan ideal fuzzy pada X dengan derajat (λ, κ). sehingga, $\mu_{\tilde{A}}(0) < t \leq \lambda\mu_{\tilde{A}}(x)$ untuk setiap $x \in X$ dan $t \in (0, \lambda]$, sehingga $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \frac{t}{\lambda} \geq \frac{t}{\max\{\lambda,\kappa\}}$, jadi $x \in U\left(\tilde{A}; \frac{t}{\max\{\lambda,\kappa\}}\right)$, sedemikian sehingga, $U\left(\tilde{A}; \frac{t}{\max\{\lambda,\kappa\}}\right) \neq \emptyset$. Karena $U(\tilde{A}; t)$ ideal diperbesar pada X terkait dengan $U\left(\tilde{A}; \frac{t}{\max\{\lambda,\kappa\}}\right)$, berdasarkan definisi 3.13 (1) $0 \in U(\tilde{A}; t)$, dengan demikian berdasarkan definisi 2.1, $\mu_{\tilde{A}}(0) \geq t$. sehingga terjadi kontradiksi dengan pengandaian, jadi $\mu_{\tilde{A}}(0) \geq \lambda\mu_{\tilde{A}}(x)$
untuk setiap $x \in X$. Selanjutnya ada $a, b \in X$ sedemikian sehingga

$$\mu_{\tilde{A}}(a) < t \leq \kappa \min\{ \mu_{\tilde{A}}(a * b), \mu_{\tilde{A}}(b)\}$$

, dengan $t \in (0, \kappa] \subseteq (0, \max\{\lambda, \kappa\}], a * b \in U\left(\tilde{A}; \frac{t}{\kappa}\right) \subseteq U\left(\tilde{A}; \frac{t}{\max\{\lambda,\kappa\}}\right)$ dan $b \in U\left(\tilde{A}; \frac{t}{\kappa}\right) \subseteq U\left(\tilde{A}; \frac{t}{\max\{\lambda,\kappa\}}\right)$. berdasarkan definisi 3.13(3) $a \in U(\tilde{A}; t)$ sehingga $\mu_{\tilde{A}}(a) \geq t$, kontradiksi dengan pengandaian. Sehingga benar bahwa,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \kappa \min\{ \mu_{\tilde{A}}(x * y), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$$

untuk setiap $x, y \in X$. Dengan demikian, $\tilde{A}$ ideal fuzzy pada X dengan derajat (λ, κ). ■

Teorema 3.18. Diberikan himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada BCK/BCI-aljabar X dengan $t \in [0,1]$ sedemikian sehingga $U(\tilde{A};t) \neq \emptyset$ tidak selalu ideal dari X. Jika $\tilde{A}$ adalah ideal fuzzy dari X dengan derajat (λ, κ), maka $U(\tilde{A}; t \min\{\lambda, \kappa\})$ adalah ideal diperbesar pada X berkaitan dengan $U(\tilde{A};t)$

(Jun et al., 2017)

Bukti. Karena $t \min\{\lambda, \kappa\} \leq t$, sehingga $U(\tilde{A};t) \subseteq U(\tilde{A}; t \min\{\lambda, \kappa\})$. Berdasarkan hipotesa $U(\tilde{A};t) \neq \emptyset$, berarti ada $x \in U(\tilde{A};t)$ dan berdasarkan definisi 2.1 $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq t$. Dengan menggunakan definisi 3.12(1), diperoleh $\mu_{\tilde{A}}(0) \geq \lambda\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \lambda t \geq t \min\{\lambda, \kappa\}$, dimana implikasinya $0 \in U(\tilde{A}; t \min\{\lambda, \kappa\})$. Misal $x, y \in X$ sedemikian sehingga $x * y \in U(\tilde{A};t)$ dan $y \in U(\tilde{A};t)$. Maka $\mu_{\tilde{A}}(x * y) \geq t$ dan $\mu_{\tilde{A}}(y) \geq t$. Dengan menggunakan definisi 3.12(2), diperoleh

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \kappa \min\{\mu_{\tilde{A}}(x * y), \mu_{\tilde{A}}(y)\} \geq \kappa t \geq t \min\{\lambda, \kappa\}$$

jadi $x \in U(\tilde{A}; t \min\{\lambda, \kappa\})$. Sedemikian sehingga, $U(\tilde{A}; t \min\{\lambda, \kappa\})$ ideal diperbesar pada X terkait dengan $U(\tilde{A};t)$. ■

Teorema 3.19. Diberikan himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada BCK/BCI-aljabar X dengan derajat (λ, κ). Jika ketaksamaan $x * y \leq z$ pada X terpenuhi, maka

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \min\{\kappa\mu_{\tilde{A}}(y), \lambda\kappa^2\mu_{\tilde{A}}(z)\}$$

Untuk setiap $x, y, z \in X$.

