MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 12 No 02
Tahun 2024

PEWARNAAN TITIK KETAKTERATURAN LOKAL PADA BEBERAPA KELAS GRAF

Farah Madina
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
email: farah.20033@mhs.unesa.ac.id

Budi Rahadjeng
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
Penulis Korespondensi: budirahadjeng@unesa.ac.id

Abstrak

Salah satu perluasan dari pewarnaan titik adalah pewarnaan titik ketakteraturan lokal. Pewarnaan titik ketakteraturan lokal merupakan konsep yang menggabungkan pewarnaan titik dan pelabelan ketakteraturan jarak dengan cara meminimumkan label titik dan jumlah warna titik pada graf G. Misalkan $l: V(G) \to \{1,2,3,\dots,k\}$ merupakan fungsi label dan $w: V(G) \to N$ merupakan fungsi bobot, dimana $w(u) = \sum_{v \in N(u)} l(v)$. Fungsi l merupakan pewarnaan titik ketakteraturan lokal$-k$, jika ada k minimum sedemikian hingga untuk setiap dua titik berhubungan langsung bobot titiknya harus berbeda. Bilangan kromatik pada pewarnaan titik ketakteraturan lokal dinotasikan dengan $\chi_{lir}(G)$, yang didefinisikan sebagai minimum kardinalitas himpunan bobot semua titik dalam pewarnaan titik ketakteraturan lokal $-k$. Sehingga berdasarkan definisi tersebut, hasil dan pembahasan yang didapatkan adalah bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf matahari, graf kipas, graf bintang, dan graf bintang ganda.
Kata Kunci: pewarnaan titik ketakteraturan lokal, graf matahari, graf kipas, graf bintang, graf bintang ganda.

Abstract

One of the extensions of vertex coloring is local irregularity vertex coloring. Local irregularity vertex coloring is a concept that combines vertex coloring and distance irregularity labeling by minimizing the vertex label and the number of vertex colors in a graph G. Let $l: V(G) \to \{1,2,3,\dots,k\}$ be a label function and $w: V(G) \to N$ be a weight function, where $w(u) = \sum_{v \in N(u)} l(v)$. The function l is a local$-k$ irregularity vertex coloring, if there exists a minimum k such that for any two vertex that are directly connected their vertex weights must be different. The chromatic number of the local irregularity vertex coloring is denoted by $\chi_{lir}(G)$, which is defined as the minimum of the cardinality of the set of weights of all vertices in the local$-k$ irregularity vertex coloring. So based on the definition, the results and discussion obtained are the chromatic number of local irregularities of sun graph, fan graph, star graph, and double star graph.
Keywords: *local irregularity vertex coloring, sun graph, fan graph, star graph, and double star graph.*

PENDAHULUAN

Salah satu cabang ilmu matematika yang sering digunakan dalam kehidupan sehari-hari adalah teori graf. Teori graf pertama kali digunakan dalam memecahkan permasalahan jembatan konisberg. Permasalahan yang muncul adalah apakah mungkin tujuh jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah oleh sungai pregal dapat dilalui tepat satu kali. Permasalahan jembatan konisberg berhasil dipecahkan pada tahun 1736 oleh matematikawan asal Swiss yaitu Leonhard Euler. Ia memberikan pembuktian sederhana dengan memodelkannya dalam bentuk graf. Daratan dimodelkan sebagai titik atau simpul sedangkan jembatan dimodelkan sebagai sisi. (Supiyandi & Eka, 2018).

Graf G adalah pasangan terurut dua himpunan yaitu himpunan titik V(G) dan himpunan sisi E(G). Himpunan titik V(G) adalah himpunan berhingga tak kosong dari suatu elemen dan himpunan sisi E(G) adalah himpunan berhingga yang boleh kosong sisi-sisi di G dengan sisi adalah pasangan tak terurut dari titik-titik di V(G). Salah satu topik menarik dalam teori graf adalah pewarnaan titik. Pewarnaan titik merupakan pewarnaan semua titik G sehingga dua titik G yang saling bertetangga memiliki warna yang berbeda. (Budayasa, 2007).

Pewarnaan titik merupakan salah satu topik pada pewarnaan graf yang sering diterapkan dalam permasalahan sehari-hari, yaitu penjadwalan ujian, penjadwalan truk pengangkut sampah, penentuan frekuensi radio mobile, pembagian tugas, dan lain lain. Seiring berjalannya waktu, pewarnaan titik mengalami perluasan. Salah satu perluasan dari pewarnaan titik merupakan pewarnaan titik ketakteraturan lokal. Perluasan ini, pertama kali diperkenalkan oleh Kristiana pada tahun 2019 dalam paper yang berjudul "*Local Irregularity Vertex Coloring of Graphs*". Menurut Kristiana, pewarnaan titik ketakteraturan lokal merupakan konsep yang menggabungkan pewarnaan titik dan pelabelan ketakteraturan jarak dengan cara meminimumkan label titik dan jumlah warna titik pada graf G. (Kristiana, Alfarisi, et al., 2019).

Selanjutnya, Kristiana mengembangkan konsep tersebut pada paper yang membahas tentang pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada hasil kali korona dari graf pohon dengan hasil yang diperoleh adalah hasil bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari hasil kali korona pada graf pohon keluarga, yaitu graf kelabang (C_n), graf bintang ganda $(S_{2,n})$, graf gulma $(S_{3,n})$, dan graf E $(E_{3,n})$. Adapun penelitian lain yang mengembangkan konsep pewarnaan titik ketakteraturan lokal dengan hasil yang diperoleh adalah nilai bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf tangga, graf tangga segitiga, graf H, graf *cricket*, graf *net*, graf *tadpole*, graf *peach*, dan graf *bull*, graf matahari, graf kipas, graf bintang.

(Kristiana, Utoyo, et al., 2019) Berdasarkan hasil penelitian di atas, penulis tertarik untuk mengkaji mengenai pewarnaan titik ketakteraturan lokal beberapa kelas graf, yaitu graf matahari, graf kipas, graf bintang, graf bintang ganda sebagai objek penelitian karena pada penelitian sebelumya graf tersebut belum lengkap pembuktian nilai eksak dari batas atas dan batas bawahnya. Pembuktian pada penelitian ini menggunakan pola pikir deduktif dan pendeteksian pola yang sama seperti pada paper di atas sehingga nanti akan didapatkan nilai bilangan kromatik ketakteraturan lokalnya.

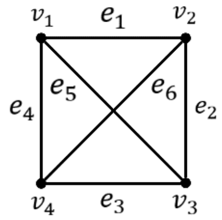
KAJIAN TEORI

Definisi 2.1:

Graf G adalah pasangan terurut dua himpunan yaitu himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Himpunan titik $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari suatu elemen dan himpunan sisi $E(G)$ merupakan himpunan berhingga yang boleh kosong sisi-sisi di G dengan sisi adalah pasangan tak terurut dari titik-titik di $V(G)$. Kardinalitas himpunan adalah banyaknya anggota yang berada di dalam sebuah himpunan. (Budayasa, 2007).

Contoh 3.1:

Misalkan G merupakan graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ di mana $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, e_3 = v_3v_4, e_4 = v_1v_4, e_5 = v_1v_3, e_6 = v_2v_4$. Nilai $|V(G)| = 4$ dan $|E(G)| = 6$. Graf G dapat direpresentasikan dalam bentuk gambar seperti berikut.



