MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115
Volume 13 *No* 02
Tahun 2025

NILAI MINIMUM SPAN PELABELAN L(3,1) PADA GRAF HASIL OPERASI COMB ANTARA GRAF BINTANG DAN GRAF SIKLUS

Siti Aini
Mahasiswa Program Studi Matematika, FPMIPA, Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung, Indonesia
e-mail: sitiaini@upi.edu

Kartika Yulianti
Program Studi Matematika, FPMIPA, Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung, Indonesia
e-mail: kartika.yulianti@upi.edu*

Yaya S. Kusumah
Program Studi Matematika, FPMIPA, Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung, Indonesia
e-mail: yskusumah@upi.edu

Abstrak

Penelitian ini mengkaji pelabelan $L(3,1)$ pada graf hasil operasi *comb* antara graf bintang S_q dan graf siklus C_r $(S_q \rhd C_r)$. Graf hasil operasi *comb* merupakan graf yang dibentuk dengan menggabungkan beberapa graf menjadi bentuk graf baru. Pelabelan $L(3,1)$ merupakan salah satu jenis pelabelan pada graf yang melibatkan pemberian label pada simpul-simpul graf yang memenuhi aturan $|f(u) - f(v)| \geq 3$, jika $d(u,v) = 1$ dan $|f(u) - f(v)| \geq 1$, jika $d(u,v) = 2$, untuk $u, v \in V(G)$. Label terbesar dalam pelabelan graf disebut *span*. Untuk menentukan rumus dalam mencari nilai minimum *span* pelabelan $L(3,1)$ pada graf $S_q \rhd C_r$, digunakan metode pendeteksian pola. Metode ini mencari pola nilai minimum label terbesar (*span*) untuk semua graf $S_q \rhd C_r$. Selanjutnya rumus tersebut dibuktikan secara matematis. Dari hasil penelitian ini, diperoleh nilai minimum *span* untuk pelabelan $L(3,1)$ pada graf $S_q \rhd C_r$ dengan $q \geq 3$ dan $r \geq 3$, yaitu:

$$\lambda_{3,1}(S_q \rhd C_r) = \begin{cases} 8, & \text{jika } q = r = 3, \\ q + 4, & \text{jika } q \geq 4 \text{ atau } r \geq 4. \end{cases}$$

Kata Kunci: Pelabelan L(3,1), Operasi Comb, Pelabelan Gra.,

Abstract

This research studies the $L(3,1)$-labeling on the product of comb operation between star graphs S_q and cycle graphs C_r $(S_q \rhd C_r)$. A comb product of graph is a graph formed by combining several graphs into a new graph. $L(3,1)$-labeling is a type of labeling on graphs that involves the labeling of the vertices of the graph satisfying the rules $|f(u) - f(v)| \geq 3$, if $d(u,v) = 1$ and $|f(u) - f(v)| \geq 1$, if $d(u,v) = 2$, for $u, v \in V(G)$. The largest label in a graph labelling is called span. To determine the formula for finding the minimum span value of $L(3,1)$-labeling in $S_q \rhd C_r$ graphs, the pattern detection method is utilized. This method is used to find the largest minimum label value (span) pattern for all $S_q \rhd C_r$ graphs in a given number of vertices. Furthermore, the formula is proven mathematically. From the result of this research, the minimum span value for $L(3,1)$-labeling on $S_q \rhd C_r$ graphs with $q \geq 3$ and $r \geq 3$, is:

$$\lambda_{3,1}(S_q \rhd C_r) = \begin{cases} 8, & \text{if } q = r = 3, \\ q + 4, & \text{if } q \geq 4 \text{ or } r \geq 4. \end{cases}$$

Keywords: *$L(3,1)$-Labeling, Comb Product, Graph Labeling.*

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan cabang matematika yang memungkinkan representasi objek-objek diskrit dan hubungan di antara objek-objek tersebut (Christianti, 2015). Teori graf memiliki aplikasi yang luas dalam berbagai bidang kehidupan, mulai dari logistik dan komunikasi hingga analisis jejaring sosial dan kriptografi (Febryani, 2023). Pada teori graf, terdapat istilah 'graf hasil operasi *comb*' yang merupakan penggabungan antara dua graf, dengan graf kedua diulang sebanyak simpul pada graf pertama lalu salah satu simpul pada graf kedua ditempelkan di masing-masing simpul pada graf pertama (Rosyidah et al., 2021).