(Jun et al., 2017)

Bukti. Berdasarkan hipotesa $\tilde{A}$ merupakan himpunan fuzzy pada BCK/BCI-aljabar X dengan derajat (λ, κ). Selain itu, berdasarkan definisi 2.4 terkait urutan parsial $x * y \leq z$ untuk setiap $x, y, z \in X$, maka $(x * y) * z = 0$, sehingga

$\mu_{\tilde{A}}(x * y)$
$\geq \kappa \min\{\mu_{\tilde{A}}((x * y) * z), \mu_{\tilde{A}}(z)\}$
$= \kappa \min\{\mu_{\tilde{A}}(0), \mu_{\tilde{A}}(z)\}$
$\geq \kappa \min\{\lambda\mu_{\tilde{A}}(z), \mu_{\tilde{A}}(z)\}$
$= \lambda\kappa\mu_{\tilde{A}}(z)$.
dengan demikian
$\mu_{\tilde{A}}(x)$
$\geq \kappa \min\{\mu_{\tilde{A}}(x * y), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$
$\geq \kappa \min\{\lambda\kappa\mu_{\tilde{A}}(z), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$
$= \min\{\kappa\mu_{\tilde{A}}(y), \lambda\kappa^2\mu_{\tilde{A}}(z)\}$
untuk setiap $x, y, z \in X$. ■

Teorema 3.20. Diberikan himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada BCK/BCI-aljabar X dengan derajat (λ, κ). Jika $\lambda = \kappa$ ketaksamaan $x * y \leq z$ pada X terpenuhi, maka

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \min\{\lambda\mu_{\tilde{A}}(y), \lambda^3\mu_{\tilde{A}}(z)\}$$

Untuk setiap $x, y, z \in X$.

(Jun et al., 2017)

Bukti. Berdasarkan hipotesa $\tilde{A}$ merupakan himpunan fuzzy pada BCK/BCI-aljabar X dengan derajat (λ, κ), dengan $\lambda = \kappa$. Selain itu, berdasarkan definisi 2.4 terkait urutan parsial $x * y \leq z$ untuk setiap $x, y, z \in X$, maka $(x * y) * z = 0$, sehingga

$\mu_{\tilde{A}}(x * y)$
$\geq \lambda \min\{\mu_{\tilde{A}}((x * y) * z), \mu_{\tilde{A}}(z)\}$
$= \lambda \min\{\mu_{\tilde{A}}(0), \mu_{\tilde{A}}(z)\}$
$\geq \lambda \min\{\lambda\mu_{\tilde{A}}(z), \mu_{\tilde{A}}(z)\}$
$= \lambda^2\mu_{\tilde{A}}(z)$
dengan demikian
$\mu_{\tilde{A}}(x)$
$\geq \lambda \min\{\mu_{\tilde{A}}(x * y), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$
$\geq \lambda \min\{\lambda^2\mu_{\tilde{A}}(z), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$
$= \min\{\lambda\mu_{\tilde{A}}(y), \lambda^3\mu_{\tilde{A}}(z)\}$
untuk setiap $x, y, z \in X$. ■

Teorema 3.21. Diberikan himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada BCK/BCI-aljabar X. Jika ketaksamaan $x * y \leq z$ pada X terpenuhi, maka

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(y), \mu_{\tilde{A}}(z)\}$$

Untuk setiap $x, y, z \in X$.