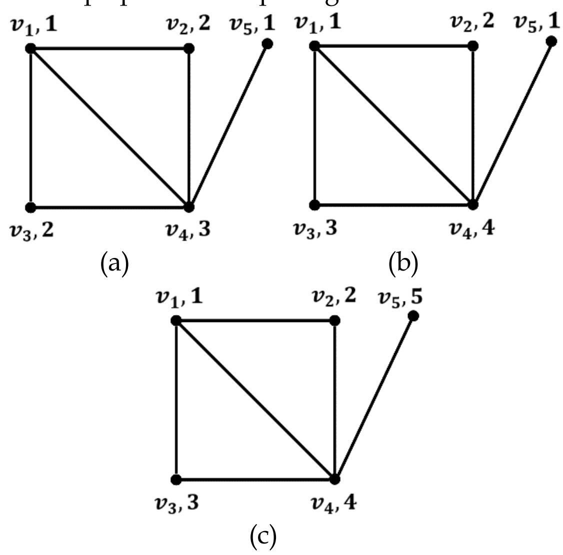
Gambar 1. Graf G dengan 4 titik dan 6 sisi

Definisi 2.2:

Pewarnaan titik pada graf G adalah pemberian warna pada semua titik G menggunakan k warna sehingga dua titik G yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Pewarnaan dengan k warna dinamakan pewarnaan$-k$. (Budayasa, 2007).

Contoh 2.2:

Beberapa pewarnaan pada graf G:



Gambar 2. (a) Pewarnaan-3 Graf G; (b) Pewarnaan-4 Graf G; (c) Pewarnaan-5 Graf G

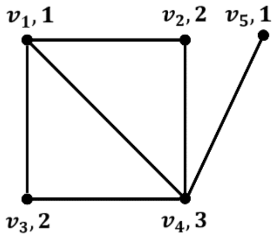
Definisi 2.3:

(Budayasa, 2007) Bilangan kromatik pada graf G adalah minimum$-k$ dari pewarnaan$-k$ pada graf G. Bilangan kromatik dinotasikan dengan $\chi(G)$, yaitu:

$$\chi(G) = \min\{k|ada\ pewarnaan - k\ pada\ graf\ G\}$$

Contoh 2.3:

Perhatikan graf pada Gambar 2.2, terdapat beberapa pewarnaan pada graf G. Pewarnaan -3 merupakan pewarnaan minimun dari graf G, karena graf G tidak dapat diwarnai dengan kurang dari 3 warna. Sehingga, $\chi(G) = 3$.



Gambar 3. Pewarnaan-3 graf G

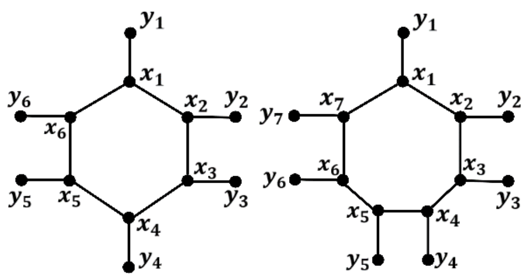
Definisi 2.4:

Titik pendant merupakan titik yang berderajat satu. Sedangkan, sisi pendant merupakan sisi yang terkait pada titik pendant. (Faizah, 2016).

Definisi 2.5:

Graf Matahari (SL_n) adalah graf yang dibentuk dari graf sikel (C_n) dengan menambahkan satu sisi pendant di setiap titik di (C_n). Sehingga himpunan titik pada graf matahari adalah $V(SL_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$ serta himpunan sisinya adalah $E(SL_n) = \{x_i x_n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\}$. (Rhaliwaputri, 2019); (Addinnitya, 2012).

Contoh 2.5:



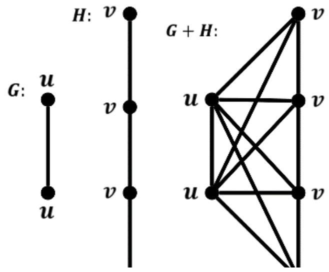
(a) (b)

Gambar 5. (a) Graf Matahari (SL_6);
(b) Graf Matahari (SL_7)

Definisi 2.6:

Graf hasil operasi jumlah G dan H dinotasikan dengan $G + H$ merupakan graf yang mempunyai himpunan titik, yaitu $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisinya adalah $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv|u \in V(G)\ dan\ v \in V(H)\}$. (Saputra, 2012).

Contoh 2.6:

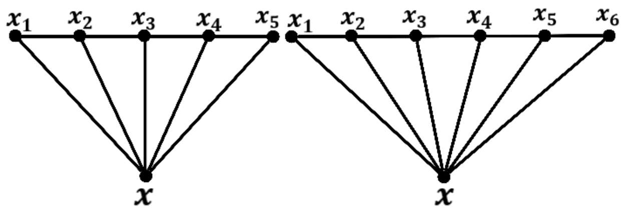


Gambar 4. Graf Hasil Operasi Jumlah $G + H$

Definisi 2.7:

Graf Kipas (F_n) adalah graf hasil operasi jumlah dari graf komplit (K_1) dan graf lintasan (P_n). Dengan demikian himpunan titiknya adalah $V(F_n) = \{x\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisinya adalah $E(F_n) = \{xx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. (Rohmawati & Lukito, 2013).

Contoh 2.7:



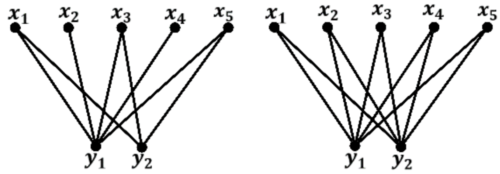
(a) (b)

Gambar 6. (a) Graf Kipas (F_5); (b) Graf Kipas (F_6)

Definisi 2.8:

Sebuah Graf G dikatakan sebagai graf bipartit jika himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua himpunan, yaitu himpunan bagian A dan himpunan bagian B sehingga setiap sisi dari graf G menghubungkan sebuah titik di A dan B. Sedangkan, Sebuah graf bipartit dikatakan sebagai graf bipartit komplit jika setiap titik di A berhubungan langsung dengan setiap titik di B. Dilambangkan dengan $K_{m,n}$. (Budayasa, 2007).

Contoh 2.8:



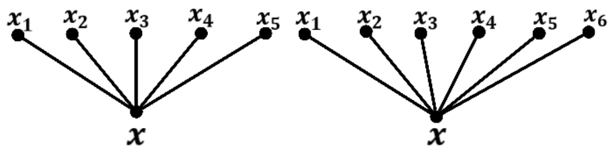
(a) (b)

Gambar 7. (a) Graf Bipartit; (b) Graf Bipartit Komplit ($K_{5,2}$)

Definisi 2.9:

Graf bintang adalah graf bipartit komplit ($K_{1,n}$). Dengan demikian himpunan titik pada graf bintang adalah $V(S_n) = \{x, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ dan himpunan sisinya adalah $E(S_n) = \{xx_i, 1 \leq i \leq n\}$. (Natashia & Rahadjeng, 2022).

Contoh 2.9:



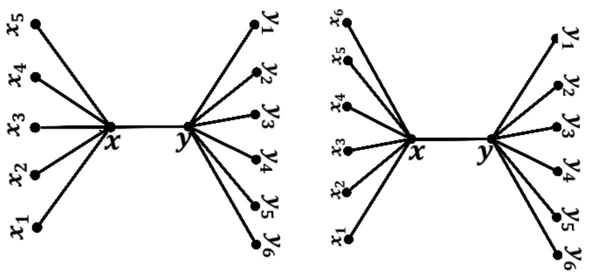
(a) (b)

Gambar 8. (a) Graf Bintang (S_5); (b) Graf Bintang (S_6)

Definisi 2.10:

Graf bintang ganda adalah graf yang mempunyai dua titik pusat berhubungan langsung yaitu x dan y, serta terdapat n titik pendant, $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$ yang berhubungan langsung dengan x dan terdapat m titik pendat, $y_1; y_2; y_3; \dots; y_n$ yang berhubungan langsung dengan y. Dengan demikian himpunan titik graf bintang adalah $V(S_{n,m}) = \{x, y, x_i, y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ sedangkan himpunan sisinya adalah $E(S_{n,m}) = \{xy\} \cup \{xx_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{yy_j, 1 \leq j \leq m\}$. (Rohmatillah, n.d.).

