

**BILANGAN REPRODUKSI DASAR MODEL PENYEBARAN LEPTOSPIROSIS DENGAN ADANYA KESADARAN BERPERILAKU HIDUP BERSIH DAN SEHAT**

**Iva Imana Amalia**

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia

e-mail : [iva.20017@mhs.unesa.ac.id](mailto:iva.20017@mhs.unesa.ac.id)

**Budi Priyo Prawoto**

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia

e-mail : [budiprawoto@unesa.ac.id](mailto:budiprawoto@unesa.ac.id)

**Abstrak**

Leptospirosis merupakan salah satu penyakit zoonosis menular yang disebabkan oleh bakteri *Leptospira*. Penularan penyakit Leptospirosis dapat secara langsung maupun tidak langsung dari hewan ke manusia. Bakteri *Leptospira* biasanya hidup pada organ ginjal dan saluran air kencing reservoir. Penyakit Leptospirosis berhubungan erat dengan kondisi lingkungan. Untuk itu, salah satu upaya yang dapat dilakukan untuk mengurangi terjadinya penyakit Leptospirosis adalah dengan berperilaku hidup bersih dan sehat. Peneliti tertarik membuat penelitian baru dengan menambah kompartemen  $S_b$  (manusia yang berperilaku hidup bersih dan sehat),  $S_h$  (manusia rentan),  $I_h$  (manusia yang terinfeksi),  $R_h$  (manusia yang sembuh),  $S_v$  (vektor rentan), dan  $I_v$  (vektor yang terinfeksi). Didapatkan dua titik kesetimbangan, yakni titik kesetimbangan bebas penyakit  $T_0$  dan titik kesetimbangan endemik  $T_1$ . Titik kesetimbangan bebas penyakit stabil ketika memenuhi syarat kestabilan  $\beta_v < \frac{(\delta_v + \lambda_v)\lambda_v}{\mu_v}$ , sedangkan titik kesetimbangan endemik stabil ketika memenuhi syarat kestabilan  $\beta_v > \frac{(\delta_v + \lambda_v)\lambda_v}{\mu_v}$ . Didapatkan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) yaitu  $R_0 = \frac{\beta_v \mu_v}{\lambda_v(\delta_v + \lambda_v)}$ .

**Kata Kunci:** Leptospirosis, Perilaku Hidup Bersih dan Sehat, Syarat Kestabilan, Bilangan Reproduksi Dasar.

**Abstract**

*Leptospirosis is an infectious zoonotic disease caused by Leptospira bacteria. Leptospirosis can be transmitted directly or indirectly from animals to humans. Leptospira bacteria usually live in the kidneys and urinary tract reservoirs. Leptospirosis disease is closely related to environmental conditions. For this reason, one of the efforts that can be made to reduce the occurrence of Leptospirosis is to behave in a clean and healthy lifestyle. Researchers are interested in creating new research by adding the  $S_b$  compartment (humans who behave in a clean and healthy lifestyle). In the model studied, the SIR model is used with 6 conditions, namely  $S_b$  (humans who behave in a clean and healthy lifestyle),  $S_h$  (humans who are vulnerable),  $I_h$  (humans who infected),  $R_h$  (recovered human),  $S_v$  (susceptible vector), and  $I_v$  (infected vector). Two equilibrium points are obtained, namely the disease-free equilibrium point  $T_0$  and the endemic equilibrium point  $T_1$ . The disease-free equilibrium point is stable when it meets the stability requirements  $\beta_v < \frac{(\delta_v + \lambda_v)\lambda_v}{\mu_v}$ , while the endemic equilibrium point is stable when it meets the stability condition  $\beta_v > \frac{(\delta_v + \lambda_v)\lambda_v}{\mu_v}$ . The basic reproduction number ( $R_0$ ) is obtained, namely  $R_0 = \frac{\beta_v \mu_v}{\lambda_v(\delta_v + \lambda_v)}$ .*

**Keywords:** Leptospirosis, Clean and Healthy Lifestyle, Stability Requirements, Basic Reproduction Number.

**PENDAHULUAN**

Leptospirosis merupakan salah satu penyakit zoonosis menular yang disebabkan oleh bakteri *Leptospira* (Soedarmo et al., 2008). Penularan penyakit Leptospirosis dapat secara langsung maupun tidak langsung dari hewan ke manusia. Bakteri *Leptospira* biasanya hidup pada organ ginjal dan saluran air kencing reservoir (WHO, 2003). Adapun beberapa hewan yang dapat menjadi reservoir penyebab

terjadinya penyakit Leptospirosis adalah tikus, bajing, landak, sapi, babi, dan berbagai hewan lainnya. Namun, pada umumnya tikus merupakan reservoir utama *Leptospira* (Rahim & Yudhastuti, 2018). Bakteri *Leptospira* dapat hidup di air selama berminggu-minggu ataupun didalam tanah yang basah/lembab dengan pH tanah sebesar 6,2-8 selama 43 hari serta hidup dengan suhu 25°C (Soedarmo et al., 2008).