(Jun et al., 2017)

Bukti. Berdasarkan hipotesa $\tilde{A}$ merupakan himpunan fuzzy pada BCK/BCI-aljabar X. Selain itu, berdasarkan definisi 2.4 terkait urutan parsial $x * y \leq z$ untuk setiap $x, y, z \in X$, maka $(x * y) * z = 0$, sehingga

$\mu_{\tilde{A}}(x * y)$
$\geq \min\{\mu_{\tilde{A}}((x * y) * z), \mu_{\tilde{A}}(z)\}$
$= \min\{\mu_{\tilde{A}}(0), \mu_{\tilde{A}}(z)\}$
$\geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(z), \mu_{\tilde{A}}(z)\}$
$= \mu_{\tilde{A}}(z)$
dengan demikian
$\mu_{\tilde{A}}(x)$
$\geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x * y), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$
$\geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(z), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$

$= \min\{\mu_{\tilde{A}}(y), \mu_{\tilde{A}}(z)\}$
untuk setiap $x, y, z \in X$. ■

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, simpulan yang dapat ditarik adalah untuk setiap subaljabar fuzzy BCK/BCI-aljabar adalah subaljabar fuzzy BCK/BCI-aljabar dengan derajat pada inverval $(0, 1]$. Selain itu, untuk setiap ideal fuzzy BCK/BCI-aljabar adalah ideal fuzzy BCK/BCI-aljabar dengan derajat pada inverval $(0, 1]$.

Selalu ada subaljabar diperbesar pada BCK/BCI-aljabar X terkait dengan S, dimana $S\ subset\ X$. Jika S_1 adalah subaljabar X , maka S_1 adalah subaljabar paling diperbesar pada X terkait dengan S_1 sendiri. Selain itu, untuk setiap ideal diperbesar pada BCK/BCI-aljabar X terkait dengan I , dimana $I\ subset\ X$. Jika I adalah ideal pada X, maka I adalah subaljabar paling besar pada X terkait dengan I sendiri.

SARAN

Pada artikel ini dibahas mengenai sifat-sifat dari subaljabar fuzzy dan ideal fuzzy BCK/BCI-aljabar X dengan derajat pada interval (0,1]. Dengan demikian hanya membahas subaljabar fuzzy dan ideal . Maka dari itu, untuk penelitian selanjutnya disarankan mengkaji terkait homomorfisma fuzzy BCK/BCI-aljabar X dengan derajat pada interval (0,1].

DAFTAR PUSTAKA

Al-masarwah, A., & Ahmad, A. G. (2019). *Journal of King Saud University – Science m -Polar fuzzy ideals of BCK / BCI -algebras* (Vol. 31, pp. 1220–1226).

Andaru, N. L., & Sulaiman, R. (2022). Pemilihan Lembaga Amil Zakat Terbaik Dengan Metode Modified Fuzzy Divergence Measure. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, *10*(1), 94–100. https://doi.org/10.26740/mathunesa.v10n1.p94-100

Jun, Y. B. (2009). Generalizations of (∈, ∈ ∨ q)-fuzzy subalgebras in BCK/BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, *58*(7), 1383–1390. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.07.043

Jun, Y. B., Chajda, I., Kim, H. S., Roh, E. H., Zhan, J., & Iorgulescu, A. (2011). BCK-algebras and related algebraic systems. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *2011*. https://doi.org/10.1155/2011/268683

Jun, Y. B., & Roh, E. H. (1994). Fuzzy commutative ideals of BCK-algebras. *Fuzzy Sets and Systems*, *64*(3), 401–405. https://doi.org/10.1016/0165-0114(94)90163-5

Jun, Y. B., Roh, E. H., & Lee, K. J. (2017). Fuzzy subalgebras and ideals of BCK/BCI-algebras with degrees in the interval (0, 1]. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, *101*(7), 1547–1561. https://doi.org/10.17654/MS101071547

Liu, C. W., & Kang, S. C. (2014). A video-enabled dynamic site planner. *Computing in Civil and Building Engineering - Proceedings of the 2014 International Conference on Computing in Civil and Building Engineering*, *353*, 1562–1569. https://doi.org/10.1061/9780784413616.194

Liu, Y. L., & Meng, J. (2001). Fuzzy ideals in BCI-algebras. *Fuzzy Sets and Systems*, *123*(2), 227–237. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(00)00047-6

Matematika, J. I., & Alifviansyah, K. (2022). *MATH unesa*. *10*(01), 226–238.

Meng, J., & Guo, X. É. (2005). On fuzzy ideals in BCK/BCI-algebras. *Fuzzy Sets and Systems*, *149*(3), 509–525. https://doi.org/10.1016/j.fss.2003.11.014