Contoh 2.10:



(a) (b)

Gambar 9. (a) Graf Bintang Ganda ($S_{5,6}$); (b) Graf Bintang Ganda ($S_{6,6}$)

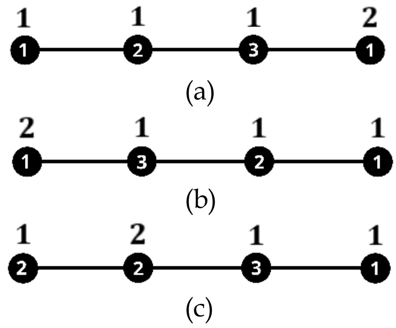
Definisi 2.11:

Misalkan $l: V(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots, k\}$ adalah fungsi label dan $w: V(G) \rightarrow N$ merupakan fungsi bobot, dimana $w(u) = \sum_{v \in N(u)} l(v)$. Fungsi l merupakan pewarnaan titik ketakteraturan lokal$-k$, jika ada k minimum sedemikian hingga untuk setiap dua titik yang berhubungan langsung bobot titiknya harus berbeda. (Kristiana, Alfarisi, et al., 2019).

Definisi 2.12:

Himpunan bobot titik dinotasikan dengan $W(G)$.

Contoh 2.12:



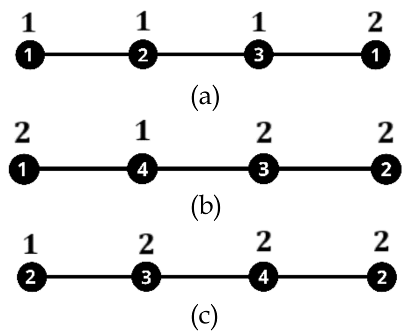
Gambar 10. (a) Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal-2; (b) Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal-2; (c) Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal-2

Perhatikan Gambar 2.10 (a) dan (b), terdapat pewarnaan titik ketakteraturan lokal-2 pada graf lintasan (P_4) dengan bobot setiap dua titik yang berhubungan langsung berbeda yaitu $W(P_4) = \{1,2,3\}$.

Definisi 2.13:

Bilangan kromatik pada pewarnaan titik ketakteraturan lokal dinotasikan dengan $\chi_{lir}(G)$, yang didefinisikan sebagai minimum kardinalitas himpunan bobot semua titik dalam pewarnaan titik ketakteraturan lokal$-k$. (Kristiana A. I., *et al.*, 2019).

Contoh 2.13:



Gambar 11. (a) Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal-2; (b) Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal-2; (c) Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal-2

Himpunan bobot titik pada gambar (a) adalah $W(P_4) = \{1,2,3\}$, $|W(P_4)| = 3$. Himpunan bobot titik pada gambar (b) adalah $W(P_4) = \{1,2,3,4\}$, $|W(P_4)| = 4$. Himpunan bobot titik pada gambar (c) adalah

$W(P_4) = \{2,3,4\}, |W(P_4)| = 3$. Berdasarkan definisi, bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf lintasan (P_4) adalah $\chi_{lir}(P_4) = 3$.

Lemma 2.1

(Kristiana A. I., *et al.*, 2019) Misalkan G adalah graf terhubung dan sederhana, maka $\chi_{lir}(G) \geq \chi(G)$.

Bukti.

Misalkan $l: V(G) \to \{1,2,3,\dots,k\}$ adalah pewarnaan titik, sedemikian sehingga untuk setiap $uv \in E(G), l(u) \neq l(v)$ dan $\chi(G)$ menyatakan pewarnaan titik dengan kardinalitas minimum. Berdasarkan definisi 2.14, $\chi(G) \leq |W(V(G))|$. Akibatnya, $\chi(G) \leq \min\{|W(V(G))|\} = \chi_{lis}(G)$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Graf (SL_n) adalah graf matahari dengan himpunan titik $V(SL_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisinya adalah $E(SL_n) = \{x_i x_n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\}$. (Kristiana, Utoyo, et al., 2019).

Sebelum melakukan pembuktian di Teorema 3.1, akan dibuktikan bilangan kromatik graf matahari.

Lemma 3.1 Bilangan kromatik graf matahari (SL_n), $n \geq 3$ adalah

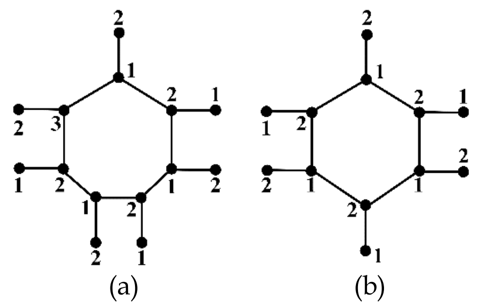
$$\chi(SL_n) = \begin{cases} 2, untuk\ n\ genap\ dan\ n \geq 3 \\ 3, untuk\ n\ ganjil\ dan\ n \geq 3 \end{cases}$$

Bukti.

Bilangan kromatik graf matahari sama dengan bilangan kromatik graf sikel (C_n) karena graf matahari merupakan graf yang dibentuk dari graf sikel (C_n) dengan menambahkan satu sisi pendant pada setiap titik di (C_n). Pewarnaan pada sisi pendant mengikuti pewarnaan dari graf sikel, dengan setiap dua titik berhubungan langsung harus memiliki warna berbeda.

Sehingga, bilangan kromatik graf matahari $(SL_n), n$ genap sama dengan bilangan kromatik graf sikel $(C_n), n$ genap yaitu $\chi(SL_n) = 2$, sedangkan ketika n ganjil $\chi(SL_n) = 3$.

Contoh 3.1:



Gambar 12. (a) Bilangan kromatik, $\chi(SL_7) = 3$; (b) Bilangan kromatik, $\chi(SL_6) = 2$

Berikut ini akan dibuktikan bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf matahari $(SL_n), n \geq 3$.

Teorema 3.1 Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf matahari $(SL_n), n \geq 3$ adalah

$$\chi_{lir}(SL_n) = \begin{cases} 3, untuk\ n\ genap\ dan\ n \geq 4 \\ 5, untuk\ n\ ganjil\ dan\ n \geq 3 \end{cases}$$

Bukti.

Kasus 1: Untuk $n = 3$

Berdasarkan Lemma 2.1, maka $\chi_{lir}(G) \geq \chi(G)$. Batas bawah bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf matahari (SL_3) adalah $\chi_{lir}(SL_3) \geq \chi(SL_3) = 3$, sehingga $X_{lir}(SL_3) \geq 3$. Untuk batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf matahari (SL_3), didefinisikan $l: V(SL_3) \to \{1,2\}$ dengan rumus pelabelan titiknya:

$$l(x_1) = 1, l(x_2) = 1, l(x_3) = 2$$
$$l(y_1) = 2, l(y_2) = 1, l(y_3) = 1$$

Jadi, nilai pelabelan minimum yang tepat dari graf matahari (SL_3) adalah $k = 2$ dengan setiap dua titik berhubungan langsung memiliki bobot titik yang berbeda, yaitu:

$$w(x_1) = 5, w(x_2) = 4, w(x_3) = 3$$
$$w(y_1) = 1, w(y_2) = 1, w(y_3) = 2$$

Berdasarkan hasil di atas, didapatkan kardinalitas himpunan bobot titik graf matahari (SL_3) adalah $|W(SL_3)| = 5$. Dengan demikian, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokalnya adalah $\chi_{lir}(SL_3) \leq 5$. Berdasarkan batas bawah dan batas atasnya didapatkan $3 \leq \chi_{lir}(SL_3) \leq 5$.