Dalam teori graf, pelabelan graf adalah pemberian label pada elemen-elemen graf (simpul atau sisi) dengan bilangan bulat non-negatif (Ilyas et al., 2021). Salah satu jenis pelabelan yang telah menjadi subjek penelitian intensif adalah pelabelan $L(h,k)$. Pelabelan ini melibatkan pemberian label pada simpul suatu graf yang tidak hanya mempertimbangkan jarak satu langkah tetapi juga dua langkah (Griggs & Yeh, 1992). Parameter h mengatur perbedaan minimum antara label simpul yang terhubung dengan jarak 1, sementara parameter k mengatur perbedaan minimum antara label simpul yang terhubung dengan jarak 2. Nilai *span*, yaitu bilangan bulat terbesar dalam rentang pelabelan (Fernandez et al., 2008). Nilai minimum *span* dalam graf G dinotasikan $\lambda(G)$ (Shao et al., 2008).

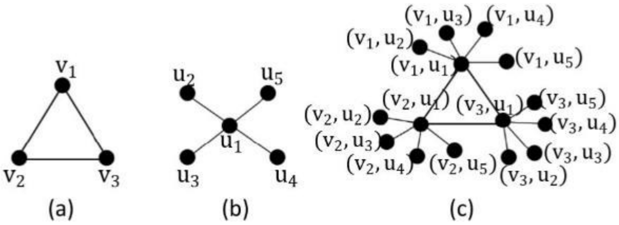
Penelitian-penelitian sebelumnya telah mengeksplorasi pelabelan $L(2,1)$ pada berbagai jenis graf seperti graf *Sierpinski* $S(n,k)$, graf *Lollipop* $L_{m,n}$, serta graf hasil operasi *comb* antara graf siklus dan graf bintang (Sagala & Susiana, 2018; Umam, 2021; Kustanti, 2017; Komarullah, 2020). Sementara itu, pelabelan $L(3,1)$ pada graf seperti lintasan, siklus, lengkap, dan *bipartite* telah dibahas oleh Ghosh dan Pal (2016), serta penelitian terbaru oleh Febryani (2023) yang fokus pada graf *Supercycle* $Sc(n,r)$.

Berbeda dengan penelitian-penelitian terdahulu, pada penelitian ini dikaji penentuan nilai minimum *span* dari pelabelan $L(3,1)$ pada graf hasil operasi *comb* antara graf bintang S_q dan graf siklus C_r (dinotasikan $S_q \rhd C_r$) untuk $q \geq 3$ dan $r \geq 3$.

KAJIAN TEORI

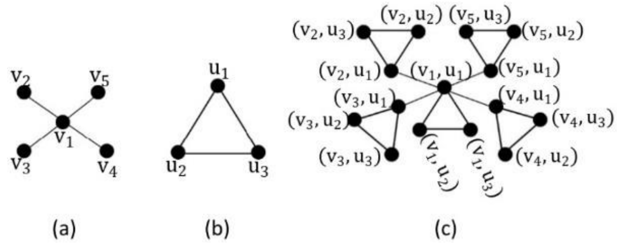
Berdasarkan Gosh dan Pal (2016), pelabelan $L(3,1)$ pada graf G didefinisikan sebagai pemetaan f dari himpunan simpul G ke bilangan bulat non-negatif dengan aturan untuk setiap 2 simpul u, v berlaku $|f(u) - f(v)| \geq 3$, jika $d(u,v) = 1$ dan $|f(u) - f(v)| \geq 1$, jika $d(u,v) = 2$. Nilai minimum span dari pelabelan $L(3,1)$ pada graf G dinotasikan dengan $\lambda_{3,1}(G)$.