Penyakit Leptospirosis sering terjadi di daerah tropis dan subtropis yang memiliki curah hujan tinggi. Di wilayah tropis, kasus terjadinya penyakit Leptospirosis berkisar antara 10-100 kejadian tiap 100.000 penduduk per tahun. Sedangkan untuk di wilayah subtropis, kasus terjadinya penyakit Leptospirosis berkisar antara 0,1 hingga 1 kejadian tiap 100.000 penduduk per tahun (WHO, 2003). Indonesia merupakan salah satu negara yang beriklim tropis, sehingga termasuk ke dalam negara yang rentan terjadinya penyakit Leptospirosis.

*International Leptospirosis Society* menyatakan bahwa Indonesia merupakan negara dengan kasus Leptospirosis yang cukup tinggi. Angka terjadinya kematian akibat Leptospirosis mencapai 16,7% (WHO, 2004). Angka tersebut menduduki peringkat tiga di dunia setelah negara India dan Uruguay. Perkembangan kasus terjadinya Leptospirosis di Indonesia berkembang secara fluktuatif. Pada tahun 2009 hingga 2016 telah terjadi peningkatan Leptospirosis hingga puncaknya tahun 2016 sebesar 833 kasus. Namun pada tahun 2017, kasus Leptospirosis di Indonesia menurun menjadi 640 kasus. Tiga tahun setelahnya, kasus Leptospirosis di Indonesia terus mengalami peningkatan. Pada tahun 2022 kasus Leptospirosis merupakan kasus tertinggi yang terjadi di Indonesia yaitu sebanyak 1.419 kasus (KEMENKES, 2023).

Penyakit Leptospirosis berhubungan erat dengan kondisi lingkungan. Untuk itu, salah satu upaya yang dapat dilakukan untuk mengurangi terjadinya penyakit Leptospirosis adalah dengan berperilaku hidup bersih dan sehat (PHBS). Dengan demikian dapat terbentuk rumah sehat dengan kriteria antara lain menyediakan air bersih, terlindunginya makanan serta minuman dari pencemaran, mendapatkan sinar matahari yang cukup, pengelolaan limbah serta tinja rumah tangga dengan baik, bebas vektor penyakit dan tikus (Auliya, 2014). Jika kriteria rumah sehat telah terpenuhi, maka resiko untuk rentan terjangkit Leptospirosis semakin kecil.

Seiring berjalannya waktu, telah banyak peneliti yang menganalisis penyebaran penyakit Leptospirosis melalui pemodelan matematika. Penelitian yang dilakukan oleh (Gomez et al., 2022) menggunakan model *SIR* yang hanya membahas penyebaran bakteri pada populasi manusia dengan vektor pembawa bakteri yang mempengaruhi penularan penyakit Leptospirosis di wilayah timur

laut negara Argentina dengan variabel hidroklimatik. Penelitian kedua dilakukan oleh (Bhalraj et al., 2021) juga memodelkan penyakit Leptospirosis dengan model *SIR* membahas penyebaran bakteri pada populasi manusia dengan vektor pembawa bakteri. Vektor pada penelitian ini adalah tikus (*rat*).

Dari penelitian-penelitian yang telah disebutkan, peneliti tertarik membuat penelitian baru dengan mengkombinasi model dari penelitian oleh (Gomez et al., 2022) dan penelitian oleh (Bhalraj et al., 2021). Nantinya dikonstruksi sebuah model dengan menambah kompartemen  $S_b$  (manusia yang berperilaku hidup bersih dan sehat. Manusia yang berperilaku bersih dan sehat masuk ke dalam subpopulasi *Susceptible human* ( $S_h$ ) atau manusia rentan karena dipengaruhi oleh faktor lingkungan yang tidak bersih. Pada model yang diteliti menggunakan model *SIR* dengan 6 kondisi yaitu  $S_b$  (manusia yang berperilaku hidup bersih dan sehat), *Susceptible human* ( $S_h$ ) atau manusia rentan, *Infected human* ( $I_h$ ) atau manusia yang terinfeksi, *Recovered human* ( $R_h$ ) atau manusia yang sembuh, *Susceptible vector* ( $S_v$ ) atau vektor rentan, dan *Infected vector* ( $I_v$ ) atau vektor yang terinfeksi.

## KAJIAN TEORI

### LEPTOSPIROSIS

Pada tahun 1886, Adolf Weil mendeskripsikan bahwa Leptospirosis menjadi suatu jenis penyakit (WHO 2003). Namanya masih melekat menjadi penyakit Weil yang berhubungan dengan penyakit dari infeksi yang ditularkan oleh tikus yang disebabkan oleh *Serovar*. Namun pada tahun 1915 penyebab Leptospirosis dari genus *Leptospira* yakni *Spirochaeta* ditemukan oleh Inada (Soedarmo et al., 2008). *Leptospira* merupakan organisme berbentuk seperti benang spiral yang ujungnya bengkok, dengan panjang sekitar 6-12 mikron dan diameter 0,1 mikron. *Leptospira* berbentuk pilinan yang sangat rapat.