Asumsikan bahwa $\chi_{lir}(SL_3) = 3$.

Perhatikan, terdapat 2^3 kombinasi pewarnaan titik ketakteraturan lokal, salah satu kemungkinan bobot titiknya adalah:

$$w(x_1) = w(y_2)$$
$$w(x_2) = w(y_3)$$
$$w(x_3) = w(y_1)$$

Berdasarkan kemungkinan bobot titik di atas, maka asumsikan bahwa:

$$w(x_1) = w(y_2)$$
$$l(x_2) + l(x_3) + l(y_1) = l(x_2)$$
$$l(x_3) + l(y_1) = 0$$

Hal tersebut kontradiksi dengan definisi, karena nilai $l(x)$ harus $l(x) \geq 1$. Untuk kemungkinan bobot titik yang lain adalah:

$$w(x_1) = w(y_2) = w(y_3)$$
$$w(x_2) = w(y_1)$$
$$w(x_3)$$

Berdasarkan kemungkinan bobot titik di atas, maka asumsikan bahwa:

$$w(x_1) = w(y_2)$$
$$l(x_2) + l(x_3) + l(y_1) = l(x_2)$$
$$l(x_3) + l(y_1) = 0$$

Hal tersebut kontradiksi dengan definisi, karena nilai $l(x)$ harus $l(x) \geq 1$. Untuk 6 kemungkinan yang lain akan memunculkan kontradiksi. Sehingga, $\chi_{lir}(SL_3) \geq 4$.

Asumsikan bahwa $\chi_{lir}(SL_3) = 4$.

Perhatikan, terdapat 3^3 kombinasi pewarnaan titik ketakteraturan lokal, salah satu kemungkinan bobot titiknya adalah:

$$w(x_1) = w(y_2)$$
$$w(x_2)$$
$$w(x_3)$$
$$w(y_1) = w(y_3)$$

Berdasarkan kemungkinan bobot titik di atas, asumsikan bahwa:

$$w(x_1) = w(y_2)$$
$$l(y_1) + l(x_3) + l(x_2) = l(x_2)$$
$$l(y_1) + l(x_3) = 0$$

Hal tersebut kontradiksi dengan definisi, karena nilai $l(x)$ harus $l(x) \geq 1$. Untuk kemungkinan bobot titik yang lain adalah:

$$w(x_1)$$
$$w(x_2) = w(y_1)$$
$$w(x_3)$$
$$w(y_2) = w(y_3)$$

Berdasarkan kemungkinan bobot titik di atas, maka asumsikan bahwa:

$$w(x_2) = w(y_1)$$
$$l(y_2) + l(x_3) + l(x_1) = l(x_1)$$
$$l(y_2) + l(x_3) = 0$$

Hal tersebut kontradiksi dengan definisi, karena nilai $l(x)$ harus $l(x) \geq 1$. Untuk 25 kemungkinan yang lain akan memunculkan kontradiksi. Sehingga, $\chi_{lir}(SL_3) \geq 5$.

Dengan demikian, berdasarkan batas bawah dan batas atasnya didapatkan $5 \leq \chi_{lir}(SL_3) \leq 5$. Jadi, terbukti bahwa $\chi_{lir}(SL_3) = 5$.

Kasus 2: Untuk $n \geq 4$

Subkasus 1: Untuk n genap

Berdasarkan Lemma 2.1, maka $\chi_{lir}(G) \geq \chi(G)$. Batas bawah bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf matahari (SL_n) adalah $\chi_{lir}(SL_n) \geq \chi(SL_n) = 2$, sehingga $X_{lir}(SL_n) \geq 2$. Untuk batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf matahari (SL_n), didefinisikan $l: V(SL_n) \rightarrow \{1,2\}$ dengan rumus pelabelan titiknya:

$$l(x_i) = 1, untuk\ 1 \leq i \leq n$$
$$l(y_i) = \begin{cases} 1, untuk\ i\ ganjil, 1 \leq i \leq n \\ 2, untuk\ i\ genap, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Jadi, nilai pelabelan minimum yang tepat dari graf matahari (SL_n), $n \geq 4$ adalah $k = 2$ dengan setiap dua titik berhubungan langsung memiliki bobot titik yang berbeda, yaitu:

$$w(x_i) = \begin{cases} 3, untuk\ i\ ganjil, 1 \leq i \leq n \\ 4, untuk\ i\ genap, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$
$$w(y_i) = 1, untuk\ 1 \leq i \leq n$$

Berdasarkan hasil di atas, didapatkan kardinalitas himpunan bobot titik graf matahari (SL_n) untuk n genap adalah $|W(SL_n)| = 3$. Dengan demikian, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokalnya adalah $\chi_{lir}(SL_n) \leq 3$. Berdasarkan batas bawah dan batas atasnya didapatkan $2 \leq \chi_{lir}(SL_n) \leq 3$.

Asumsikan bahwa $\chi_{lir}(SL_n) = 2$.

Perhatikan, terdapat 2^8 kombinasi pewarnaan titik ketakteraturan lokal, salah satu kemungkinan bobot titiknya adalah:

$$w(x_1) = w(x_3) = w(y_2) = w(y_4)$$
$$w(x_2) = w(x_4) = w(y_1) = w(y_3)$$

Berdasarkan kemungkinan bobot titik di atas, maka asumsikan bahwa:

$$w(x_1) = w(y_2)$$
$$l(x_4) + l(x_2) + l(y_1) = l(x_2)$$
$$l(x_4) + l(y_1) = 0$$

Hal tersebut kontradiksi dengan definisi, karena nilai $l(x)$ harus $l(x) \geq 1$. Untuk kemungkinan bobot titik yang lain adalah:

$$w(x_1) = w(x_3)$$
$$w(x_2) = w(x_4) = w(y_1) = w(y_2) = w(y_3) = w(y_4)$$

Berdasarkan kemungkinan bobot titik di atas, maka asumsikan bahwa:

$$w(x_2) = w(y_3)$$
$$l(x_1) + l(x_3) + l(y_2) = l(x_3)$$
$$l(x_1) + l(y_2) = 0$$

Hal tersebut kontradiksi dengan definisi, karena nilai $l(x)$ harus $l(x) \geq 1$ dan terdapat dua titik berhubungan langsung memiliki bobot titik yang sama. Untuk 254 kemungkinan yang lain akan memunculkan kontradiksi. Sehingga, $\chi_{lir}(SL_n) \geq 3$. Dengan demikian, berdasarkan batas bawah dan batas atasnya didapatkan $3 \leq \chi_{lir}(SL_n) \leq 3$. Jadi, terbukti bahwa $\chi_{lir}(SL_n) = 3, n \geq 4$.