Misalkan G dan H adalah dua buah graf terhubung, dan misalkan u adalah simpul dalam graf H. Operasi comb (operasi kali sisir) antara graf G dan graf H, dilambangkan sebagai $G \rhd H$, adalah graf yang diperoleh dengan cara mengambil satu salinan graf G dan menggandakan graf H sebanyak $|V(G)|$ kali, lalu melekatkan simpul u dari setiap salinan graf H pada simpul ke-i dari graf G (Saputro et al., 2013). Graf operasi comb tidak memiliki sifat komutatif (Accardi et al., 2004). Gambar 1(a) merupakan gambar graf siklus C_3, sedangkan Gambar 1(b) gambar graf bintang S_4. Gambar 1(c) merupakan contoh dari graf operasi comb graf C_3 dan graf S_4. Graf C_3 memiliki 3 simpul, sehingga pada graf operasi comb ini graf S_4 digandakan sebanyak 3 kali. Kemudian simpul u_1 dari setiap salinan graf C_3 digabungkan dengan simpul v_1, v_2, v_3 menjadi simpul (v_1,u_1), (v_2,u_1), (v_3,u_1).



Gambar 1. (a) Graf Siklus C_3, (b) Graf Bintang S_4, (c) Graf operasi comb $C_3 \rhd S_4$.

Gambar 2(c) merupakan contoh dari graf operasi comb graf S_4 dan graf C_3. Graf S_4 memiliki 5 simpul, sehingga pada graf operasi comb ini graf C_3 digandakan sebanyak 5 kali. Kemudian simpul u_1 dari setiap salinan graf S_4 digabungkan dengan simpul v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 menjadi simpul (v_1,u_1), (v_2,u_1), (v_3,u_1), (v_4,u_1), (v_5,u_1).



Gambar 2. (a) Graf Bintang S_4, (b) Graf Siklus C_3, (c) Graf operasi comb $S_4 \rhd C_3$.

Terdapat tiga teorema yang digunakan sebagai dasar unuk menentukan nilai minimum *span* dari pelabelan $L(3,1)$ pada graf *Lollipop* $L_{m,n}$ sebagai berikut.

Teorema 1 Jika H adalah subgraf dari graf G, maka $\lambda_{3,1}(H) \leq \lambda_{3,1}(G)$ (Ghosh & Pal, 2016).

Teorema 2 Untuk setiap n bilangan asli, $\lambda_{3,1}(S_n) = n + 2$ (Ghosh & Pal, 2016).

Teorema 3 Untuk setiap n bilangan asli, $\lambda_{3,1}(C_n) = 6$, jika $n \geq 3$; $\lambda_{3,1}(C_n) = 4$ untuk n kelipatan 4 (Ghosh & Pal 2016).

METODE

Penelitian ini menggunakan metode pendeteksian pola dengan fokus pada pencarian pola pelabelan $L(3,1)$ untuk menentukan nilai minimum span pada graf $S_q \rhd C_r$, dengan syarat $q \geq 3$ dan $r \geq 3$. Adapun tahapan penelitian adalah sebagai berikut:

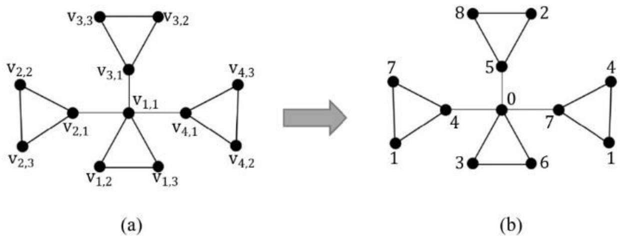
1. Melakukan pelabelan $L(3,1)$ pada graf $S_q \rhd C_r$, yaitu memberikan label pada setiap simpul graf $S_q \rhd C_r$ dengan $q \geq 3$ dan $r \geq 3$ untuk beberapa nilai q dan r.
2. Menggunakan hasil pelabelan sebagai referensi untuk menentukan batas atas dari pelabelan $L(3,1)$ pada $S_q \rhd C_r$ dengan $q \geq 3$ dan $r \geq 3$ untuk beberapa nilai q dan r.
3. Menelaah hasil penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan pelabelan $L(3,1)$ pada graf lengkap S_q dan graf lintasan C_r.
4. Membentuk konjektur (dugaan awal) berdasarkan pola yang terlihat dari pelabelan simpul pada graf $S_q \rhd C_r$ untuk semua nilai q dan r.
5. Membuktikan konjektur yang telah dibuat untuk menghasilkan teorema berdasarkan pola yang ditemukan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini menyajikan hasil pelabelan $L(3,1)$ pada graf $S_q \rhd C_r$ untuk beberapa nilai q dan r.