Hewan mamalia yang dapat terinfeksi oleh bakteri *Leptospira* dan mampu untuk menyebarkan penyakit Leptospirosis kepada manusia antara lain seperti landak, anjing, babi, tikus, serta hewan ternak seperti sapi. Transmisi terjadinya perpindahan bakteri *Leptospira* kepada manusia dikarenakan oleh kontak langsung melalui lingkungan (tanah maupun

air yang telah terkontaminasi oleh adanya bakteri (*Leptospira*) atau kontak langsung melalui urin, organ, dan darah dari hewan yang telah terinfeksi.

Terdapat tiga stadium pada gejala klinis Leptospirosis (Nurochman et al., 2018). Stadium pertama berlangsung pada 4-9 hari yang ditandai dengan demam, muntah, bercak merah pada kulit, nyeri otot, *konjungtivitis* dan mata merah. Dilanjutkan untuk stadium kedua berlangsung pada 4-30 hari ditandai dengan penyakit kuning (*ikterus*), jika terjadi demam kembali merupakan tanda meningitis. Stadium ketiga atau *konvolesen phase*, dimana terjadi komplikasi Leptospirosis hingga kematian.

Pemberian antibiotik berguna untuk mengobati penyakit Leptospirosis. Antibiotik yang dapat diberikan pada penderita Leptospirosis kasus yang masih ringan seperti amoksilin, ampisilin, doksisisiklin, atau eritromisin. Sedangkan untuk penderita Leptospirosis kasus yang parah dapat diobati dengan penisilin intravena dengan dosis tinggi (WHO 2003).

**MODEL SIR**

Menurut (Brauer et al., 2008), pada tahun 1927 Kermack dan McKendrick memformulasikan model epidemi yang dikenal sebagai model epidemi *SIR*. Untuk memodelkan epidemi *SIR*, membagi tiga kelas subpopulasi yakni *S*, *I*, dan *R*. *S* menyatakan kelas untuk subpopulasi rentan terhadap penyakit (*Susceptible*), *I* menyatakan kelas untuk subpopulasi yang terinfeksi penyakit (*Infected*), dan *R* menyatakan kelas untuk subpopulasi yang sudah sembuh dan mempunyai kekebalan (*Recovered*). Perumusan model kompartemen merupakan fungsi terdiferensiasi terhadap waktu *t*, maka dituliskan *S(t)*, *I(t)*, dan *R(t)*.

Dari diagram kompartemen diatas didapatkan persamaan diferensial biasa yakni:

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta IS, \\ I'(t) &= \beta IS - \alpha I, \\ R'(t) &= \alpha I. \end{aligned} \tag{1}$$

Pada persamaan diatas,  $\beta$  merupakan parameter yang menunjukkan laju transisi dari kompartemen *susceptible* ke kompartemen *infected*, sedangkan  $\alpha$  merupakan parameter yang menunjukkan laju transisi dari kompartemen *infected* ke kompartemen *recovered*.

Jumlah dari total populasi adalah *N*, maka:

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t). \tag{2}$$

**PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA (PDB)**

Suatu persamaan diferensial dikatakan persamaan diferensial biasa ketika persamaan tersebut hanya mempunyai satu variabel bebas. Bentuk umum persamaan diferensial biasa orde-*n* menurut (Boyce et al., 2017) adalah:

$$F[t, y, y', \dots, y^n] = 0. \tag{3}$$

**PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA LINEAR**

Persamaan (3) dikatakan linear jika *F* adalah fungsi linear dari variabel *y, y', ..., y<sup>n</sup>* (Boyce et al., 2017). Dengan demikian persamaan diferensial biasa linear berorde *n* adalah

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t). \tag{4}$$

**PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA NONLINEAR**

Persamaan Persamaan diferensial biasa nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang tidak linear (Ross, 1984).

Persamaan dikatakan diferensial nonlinear jika memenuhi salah satu sebagai berikut:

1. Memuat variabel tak bebas dan turunannya berpangkat selain satu.
2. Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan turunannya.
3. Terdapat fungsi transedental dari variabel tak bebas dan turunannya.

**SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL**

Sistem persamaan diferensial merupakan sistem yang mengandung *n* persamaan diferensial, dengan  $n \geq 2, n \in Z$  (Sinaga et al., 2021). Secara umum bentuk dari sistem persamaan diferensial :

$$\dot{x}(t) = f(t, x). \tag{5}$$

dengan

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

dengan *t* merupakan variabel bebas dan *x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>, ..., x<sub>n</sub>* adalah variabel terikat.

**TITIK KESETIMBANGAN**

Titik kesetimbangan adalah titik dimana sistem tidak mengalami perubahan sepanjang waktu. Pada persamaan (5) dikatakan otonom jika variabel bebas  $t$  tidak muncul secara eksplisit. Diberikan suatu sistem persamaan diferensial otonom:

$$\dot{x}(t) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

mempunyai penyelesaian untuk

$$f(x) = \mathbf{0}. \tag{8}$$

Pada model penyebaran penyakit, terdapat 2 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik (Perko, 1991).

**LINEARISASI**

Linearisasi adalah proses mengubah persamaan sistem diferensial nonlinear menjadi sistem persamaan diferensial linear.