Subkasus 2: Untuk n ganjil

Berdasarkan Lemma 2.1, maka $\chi_{lir}(G) \geq \chi(G)$. Batas bawah bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf matahari (SL_n) adalah $\chi_{lir}(SL_n) \geq \chi(SL_n) = 3$, sehingga $X_{lir}(SL_n) \geq 3$. Untuk batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf matahari (SL_n), didefinisikan $l: V(SL_n) \to \{1,2\}$ dengan rumus pelabelan titiknya:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, untuk\ i = 1,2, n\ atau\ i\ ganjil, 3 \leq i \leq n-1 \\ 2, untuk\ i\ genap, 3 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$l(y_i) = \begin{cases} 1, untuk\ i = 1, n\ atau\ 4 \leq i \leq n-1 \\ 2, untuk\ i = 2,3 \end{cases}$$

Jadi, nilai pelabelan minimum yang tepat dari graf matahari (SL_n), $n \geq 4$ adalah $k = 2$ dengan setiap dua titik berhubungan langsung memiliki bobot titik yang berbeda, yaitu:

$$w(x_i) = \begin{cases} 3, untuk\ i = 1\ atau\ i\ genap, 3 \leq i \leq n-1 \\ 4, untuk\ i = 2, n \\ 5, untuk\ i\ ganjil, 3 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$w(y_i) = \begin{cases} 1, untuk\ i = 1,2, n\ atau\ i\ ganjil, 3 \leq i \leq n-1 \\ 2, untuk\ i\ genap, 3 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

Berdasarkan hasil di atas, didapatkan kardinalitas himpunan bobot titik graf matahari (SL_n) untuk n ganjil adalah $|W(SL_n)| = 5$. Dengan demikian, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokalnya adalah $\chi_{lir}(SL_n) \leq 5$. Berdasarkan batas bawah dan batas atasnya didapatkan $3 \leq \chi_{lir}(SL_n) \leq 5$.

Asumsikan bahwa $\chi_{lir}(SL_n) = 3$.

Perhatikan, terdapat 2^5 kombinasi pewarnaan titik ketakteraturan lokal, salah satu kemungkinan bobot titiknya adalah:

$$w(x_1) = w(x_3) = w(y_2) = w(y_4)$$
$$w(x_2) = w(x_4) = w(y_3) = w(y_5)$$
$$w(x_5) = w(y_1)$$

Berdasarkan kemungkinan bobot titik di atas, asumsikan bahwa:

$$w(x_3) = w(y_2)$$
$$l(x_2) + l(x_4) + l(y_3) = l(x_2)$$
$$l(x_4) + l(y_3) = 0$$

Hal tersebut kontradiksi dengan definisi, karena nilai $l(x)$ harus $l(x) \geq 1$. Untuk kemungkinan bobot titik yang lain adalah:

$$w(x_1) = w(x_3) = w(y_4)$$
$$w(x_2) = w(x_4) = w(y_1) = w(y_3) = w(y_5)$$
$$w(x_5) = w(y_2)$$

Berdasarkan kemungkinan bobot titik di atas, maka asumsikan bahwa:

$$w(x_3) = w(y_4)$$
$$l(x_2) + l(x_4) + l(y_3) = l(x_4)$$
$$l(x_2) + l(y_3) = 0$$

Hal tersebut kontradiksi dengan definisi, karena nilai $l(x)$ harus $l(x) \geq 1$. Untuk 30 kemungkinan yang lain akan memunculkan kontradiksi. Sehingga, $\chi_{lir}(SL_n) \geq 4$.

Asumsikan bahwa $\chi_{lir}(SL_n) = 4$.

Perhatikan, terdapat 3^5 kombinasi pewarnaan titik ketakteraturan lokal, salah satu kemungkinan bobot titiknya adalah:

$$w(x_1) = w(x_3) = w(y_2) = w(y_4)$$
$$w(x_2) = w(x_4) = w(y_3)$$
$$w(x_5) = w(y_1)$$
$$w(y_5)$$

Berdasarkan kemungkinan bobot titik di atas, maka asumsikan bahwa:

$$w(x_3) = w(y_2)$$
$$l(x_2) + l(x_4) + l(y_3) = l(x_2)$$
$$l(x_4) + l(y_3) = 0$$

Hal tersebut kontradiksi dengan definisi, karena nilai $l(x)$ harus $l(x) \geq 1$. Untuk kemungkinan bobot titik yang lain adalah:

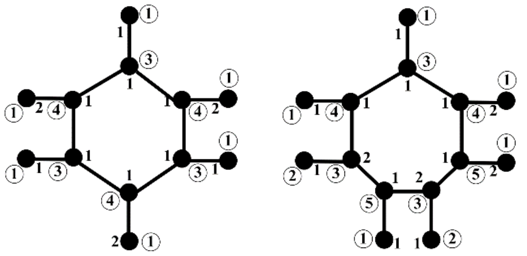
$$w(x_1) = w(x_3)$$
$$w(x_2) = w(x_4)$$
$$w(x_5) = w(y_1)$$
$$w(y_2) = w(y_3) = w(y_4) = w(y_5)$$

Berdasarkan kemungkinan bobot titik di atas, maka asumsikan bahwa:

$$w(x_5) = w(y_1)$$
$$l(x_4) + l(x_1) + l(y_5) = l(x_1)$$
$$l(x_4) + l(y_5) = 0$$

Hal tersebut kontradiksi dengan definisi, karena nilai $l(x)$ harus $l(x) \geq 1$. Untuk 241 kemungkinan yang lain akan memunculkan kontradiksi. Sehingga, $\chi_{lir}(SL_n) \geq 5$. Berdasarkan batas bawah dan batas atasnya didapatkan $5 \leq \chi_{lir}(SL_n) \leq 5$. Jadi, terbukti bahwa $\chi_{lir}(SL_n) = 5$, $n \geq 4$.

Berikut merupakan contoh pewarnaan titik ketakteraturan lokal graf matahari:



(a) (b)

Gambar 13. (a) Bilangan Kromatik Ketakteraturan Lokal, $\chi_{lir}(SL_6) = 3$; (b) Bilangan Kromatik Ketakteraturan Lokal, $\chi_{lir}(SL_7) = 5$

Graf (F_n) adalah graf kipas dengan himpunan titiknya adalah $V(F_n) = \{x\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisinya adalah $E(F_n) = \{xx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. (Kristiana, Utoyo, et al., 2019).

Sebelum melakukan pembuktian di Teorema 3.2, akan dibuktikan bilangan kromatik graf kipas.

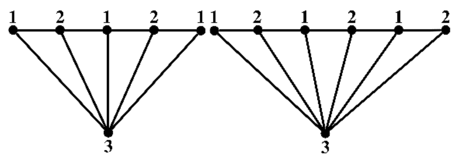
Lemma 3.2 Bilangan kromatik graf kipas $(F_n), n \geq 3$ adalah

$$\chi(F_n) = 3$$

Bukti.

Misalkan graf kipas (F_n) merupakan graf hasil operasi jumlah dari graf komplit (K_1) dan graf lintasan (P_n). Karena setiap dua titik x_i, untuk $1 \leq i \leq n$ saling berhubungan langsung, maka semua titik x_i, untuk $1 \leq i \leq n$ dapat diwarnai dengan menggunakan warna 1 dan 2. Sedangkan, titik x saling berhubungan langsung dengan x_i, untuk $1 \leq i \leq n$. Sehingga, titik x dapat diwarnai dengan warna 3. Jadi, pada graf kipas (F_n) diperoleh pewarnaan -3. Berdasarkan definisi, $\chi(F_n) \leq 3$. Karena setiap titik x_i saling berhubungan langsung dengan titik x, sehingga membentuk sebuah segitiga. Maka pewarnaan yang mungkin adalah pewarnaan-3. Sehingga, didapatkan bahwa $\chi(F_n) \geq 3$. Akibatnya, $\chi(F_n) = 3$.