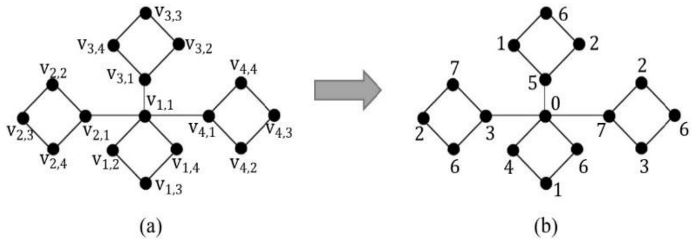
PELABELAN $L(3,1)$ PADA GRAF $S_3 \rhd C_r$

Contoh graf $S_3 \rhd C_3$ dapat dilihat pada Gambar 3(a). Pelabelan dimulai pada simpul yang berderajat 5. Misalkan simpul $v_{1,1}$ diberi label 0. Karena $v_{1,2}$, $v_{1,3}$, $v_{2,1}$, $v_{3,1}$, dan $v_{4,1}$ masing-masing memiliki jarak 1 dari $v_{1,1}$, maka kelima simpul tersebut harus diberikan label dengan selisih minimum 3. Sebagai contoh, $v_{1,2}$ diberi label 3, $v_{1,3}$ diberi label 6, $v_{2,1}$ diberi label 4, $v_{3,1}$ diberi label 5, dan $v_{4,1}$ diberi label 7. Selanjutnya, simpul-simpul yang memiliki jarak 2 dari $v_{1,1}$ harus memiliki label dengan selisih minimum satu terhadap label $v_{1,1}$. Karena $v_{2,2}$ dan $v_{2,3}$ saling bertetangga dengan jarak 1, maka selisih label keduanya harus minimum 3. Misalkan $v_{2,2}$ diberi label 7 dan $v_{2,3}$ diberi label 1. Dengan pendekatan serupa, label-label lainnya ditentukan: $v_{3,2}$ memiliki label 2, $v_{3,3}$ memiliki label 8, $v_{4,2}$ memiliki label 1, dan $v_{4,3}$ memiliki label 4. Hasilnya adalah $h(v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{3,3}, v_{4,1}, v_{4,2}, v_{4,3}) = \{0,3,6,4,7,1,5,2,8,7,1,4\}$ seperti pada Gambar 3(b). Diperoleh $\lambda_{3,1}(S_3 \rhd C_3) = 8$.

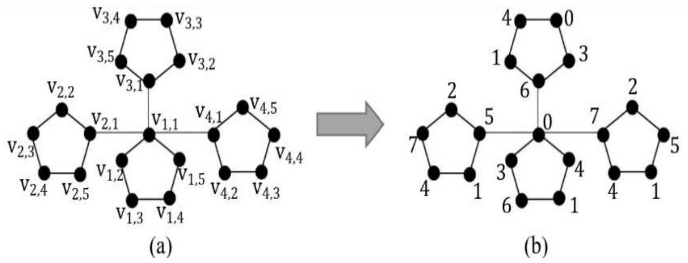


Gambar 3. (a) Notasi Pelabelan Graf $S_3 \rhd C_3$, (b) Pelabelan $L(3,1)$ pada Graf $S_3 \rhd C_3$.

Dengan pola yang sama, pelabelan $L(3,1)$ pada graf $S_3 \rhd C_4$ dan $S_3 \rhd C_5$ menghasilkan $\lambda_{3,1}(S_3 \rhd C_4) = \lambda_{3,1}(S_3 \rhd C_5) = 7$, yang ditampilkan pada Gambar 4 dan Gambar 5. Pola tersebut dapat diterapkan pada $S_3 \rhd C_r$ dengan r ≥ 3.



Gambar 4. (a) Notasi Pelabelan Graf $S_3 \rhd C_4$, (b) Pelabelan $L(3,1)$ pada Graf $S_3 \rhd C_4$.