Linearisasi digunakan untuk melihat perilaku sistem disekitar titik ekuilibrium. Linearisasi dapat dilakukan dengan menerapkan deret *Taylor* untuk menemukan pendekatan solusi di sekitar titik keseimbangan.

Rumus dari linearisasi suatu sistem adalah

$$\dot{u} = J u$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

dimana  $J$  disebut sebagai matriks Jacobian dari fungsi  $F$  dan  $G$  terhadap  $x$  dan  $y$  (Boyce et al., 2017).

**NILAI EIGEN**

Jika  $A$  berupa matriks  $n \times n$  maka vektor tak nol  $x$  pada  $\mathbb{R}^n$  dinamakan vektor eigen dari  $A$  jika  $Ax$  berupa kelipatan skalar dari  $x$ . Atau dapat dituliskan sebagai  $Ax = \lambda x$  untuk suatu skalar  $\lambda$ . Skalar  $\lambda$  disebut sebagai nilai eigen dari  $A$ , dan  $x$  disebut vektor eigen dari  $A$  yang berkaitan dengan  $\lambda$  (Anton & Rorres, 2013).

Untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks  $n \times n$  dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x, \\ Ax &= \lambda Ix, \\ \lambda Ix - Ax &= \mathbf{0}, \\ (\lambda I - A)x &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{10}$$

$\lambda$  merupakan nilai eigen, terdapat  $x$  sebagai solusi tak nol dari persamaan ini, dan  $I$  adalah matriks identitas. Agar  $\lambda$  menjadi nilai eigen, maka harus ada

satu solusi tak nol dari persamaan (10). Untuk menjadi persamaan tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0. \tag{11}$$

**KESTABILAN TITIK KESETIMBANGAN**

Kestabilan titik kesetimbangan berguna untuk menggambarkan perilaku sistem. Untuk menguji kestabilan titik kesetimbangan adalah dengan melihat nilai eigen dari matriks Jacobian yang dihasilkan.

Diberikan nilai eigen ( $\lambda$ ) dengan matriks Jacobian  $J$  dari sistem  $\dot{x} = f(x)$ , maka terdapat 2 kemungkinan:

1. Jika semua nilai eigen dari matriks Jacobian  $J$  bagian real bernilai negatif, maka titik keseimbangan atau titik equilibrium  $\bar{x}$  dari sistem persamaan diferensial bersifat stabil asimtotik.
2. Jika ada nilai eigen dari matriks Jacobian  $J$  terdapat bagian real yang bernilai positif, maka titik keseimbangan atau titik equilibrium  $\bar{x}$  dari sistem persamaan diferensial bersifat tidak stabil.

(Wiggins, 1990).

**BILANGAN REPRODUKSI DASAR ( $R_0$ )**

Bilangan reproduksi dasar menjadi tolak ukur potensi penyebaran penyakit pada suatu populasi. Bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) didefinisikan sebagai jumlah perkiraan infeksi sekunder yang dihasilkan pada suatu kasus indeks subpopulasi yang rentan (Brauer et al., 2008). Bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) juga dapat diartikan sebagai rasio atau perbandingan yang menunjukkan jumlah individu rentan yang menderita penyakit karena disebabkan oleh individu yang terinfeksi penyakit.

Ada dua kondisi yang terjadi pada  $R_0$  :

1. Jika  $R_0 < 1$  artinya bahwa setiap individu yang terinfeksi menghasilkan kurang dari satu individu baru yang terinfeksi, atau dengan kata lain infeksi akan hilang dari populasi (stabil lokal asimtotik)
2. Jika  $R_0 > 1$  artinya bahwa setiap individu yang terinfeksi akan menghasilkan lebih dari satu individu yang baru terinfeksi (tidak stabil)

**NEXT GENERATION MATRIX (NGM)**

*Next Generation Matrix (NGM)* merupakan metode untuk perhitungan bilangan reproduksi dasar atau

$R_0$  (Diekmann et al., 2010). *Next Generation Matrix* (NGM) merujuk kepada matriks yang diterapkan dalam bidang epidemiologi guna memperoleh bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) dalam suatu model penyebaran penyakit menular.

Bilangan reproduksi dasar dihitung dengan linearisasi sistem persamaan diferensial yang didekati titik kesetimbangan bebas penyakit. Kompartemen terinfeksi yang sudah terlinearisasi dituliskan dalam bentuk :

$$\frac{dx}{dt} = (F - V)x \quad (12)$$

dimana  $F$  dan  $V$  merupakan matriks  $n \times n$ .

$$F = \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0, y_0), V = \frac{\partial V_i}{\partial y_j}(0, y_0), \quad (13)$$

Kemudian mendefinisikan matriks  $K$  atau matriks *next generation* sebagai berikut:

$$K = FV^{-1}. \quad (14)$$

Sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$R_0 = \rho(K) = \rho(FV^{-1}). \quad (15)$$

Dimana  $\rho(K)$  pada persamaan (15) merupakan radius spektral matriks  $K$  atau nilai eigen dominan.

(Brauer et al., 2008).