Contoh 3.2:



(a) (b)

Gambar 14. (a) bilangan kromatik, $\chi(F_5) = 3$; (b) bilangan kromatik, $\chi(F_6) = 3$

Berikut ini akan dibuktikan bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf kipas $(F_n), n \geq 3$.

Teorema 3.2 Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf kipas untuk $(F_n), n \geq 3$ adalah

$$\chi_{lir}(F_n) = \begin{cases} 3, untuk\ n = 3 \\ 4, untuk\ n \geq 4 \end{cases}$$

Bukti.

Kasus 1: Untuk $n = 3$

Berdasarkan Lemma 2.1, $\chi_{lir}(G) \geq \chi(G)$. Batas bawah bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf kipas (F_3) adalah $\chi_{lir}(F_3) \geq \chi(F_3) = 3$, sehingga $X_{lir}(F_3) \geq 3$. Untuk batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf kipas (F_3), didefinisikan bahwa $l: V(F_3) \to \{1,2\}$ dengan rumus pelabelan titiknya:

$$l(x_1) = l(x_2) = 1, l(x_3) = 2$$
$$l(x) = 2$$

Jadi, nilai pelabelan minimum yang tepat dari graf kipas (F_3) adalah $k = 2$ dengan setiap dua titik berhubungan langsung memiliki bobot titik yang berbeda, yaitu:

$$w(x_1) = w(x_3) = 3, w(x_2) = 5$$
$$w(x) = 4$$

Berdasarkan hasil di atas, didapatkan kardinalitas himpunan bobot titik graf kipas (F_3) adalah $|W(F_3)| = 3$. Dengan demikian, batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokalnya adalah $\chi_{lir}(F_3) \leq 3$. Berdasarkan batas bawah dan batas atas diperoleh $3 \leq \chi_{lir}(F_3) \leq 3$, sehingga terbukti bahwa $\chi_{lir}(F_3) = 3$.

Kasus 2: Untuk $n \geq 4$

Berdasarkan Lemma 2.1, $\chi_{lir}(G) \geq \chi(G)$. Batas bawah bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf kipas (F_n) adalah $\chi_{lir}(F_n) \geq \chi(F_n) = 3$, sehingga $X_{lir}(F_n) \geq 3$.

Subkasus 1: Untuk n genap

Batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf kipas (F_n), didefinisikan $l: V(F_n) \to \{1,2\}$ dengan rumus pelabelan titiknya:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, untuk\ i \equiv 1,2,3\ mod\ 4 \\ 2, untuk\ i \equiv 0\ mod\ 4 \end{cases}$$
$$l(x) = 1$$

Jadi, nilai pelabelan minimum yang tepat dari graf kipas (F_n) untuk n genap, $n \geq 4$ adalah $k = 2$ dengan setiap dua titik berhubungan langsung memiliki bobot titik yang berbeda, yaitu:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, untuk\ i = 1\ dan\ i = n \\ 3, untuk\ i\ genap, 2 \leq i \leq n-1 \\ 4, untuk\ i\ ganjil, 2 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$w(x) = \begin{cases} \frac{5n}{4}, untuk\ n \equiv 0 (mod\ 4) \\ \frac{5(n-2)}{4} + 2, untuk\ n \equiv 2(mod\ 4) \end{cases}$$

Berdasarkan hasil di atas, didapatkan kardinalitas himpunan bobot titik graf kipas (F_n) untuk n genap adalah $|W(F_n)| = 4$, sehingga batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokalnya adalah $\chi_{lir}(SL_n) \leq 4$.

Subkasus 2: Untuk n ganjil

Batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf kipas (F_n), didefinisikan $l: V(F_n) \rightarrow \{1,2\}$ dengan rumus pelabelan titiknya:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, untuk\ n \text{ genap} \\ 2, untuk\ n\ ganjil \end{cases}$$

$$l(x) = 1$$

Jadi, nilai pelabelan minimum yang tepat dari graf kipas (F_n) untuk n ganjil, $n \geq 4$ adalah $k = 3$ dengan setiap dua titik berhubungan langsung memiliki bobot titik yang berbeda, yaitu:

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, untuk\ i = 1, n \\ 3, untuk\ i\ ganjil, 2 \leq i \leq n-1 \\ 5, untuk\ i\ genap, 2 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$w(x) = \frac{3(n-1)}{2} + 2$$

Berdasarkan hasil di atas, didapatkan kardinalitas himpunan bobot titik graf kipas (F_n) untuk n ganjil adalah $|W(F_n)| = 4$, sehingga batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokalnya adalah $\chi_{lir}(F_n) \leq 4$.

Dengan demikian, berdasarkan subkasus 1 dan subkasus 2 didapatkan batas bawah dan batas atas untuk $n \geq 4$ adalah $3 \leq \chi_{lir}(SL_n) \leq 4$.

Asumsikan bahwa $\chi_{lir}(F_n) = 3$.

Berikut adalah salah satu kemungkinan bobot titiknya:

$$w(x_1) = w(x_3)$$
$$w(x_2) = w(x_4)$$
$$w(x)$$

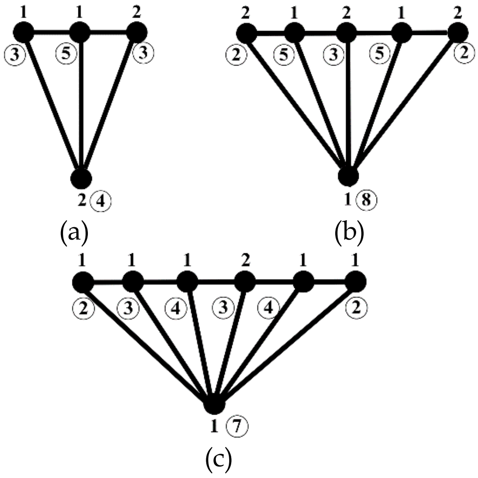
Berdasarkan kemungkinan bobot titik di atas, asumsikan bahwa:

$$w(x_1) = w(x_3)$$
$$l(x_2) + l(x) = l(x_2) + l(x_4) + l(x)$$
$$0 = l(x_4)$$

Hal tersebut kontradiksi dengan definisi, karena nilai $l(x)$ harus $l(x) \geq 1$. Untuk kemungkinan bobot titik yang lain, setiap kemungkinannya akan memunculkan kontradiksi. Sehingga, $\chi_{lir}(F_n) \geq 4$.

Berdasarkan batas bawah dan batas atasnya diperoleh $4 \leq \chi_{lir}(F_n) \leq 4$. Jadi, terbukti bahwa $\chi_{lir}(F_n) = 4$, untuk $n \geq 4$.

Berikut merupakan contoh pewarnaan titik ketakteraturan lokal graf kipas:



Gambar 15. (a) Bilangan Kromatik Ketakteraturan Lokal, $\chi_{lir}(F_3) = 3$; (b) Bilangan Kromatik Ketakteraturan Lokal, $\chi_{lir}(F_5) = 4$; (c) Bilangan Kromatik Ketakteraturan Lokal, $\chi_{lir}(F_6) = 4$

Graf (S_n) adalah graf bintang dengan himpunan titik $V(S_n) = \{x, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ dan himpunan sisinya adalah $E(S_n) = \{xx_i, 1 \leq i \leq n\}$.

Sebelum melakukan pembuktian di Teorema 3.3, akan dibuktikan bilangan kromatik graf bintang.