## METODE

### JENIS DAN SUMBER DATA

Penelitian yang dilakukan menggunakan data sekunder yang berasal dari artikel penelitian (Gomez et al., 2022) dan penelitian oleh (Bhalraj et al., 2021). Dengan menambah parameter baru serta asumsi baru yang tidak terdapat pada kedua penelitian tersebut, sehingga hasil dari simulasi penelitian ini pun akan berbeda.

### TEKNIK PENGUMPULAN DATA

Dilakukan dengan mengumpulkan berbagai macam informasi yang berkaitan dengan model penyebaran penyakit Leptospirosis yang bersumber dari jurnal, artikel, buku, maupun situs web.

### TAHAPAN PENELITIAN

Adapun tahapan penelitian yang dilakukan, antara lain: (1) Studi literatur; (2) Membuat asumsi dan batasan masalah pada model; (3) Membuat diagram kompartemen dan konstruksi model; (4) Menentukan titik kesetimbangan; (5) Menganalisis kestabilan; (6) Menentukan bilangan reproduksi

dasar ( $R_0$ ); (7) Melakukan simulasi; (8) Menarik kesimpulan.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### KONSTRUKSI MODEL

Berikut adalah beberapa asumsi penyebaran penyakit Leptospirosis dengan adanya kesadaran perilaku hidup bersih dan sehat: (1) Pada penelitian ini penyebaran penyakit terbatas pada manusia dan vektor. Vektor yang dimaksud adalah tikus; (2) Hanya vektor yang dapat menginfeksi manusia, manusia tidak dapat menginfeksi vektor; (3) Tidak dapat terjadi penularan Leptospirosis antar manusia; (4) Vektor yang terinfeksi Leptospirosis tidak dapat sembuh; (5) Manusia yang berperilaku hidup bersih dan sehat masuk ke dalam subpopulasi manusia bersih dan sehat ( $S_b$ ); (6) Manusia yang berperilaku hidup bersih dan sehat namun dipengaruhi oleh faktor lingkungan yang tidak bersih akan masuk ke dalam subpopulasi manusia rentan ( $S_h$ ); (7) Laju perpindahan manusia bersih dan sehat ke manusia rentan karena dipengaruhi oleh faktor lingkungan yang tidak bersih sebesar  $\omega_h$ ; (8) Laju manusia yang lahir pada subpopulasi manusia yang hidup bersih dan sehat sebesar  $\mu_h$ ; (9) Semua vektor yang lahir dianggap rentan dan masuk pada subpopulasi vektor rentan ( $S_v$ ) dengan laju kelahiran sebesar  $\mu_v$ ; (10) Manusia rentan melakukan kontak dengan manusia terinfeksi Leptospirosis dengan tingkat sebesar  $\beta_h$ ; (11) Vektor rentan melakukan kontak dengan vektor yang terinfeksi Leptospirosis dengan tingkat sebesar  $\beta_v$ ; (12) Pada populasi manusia terinfeksi ( $I_h$ ) terdiri dari manusia yang terinfeksi Leptospirosis pada kasus ringan dan kasus berat; (13) Populasi manusia mengalami kematian alami sebesar  $\lambda_h$ ; (14) Populasi manusia yang terinfeksi Leptospirosis kasus berat mengalami kematian karena infeksi sebesar  $\delta_h$ ; (15) Populasi vektor mengalami kematian alami sebesar  $\lambda_v$  dan kematian karena infeksi sebesar  $\delta_v$ ; (16) Manusia yang terjangkit Leptospirosis baik kasus ringan maupun berat dapat sembuh dengan pemberian antibiotik dengan tingkat sebesar  $r_1$ ; (17) Manusia yang sembuh dari Leptospirosis diasumsikan hidup di lingkungan yang tidak bersih sehingga bisa kembali rentan dengan tingkat sebesar  $r_2$ .

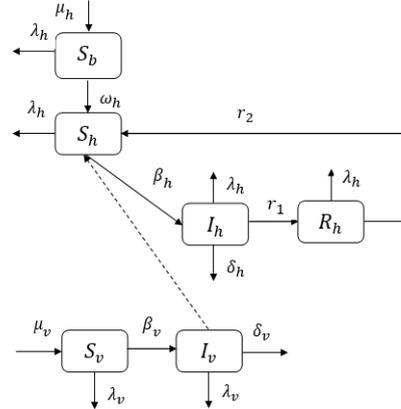
**Tabel 1** Daftar Variabel Model Penyebaran Penyakit Leptospirosis

Variabel	Definisi
$S_b(t)$	Jumlah manusia yang bersih dan sehat pada waktu ke $t$
$S_h(t)$	Jumlah manusia yang rentan terinfeksi Leptospirosis pada waktu ke $t$
$I_h(t)$	Jumlah manusia yang terinfeksi Leptospirosis pada waktu ke $t$
$R_h(t)$	Jumlah manusia yang sembuh dari Leptospirosis pada waktu ke $t$
$S_v(t)$	Jumlah vektor yang rentan terinfeksi Leptospirosis pada waktu ke $t$
$I_v(t)$	Jumlah vektor yang terinfeksi Leptospirosis pada waktu ke $t$