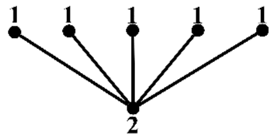
Lemma 3.3 Bilangan kromatik graf bintang $(S_n), n \geq 3$ adalah

$$\chi(S_n) = 2$$

Bukti.

Graf bintang adalah graf bipartite komplit $(K_{1,n})$. Maka himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua himpunan, yaitu himpunan bagian A dan himpunan bagian B. Karena setiap dua titik di himpunan bagian A tidak saling berhubungan langsung, maka semua titik di himpunan bagian A dapat diwarnai dengan 1. Sedangkan, himpunan bagian B dapat diwarnai dengan warna 2. Jadi, pada graf bintang (S_n) diperoleh pewarnaan -2. Berdasarkan definisi, $\chi(S_n) \leq 2$. Karena setiap titik di himpunan bagian A berhubungan langsung dengan setiap titik di himpunan bagian B, maka titik di himpunan bagian A dan B harus mendapat warna yang berbeda. Jadi, diperoleh $\chi(S_n) \geq 2$. Akibatnya, $\chi(S_n) = 2$.

Contoh 3.3



Gambar 16. Bilangan kromatik, $\chi(S_5) = 2$

Berikut ini akan dibuktikan bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf bintang $(S_n), n \geq 3$.

Teorema 3.3 Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf bintang (S_n) untuk $n \geq 3$ adalah

$$\chi_{lir}(S_n) = 2.$$

Bukti.

Berdasarkan Lemma 2.1, $\chi_{lir}(G) \geq \chi(G)$. Batas bawah bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf bintang (S_n) adalah $\chi_{lir}(S_n) \geq \chi(S_n) = 2$, sehingga $X_{lir}(S_n) \geq 2$. Untuk batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf bintang (S_n), didefinisikan bahwa $l: V(S_n) \to \{1\}$ dengan rumus pelabelan titiknya:

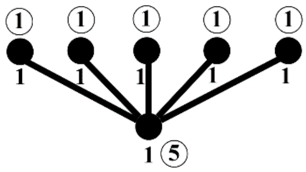
$$l(x_i) = 1, untuk\ 1 \leq i \leq n$$
$$l(x) = 1$$

Jadi, nilai pelabelan minimum yang tepat dari graf bintang (S_n) adalah $k = 1$ dengan setiap dua titik berhubungan langsung memiliki bobot titik yang berbeda, yaitu:

$$w(x_i) = 1, untuk\ 1 \leq i \leq n$$
$$w(x) = n$$

Berdasarkan hasil di atas, didapatkan kardinalitas himpunan bobot titik graf bintang (S_n) adalah $|W(S_n)| = 2$, sehingga batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokalnya adalah $\chi_{lir}(S_n) \leq 2$. Berdasarkan batas bawah dan batas atas didapatkan $2 \leq \chi_{lir}(S_n) \leq 2$, sehingga terbukti bahwa $\chi_{lir}(S_n) = 2$.

Berikut merupakan contoh pewarnaan titik ketakteraturan lokal graf bintang:



Gambar 17. Bilangan Kromatik Ketakteraturan Lokal, $\chi_{lir}(S_5) = 2$

∎

Graf $(S_{n,m})$ adalah graf bintang ganda dengan himpunan titiknya adalah $V(S_{n,m}) = \{x, y, x_i, y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ serta himpunan sisinya adalah $E(S_{n,m}) = \{xy\} \cup \{xx_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{yy_j, 1 \leq j \leq m\}$. (Maghfiro et al., 2021).

Sebelum melakukan pembuktian di Teorema 3.4, akan dibuktikan bilangan kromatik graf bintang ganda.

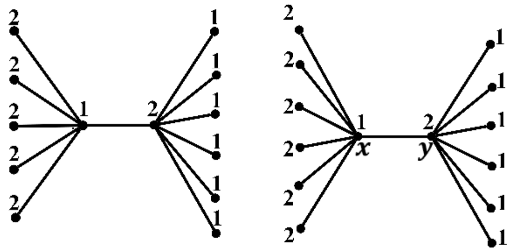
Lemma 3.4 Bilangan kromatik graf bintang ganda $(S_{n,m}), n \geq 3$ adalah

$$\chi(S_{n,m}) = 2$$

Bukti.

Misalkan graf bintang ganda adalah graf yang mempunyai dua titik pusat berhubungan langsung yaitu x dan y, serta terdapat n titik pendant, $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$ yang berhubungan langsung dengan x dan terdapat m titik pendat, $y_1; y_2; y_3; \dots; y_n$ yang berhubungan langsung dengan y. Karena titik x dan y saling berhubungan langsung, maka harus mendapatkan warna yang berbeda. Titik x diwarnai dengan 1 dan titik y diwarnai dengan 2. Jadi, diperoleh $\chi(S_{n,m}) \leq 2$. Karena titik x_i berhubungan langsung dengan titik x, maka harus mendapatkan warna yang berbeda, yaitu 2. Titik y_i berhubungan langsung dengan titik y, maka harus mendapatkan warna yang berbeda, yaitu 1. Jadi, diperoleh $\chi(S_{n,m}) \geq 2$. Akibatnya, $\chi(S_{n,m}) = 2$.

Contoh 3.3:



(a) (b)

Gambar 18. (a) Bilangan kromatik, $\chi(S_{5,6}) = 2$;
(b) Bilangan kromatik, $\chi(S_{6,6}) = 2$

Berikut ini akan dibuktikan bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf bintang ganda $(S_{n,m}), n \geq 3$.

Teorema 3.4 Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf bintang ganda $(S_{n,m})$ untuk $n, m \geq 2$ adalah

$$\chi_{lir}(S_{n,m}) = 3$$

Bukti.

Berdasarkan Lemma 2.1, $\chi_{lir}(G) \geq \chi(G)$. Batas bawah bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf bintang ganda $(S_{n,m})$ adalah $\chi_{lir}(S_{n,m}) \geq \chi(S_{n,m}) = 2$, sehingga $X_{lir}(S_{n,m}) \geq 2$.

Kasus 1: Ketika $n = m$

Batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf bintang ganda $(S_{n,m}), n = m$, didefinisikan $l: V(S_{n,m}) \rightarrow \{1,2\}$ dengan rumus pelabelan titiknya:

$$l(x_i) = 1, \text{untuk } 1 \leq \text{i} \leq \text{n}$$
$$l(y_i) = \begin{cases} 1, untuk\ 1 \leq i \leq m-1 \\ 2, untuk\ i = m \end{cases}$$
$$l(x) = l(y) = 1$$

Jadi, nilai pelabelan minimum yang tepat dari graf bintang ganda $(S_{n,m})$ untuk $n = m$ adalah $k = 2$ dengan dua titik berhubungan langsung memiliki bobot titik yang berbeda, yaitu:

$$w(x_i) = 1, untuk\ 1 \leq i \leq n$$
$$w(y_i) = 1, untuk\ 1 \leq i \leq m$$
$$w(x) = n + 1$$
$$w(y) = m + 2$$

Berdasarkan hasil di atas, didapatkan kardinalitas himpunan bobot titik graf bintang ganda $(S_{n,m})$ untuk $n = m$ adalah $|W(S_{n,m})| = 3$, sehingga batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokalnya adalah $\chi_{lir}(S_{n,m}) \leq 3$.