**Tabel 2** Daftar Parameter Model Penyebaran Penyakit Leptospirosis

Parameter	Definisi
$\omega_h$	Laju perpindahan manusia bersih dan sehat ke manusia rentan
$\mu_h$	Laju kelahiran alami manusia
$\lambda_h$	Laju kematian alami manusia
$\beta_h$	Laju infeksi pada manusia
$\delta_h$	Laju kematian manusia yang terinfeksi leptospirosis kasus berat
$r_1$	Laju pemulihan manusia dengan pemberian antibiotik
$r_2$	Laju hilangnya kekebalan pada manusia serta didukung lingkungan yang tidak bersih
$\lambda_v$	Laju kematian alami vektor
$\mu_v$	Laju kelahiran alami vektor
$\beta_v$	Laju infeksi pada vektor
$\delta_v$	Laju kematian vektor karena infeksi

Berdasarkan asumsi yang diatas, dapat dibuat diagram kompartemen model penyebaran penyakit Leptospirosis dengan adanya hidup bersih dan sehat sebagai berikut:



**Gambar 1** Diagram Kompartemen SIR Leptospirosis

Berdasarkan diagram alir diatas dapat dibentuk sebuah model penyakit Leptospirosis dengan adanya kesadaran hidup bersih dan sehat dalam bentuk sistem persamaan diferensial yaitu:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_b}{dt} &= \mu_h - \omega_h S_b - \lambda_h S_b, \\
 \frac{dS_h}{dt} &= \omega_h S_b \mu_h + r_2 R_h - \beta_h S_h I_v - \lambda_h S_h, \\
 \frac{dI_h}{dt} &= \beta_h S_h I_v - r_1 I_h - \delta_h I_h - \lambda_h I_h, \\
 \frac{dR_h}{dt} &= r_1 I_h - r_2 R_h - \lambda_h R_h, \\
 \frac{dS_v}{dt} &= \mu_v - \beta_v S_v I_v - \lambda_v S_v, \\
 \frac{dI_v}{dt} &= \beta_v S_v I_v - \delta_v I_v - \lambda_v I_v.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

**TITIK KESSETIMBANGAN**

Titik kesetimbangan terdiri dari dua macam titik, yakni titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

- 1) Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

$$\begin{aligned}
 T_0 &= (S_b, S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) \\
 &= \left( \frac{\mu_h}{(\omega_h + \lambda_h)}, \frac{\omega_h \mu_h}{\lambda_h (\omega_h + \lambda_h)}, 0, 0, \frac{\mu_v}{\lambda_v}, 0 \right).
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

- 2) Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik merupakan titik dimana terjadi penyebaran penyakit

Leptospirosis dalam populasi. Pada titik kesetimbangan endemik diasumsikan  $S_b \neq 0, S_h \neq 0, I_h \neq 0, R_h \neq 0, S_v \neq 0, I_v \neq 0$ .

Didapatkan titik kesetimbangan endemik:

$$T_1 = (S_b^*, S_h^*, I_h^*, R_h^*, S_v^*, I_v^*) \quad (18)$$

**ANALISIS KESTABILAN TITIK KESETIMBANGAN BEBAS PENYAKIT**

Untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan penyebaran penyakit Leptospirosis dengan adanya kesadaran hidup bersih dan sehat dengan matriks Jacobian pada sistem persamaan (16), dengan rumus Jacobian

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_b}{\partial S_b} & \frac{\partial S_b}{\partial S_h} & \frac{\partial S_b}{\partial I_h} & \frac{\partial S_b}{\partial R_h} & \frac{\partial S_b}{\partial S_v} & \frac{\partial S_b}{\partial I_v} \\ \frac{\partial S_h}{\partial S_b} & \frac{\partial S_h}{\partial S_h} & \frac{\partial S_h}{\partial I_h} & \frac{\partial S_h}{\partial R_h} & \frac{\partial S_h}{\partial S_v} & \frac{\partial S_h}{\partial I_v} \\ \frac{\partial I_h}{\partial S_b} & \frac{\partial I_h}{\partial S_h} & \frac{\partial I_h}{\partial I_h} & \frac{\partial I_h}{\partial R_h} & \frac{\partial I_h}{\partial S_v} & \frac{\partial I_h}{\partial I_v} \\ \frac{\partial R_h}{\partial S_b} & \frac{\partial R_h}{\partial S_h} & \frac{\partial R_h}{\partial I_h} & \frac{\partial R_h}{\partial R_h} & \frac{\partial R_h}{\partial S_v} & \frac{\partial R_h}{\partial I_v} \\ \frac{\partial S_v}{\partial S_b} & \frac{\partial S_v}{\partial S_h} & \frac{\partial S_v}{\partial I_h} & \frac{\partial S_v}{\partial R_h} & \frac{\partial S_v}{\partial S_v} & \frac{\partial S_v}{\partial I_v} \\ \frac{\partial I_v}{\partial S_b} & \frac{\partial I_v}{\partial S_h} & \frac{\partial I_v}{\partial I_h} & \frac{\partial I_v}{\partial R_h} & \frac{\partial I_v}{\partial S_v} & \frac{\partial I_v}{\partial I_v} \end{pmatrix}$$

lalu disubstitusikan nilai titik kesetimbangan bebas penyakit pada persamaan (17) dan didapatkan persamaan karakteristik dari  $\det(\lambda I - J(T_0)) = 0$  adalah  $(\lambda + \omega_h + \lambda_h)(\lambda + \lambda_h) \left( \lambda - \frac{\beta_v \mu_v}{\lambda_v} + \delta_v + \lambda_v \right) (\lambda + \lambda_v) [(\lambda + r_1 + \delta_h + \lambda_h)(\lambda + r_2 + \lambda_h)]$ .