Kasus 2: Ketika $n \neq m$

Batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokal dari graf bintang ganda $(S_{n,m})$ untuk $n \neq m$, didefinisikan bahwa $l: V(S_{n,m}) \rightarrow \{1\}$ dengan rumus pelabelan titiknya:

$$l(x_i) = 1, \text{untuk } 1 \leq \text{i} \leq \text{n}$$
$$l(y_i) = 1, \text{untuk } 1 \leq \text{i} \leq \text{m}$$
$$l(x) = l(y) = 1$$

Jadi, nilai pelabelan minimum yang tepat dari graf bintang ganda $(S_{n,m})$ untuk $n = m$ adalah $k = 2$ dengan dua titik berhubungan langsung memiliki bobot titik yang berbeda, yaitu:

$$w(x_i) = 1, untuk\ 1 \leq i \leq n$$
$$w(y_i) = 1, untuk\ 1 \leq i \leq m$$
$$w(x) = n + 1$$
$$w(y) = m + 1$$

Berdasarkan hasil di atas, didapatkan kardinalitas himpunan bobot titik graf bintang ganda $(S_{n,m})$ untuk $n \neq m$ adalah $|W(S_{n,m})| = 3$, sehingga batas atas bilangan kromatik ketakteraturan lokalnya adalah $\chi_{lir}(S_{n,m}) \leq 3$.

Berdasarkan subkasus 1 dan subkasus 2 didapatkan batas bawah dan batas atasnya adalah $2 \leq \chi_{lir}(S_{n,m}) \leq 3$.

Asumsikan bahwa $\chi_{lir}(S_{n,m}) = 2$.

Berikut adalah salah satu kemungkinan bobot titiknya:

$$w(x) = w(y_i), 1 \leq i \leq m$$
$$w(x_i) = w(y), 1 \leq i \leq n$$

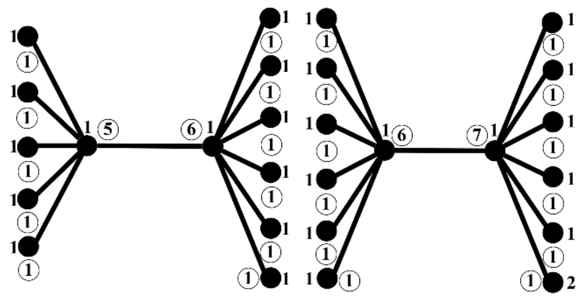
Berdasarkan kemungkinan bobot titik di atas, asumsikan bahwa:

$$w(x) = w(y_i)$$
$$\sum_{i=1}^{n} l(x_i) + l(y) = l(y)$$
$$\sum_{i=1}^{n} l(x_i) = 0$$

Hal tersebut kontradiksi dengan definisi, karena nilai $l(x)$ harus $l(x) \geq 1$. Untuk kemungkinan bobot titik yang lain, setiap kemungkinannya akan memunculkan kontradiksi. Sehingga, $\chi_{lir}(S_{n,m}) \geq 3$.

Berdasarkan batas bawah dan batas atasnya diperoleh $3 \leq \chi_{lir}(S_{n,m}) \leq 3$. Jadi, terbukti bahwa $\chi_{lir}(S_{n,m}) = 3$.

Berikut merupakan contoh pewarnaan titik ketakteraturan lokal graf bintang ganda:



(a) (b)

Gambar 19. (a) Bilangan Kromatik Ketakteraturan Lokal, $\chi_{lir}(S_{5,6}) = 3$; (b) Bilangan Kromatik Ketakteraturan Lokal, $\chi_{lir}(S_{6,6}) = 3$

∎

PENUTUP

SIMPULAN

Penelitian ini membahas topik pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada beberapa kelas graf dengan graf yang digunakan adalah graf matahari, graf kipas, graf bintang, dan graf bintang ganda. Pada penelitian didapatkan hasil sebagai berikut:

1. Bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf matahari untuk $n \geq 3$ adalah

$$\chi_{lir}(SL_n) = \begin{cases} 3, untuk\ n\ genap\ dan\ n \geq 4 \\ 5, untuk\ n\ ganjil\ dan\ n \geq 3 \end{cases}$$

2. Bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf kipas untuk $n \geq 3$ adalah
$$\chi_{lir}(F_n) = \begin{cases} 3, untuk\ n = 3 \\ 4, untuk\ n \geq 4 \end{cases}$$
3. Bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf bintang (S_n) untuk $n \geq 3$ adalah
$$\chi_{lir}(S_n) = 2$$
4. Bilangan kromatik ketakteraturan lokal graf bintang ganda $(S_{n,m})$ untuk $n, m \geq 2$ adalah
$$\chi_{lir}(S_{n,m}) = 3$$

SARAN

Penelitian ini telah membahas mengenai pewarnaan titik ketateraturan lokal pada beberapa kelas graf, yaitu graf matahari, graf kipas, graf bintang, graf bintang ganda. Saran kepada pembaca yaitu agar dapat mengembangkan pembuktian nilai eksak dari batas atas dan batas bawah bilangan kromatik ketakteraturan lokal secara umum.

DAFTAR PUSTAKA

Addinnitya, A. (2012). Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Graf Matahari, Graf Korona, dan Graf Hairycycle dengan Banyak Simpul Lingkaran Genap. Universitas Indonesia.

Budayasa, I. K. (2007). Teori Graph dan Aplikasinya. Unesa University Press.

Faizah, N. (2016). Karakterisasi Graf Pohon dengan Bilangan Kromatik Lokasi 3. Jurnal Matematika UNAND, 5(2), 71–77.

Kristiana, A. I., Alfarisi, R., Agustin, I. H., & Venkatachalam, M. (2019). Local Irregularity Vertex Coloring of Graphs. International Journal of Civil Engineering and Technology (IJCIET), 10(3), 1606–1616.

Kristiana, A. I., Utoyo, M. I., Dafik, Hesti Agustin, I., Alfarisi, R., & Waluyo, E. (2019). On the chromatic number local irregularity of related wheel graph. Journal of Physics: Conference Series, 1211(1), 1–10. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1211/1/012003

Maghfiro, S., Adawiyah, R., Indah Kristiana, A., & Megahnia Prihandini, R. (2021). On Local Irregularity Vertex Coloring of Tree Graph Family. International Journal of Academic and Applied Research, 5(8), 13–17. www.ijeais.org/ijaar

Natashia, M. M., & Rahadjeng, B. (2022). Dekomposisi Graf Bintang, Graf Bintang Ganda, dan Graf Sapu. MathUnesa Jurnal Ilmiah Matematika, 10(1), 218–225.

Rhaliwaputri, N. W. (2019). Dekomposisi-P5-Ajaib (Super) pada Graf Bunga Matahari [Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah]. https://repository.uinjkt.ac.id/dspace/bitstream/123456789/55325/1/NACHDLA%20WASKITA%20RHALIWAPUTRI-FST.pdf

Rohmatillah, N. (n.d.). Pewarnaan Lokal Sisi Antimagic pada Keluarga Graf Pohon dan Graf Hasil Operasi Shackle. Universitas Negeri Jember.

Rohmawati, S., & Lukito, A. (2013). Grup Automorfisme Graf Kipas dab Graf Kipas Ganda. MathUnesa Jurnal Ilmiah Matematika, 1(1), 1–6. https://ejournal.unesa.ac.id/index.php/mathunesa/article/view/1349

Saputra, F. A. (2012). Bilangan Rainbow Connection dari Hasil Operasi Penjumlahan dan Perkalian Kartesius Dua Graf. Jurnal CAUCHY, 2, 125–138.

Supiyandi, & Eka, M. (2018). Penerapan Teknik Pewarnaan Graph Pada Penjadwalan Ujian Dengan Algoritma Welch-Powell. ALGORITMA: Jurnal Ilmu Matemattika Dan Komputer, 3(1), 58–63.