Maka didapatkan nilai eigen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\omega_h - \lambda_v, \\ \lambda_2 &= -\lambda_h, \\ \lambda_3 &= \frac{\beta_v \mu_v}{\lambda_v} - \delta_v - \lambda_v, \\ \lambda_4 &= -\lambda_v, \\ \lambda_5 &= -r_1 - \delta_h - \lambda_h, \\ \lambda_6 &= -r_2 - \lambda_h. \end{aligned} \quad (19)$$

Dari nilai eigen yang dihasilkan, dapat dilihat bahwa nilai  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5,$  dan  $\lambda_6$  pasti negatif karena nilai parameter yang selalu positif. Berdasarkan kriteria kestabilan  $\lambda_3$  juga harus bernilai negatif agar bersifat stabil. Maka:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_v \mu_v}{\lambda_v} - \delta_v - \lambda_v &< 0, \\ \Leftrightarrow \beta_v &< \frac{(\delta_v + \lambda_v) \lambda_v}{\mu_v} \end{aligned} \quad (20)$$

Dari perhitungan analisis kestabilan diatas diketahui bahwa ketika  $\beta_v < \frac{(\delta_v + \lambda_v) \lambda_v}{\mu_v}$  menjadikan

kondisi bebas penyakitnya stabil. Namun sebaliknya ketika  $\beta_v > \frac{(\delta_v + \lambda_v) \lambda_v}{\mu_v}$  kestabilan berubah menjadi kondisi endemik.

**BILANGAN REPRODUKSI DASAR ( $R_0$ )**

Untuk menghitung NGM dapat dicari dari kompartemen infeksi. Pada penelitian ini terdapat 2 kompartemen infeksi yakni pada subpopulasi manusia terinfeksi atau *Infected human* ( $I_h$ ) dan subpopulasi vektor terinfeksi atau *Infected vector* ( $I_v$ ).

$$\begin{aligned} \frac{dI_h}{dt} &= \beta_h S_h I_v - r_1 I_h - \delta_h I_h - \lambda_h I_h, \\ \frac{dI_v}{dt} &= \beta_v S_v I_v - \delta_v I_v - \lambda_v I_v. \end{aligned} \quad (21)$$

Jika  $x = [I_h, I_v]^T$ , maka persamaan (21) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dx}{dt} = (F - V)x, \quad (22)$$

Vektor  $F$  dan  $V$  dapat dituliskan sebagai berikut.

$$F = \begin{pmatrix} \beta_h S_h I_v \\ \beta_h S_v I_v \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} (r_1 + \delta_h + \lambda_h) I_h \\ (\delta_v + \lambda_v) I_v \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial I_h} & \frac{\partial F_1}{\partial I_v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial I_h} & \frac{\partial F_2}{\partial I_v} \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial I_h} & \frac{\partial V_1}{\partial I_v} \\ \frac{\partial V_2}{\partial I_h} & \frac{\partial V_2}{\partial I_v} \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta_h S_h \\ 0 & \beta_v S_v \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} r_1 + \delta_h + \lambda_h & 0 \\ 0 & \delta_v + \lambda_v \end{pmatrix}$$

Dan didapatkan nilai  $V^{-1}$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1 + \delta_h + \lambda_h} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta_v + \lambda_v} \end{pmatrix} \quad (24)$$

dimana rumus NGM yang dilambangkan dengan matriks  $K$  yaitu

$$K = FV^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta_h S_h}{\delta_v + \lambda_v} \\ 0 & \frac{\beta_v S_v}{\delta_v + \lambda_v} \end{pmatrix} \quad (25)$$

Lalu mencari nilai eigen dari matriks  $K$  dan didapatkan

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= \frac{\beta_v \mu_v}{\lambda_v (\delta_v + \lambda_v)} \end{aligned} \quad (26)$$

Bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) diperoleh dari nilai dominan matriks  $K$ , sehingga didapatkan

$$R_0 = \frac{\beta_v \mu_v}{\lambda_v(\delta_v + \lambda_v)} \quad (27)$$

**PENUTUP**

**SIMPULAN**

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan maka dapat diambil kesimpulan:

1. Hasil rekonstruksi model penyebaran penyakit Leptospirosis dengan adanya kesadaran hidup bersih dan sehat dalam bentuk sistem persamaan diferensial adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS_b}{dt} = \mu_h - \omega_h S_b - \lambda_h S_b,$$

$$\frac{dS_h}{dt} = \omega_h S_b \mu_h + r_2 R_h - \beta_h S_h I_v - \lambda_h S_h,$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \beta_h S_h I_v - r_1 I_h - \delta_h I_h - \lambda_h I_h,$$

$$\frac{dR_h}{dt} = r_1 I_h - r_2 R_h - \lambda_h R_h,$$

$$\frac{dS_v}{dt} = \mu_v - \beta_v S_v I_v - \lambda_v S_v,$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \beta_v S_v I_v - \delta_v I_v - \lambda_v I_v.$$

2. Didapatkan dua titik kesetimbangan, yakni titik kesetimbangan bebas penyakit  $T_0 = (S_b, S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) = \left( \frac{\mu_h}{(\omega_h + \lambda_h)}, \frac{\omega_h \mu_h}{\lambda_h(\omega_h + \lambda_h)}, 0, 0, \frac{\mu_v}{\lambda_v}, 0 \right)$  dan titik kesetimbangan endemik  $T_1 = (S_b^*, S_h^*, I_h^*, R_h^*, S_v^*, I_v^*)$ . Titik kesetimbangan bebas penyakit stabil ketika memenuhi syarat kestabilan  $\beta_v < \frac{(\delta_v + \lambda_v)\lambda_v}{\mu_v}$ , sedangkan titik kesetimbangan endemik stabil ketika memenuhi syarat kestabilan  $\beta_v > \frac{(\delta_v + \lambda_v)\lambda_v}{\mu_v}$ .

3. Didapatkan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) yaitu  $R_0 = \frac{\beta_v \mu_v}{\lambda_v(\delta_v + \lambda_v)}$ .

**SARAN**

Penelitian ini hanya membahas penyebaran penyakit Leptospirosis dengan adanya kesadaran hidup bersih dan sehat. Peneliti berharap kedepannya akan dilakukan konstruksi model baru penyebaran penyakit Leptospirosis dengan penambahan asumsi-asumsi baru maupun kompartemen baru.

**DAFTAR PUSTAKA**

Anton, H., & Rorres, C. (2013). Elementary Linear Algebra Applications Version.

Auliya, R. (2014). Hubungan antara strata PHBS tatanan rumah tangga dan sanitasi rumah dengan kejadian Leptospirosis. *Unnes Journal of Public Health*, 3(3).

Bhalraj, A., Azmi, A., & Mohd, M. H. (2021). Analytical and numerical solutions of Leptospirosis model. *Computer Science*, 16(3), 949-961.

Boyce, W. E., DiPrima, R. C., & Meade, D. B. (2017). *Elementary differential equations*. John Wiley & Sons.

Brauer, F., Van den Driessche, P., & Allen, L. J. (2008). *Mathematical epidemiology (Vol. 1945, pp. 3-17)*. J. Wu (Ed.). Berlin: Springer.

Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., & Roberts, M. G. (2010). The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models. *Journal of the royal society interface*, 7(47), 873-885.

Gómez, A. A., López, M. S., Müller, G. V., López, L. R., Sione, W., & Giovanini, L. (2022). Modeling of Leptospirosis outbreaks in relation to hydroclimatic variables in the northeast of Argentina. *Heliyon*, 8(6)

Kementerian Kesehatan Republik Indonesia. Data dan informasi profil kesehatan Indonesia tahun 2022. Kementerian Kesehatan Republik Indonesia 2023

Nurochman, A., Herawati, L., & Prasetyawati, N. D. (2018). *Penggunaan Video Sebagai Media Penyuluhan Terhadap Peningkatan Perilaku Pencegahan Dan Pengendalian Leptospirosis Warga Dusun Potrobayan Srihardono Pundong Bantul* (Doctoral dissertation, Poltekkes Kemenkes Yogyakarta).

Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-verlag. New York. 1991.

Rahim, A., & Yudhastuti, R. (2018). Pemetaan Dan Analisis Faktor Risiko Lingkungan Kejadian Leptospirosis Berbasis Sistem Informasi Geografis (Sig) Di Kabupaten Sampang. *Jurnal*

Universitas Airlangga.

- Ross, S. L. (1984). *Differential equations 3rd edition Shepley L.Ross.pdf* (pp. 416–419).
- Sinaga, L. P., Kartika, D., & Nasution, H. (2021). *Pengantar Sistem Dinamik*. Amal Insani Publisher.
- Soedarmo, S. S. P., Garna, H., Hadinegoro, S. R. S., & Satari, H. I. (2008). Buku ajar infeksi & pediatri tropis. *Jakarta: Badan Penerbit Ikatan Dokter Anak Indonesia*, 338-345.
- Sun, A. H., Liu, X. X., & Yan, J. (2020). Leptospirosis is an invasive infectious and systemic inflammatory disease. *Biomedical Journal*, 43(1), 24-31.
- WHO (2023). [Pencegahan dan pengendalian leptospirosis di Indonesia \(who.int\)](#)
- WHO. (2003). Human Leptospirosis: guidance for diagnosis, surveillance and control.
- WHO. (2004). *Human Leptospirosis: Guidance for Diagnosis, Surveillance and control*. Cennai: World health Organization.
- Wiggins, S. (1990). *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*.