Gambar 5. (a) Notasi Pelabelan Graf $S_3 \rhd C_5$, (b) Pelabelan $L(3,1)$ pada Graf $S_3 \rhd C_5$

Berdasarkan pengamatan hasil pelabelan $L(3,1)$ pada Graf $S_3 \rhd C_3$, $S_3 \rhd C_4$, dan $S_3 \rhd C_5$, tampak pola yang muncul menunjukkan bahwa nilai minimum *span*-nya adalah 8 saat r = 3 dan 7 saat r > 3. Dengan demikian, diperoleh konjektur sebagai berikut:

Misalkan graf H adalah sebuah graf $S_3 \rhd C_r$ dengan $r \geq 3$. Maka, nilai minimum *span* dari pelabelan $L(3,1)$ pada H adalah

$$\lambda_{3,1}(S_3 \rhd C_r) = \begin{cases} 8, & \text{jika } r = 3, \\ 7, & \text{jika } r > 3. \end{cases}$$

Saat $r = 3$, nilai minimum *span* pada graf $S_3 \rhd C_r$ tidak mungkin 7 karena terdapat salah satu label simpul C_3 yang memiliki label 5, sehingga dua simpul lainnya akan memiliki label 2 dan 8, 1 dan 8, atau 0 dan 8. Akan dilakukan pembuktian konjektur terhadap graf $S_3 \rhd C_r$ dengan $r \geq 3$.

Graf S_5 dan C_r merupakan subgraf dari $S_3 \rhd C_r$. Merujuk pada Teorema 2 dan Teorema 3, S_5 memiliki nilai minimum *span* $\lambda_{3,1}(S_5) = 7$, dan C_r memiliki nilai minimum *span* $\lambda_{3,1}(C_r) = 6$ untuk $r \geq 3$ serta $\lambda_{3,1}(C_r) = 4$ untuk r kelipatan 4. Berdasarkan Teorema 1, $\lambda_{3,1}(S_3 \rhd C_r) \geq \lambda_{3,1}(S_5) = 7$.

Berikut didefinisikan pelabelan $L(3,1)$ pada graf $S_q \rhd C_r$, dengan pemetaan:

a. Jika $r \equiv 0 (\text{mod } 3)$

$$f(v_{1,j}) = \begin{cases} 0, & \text{jika } j \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 3, & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 3) \\ 6, & \text{jika } j \equiv 0(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$f(v_{2,j}) = \begin{cases} 4, & \text{jika } j \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 7, & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 3) \\ 1, & \text{jika } j \equiv 0(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$f(v_{3,j}) = \begin{cases} 5, & \text{jika } j = 1 \\ 2, & \text{jika } j = 2 \\ 8, & \text{jika } j = r = 3 \\ 6, & \text{jika } j = 3 \neq r \\ 3, & \text{jika } j \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 1 \\ 7, & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 2 \\ 1, & \text{jika } j \equiv 0(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 3 \end{cases}$$

$$f(v_{4,j}) = \begin{cases} 7, & \text{jika } j \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 1, & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 3) \\ 4, & \text{jika } j \equiv 0(\text{mod } 3) \end{cases}$$

b. Jika $r \equiv 1 (\text{mod } 3)$

$$f(v_{1,j}) = \begin{cases} 0, & \text{jika } j = 1 \\ 4, & \text{jika } j = 2 \\ 1, & \text{jika } j = 3 \\ 6, & \text{jika } j \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 1 \\ 0, & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 2 \\ 3, & \text{jika } j \equiv 0(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 3 \end{cases}$$

$$f(v_{2,j}) = \begin{cases} 3, & \text{jika } j = 1 \\ 7, & \text{jika } j = 2 \\ 2, & \text{jika } j = r - 1 \\ 6, & \text{jika } j = r \\ 1, & \text{jika } j \equiv 0(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq r - 1 \\ 4, & \text{jika } j \equiv 1(\text{mod } 3),\ j \neq r, \text{dan } j \neq 1 \\ 7, & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 2 \end{cases}$$

$$f(v_{3,j}) = \begin{cases} 5, & \text{jika } j = 1 \\ 2, & \text{jika } j = 2 \\ 6, & \text{jika } j = 3 \\ 1, & \text{jika } j \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 1 \\ 4, & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 2 \\ 7, & \text{jika } j \equiv 0(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 3 \end{cases}$$

$$f(v_{4,j}) = \begin{cases} 7, & \text{jika } j = 1 \\ 3, & \text{jika } j = 2 \\ 6, & \text{jika } j = 3 \\ 2, & \text{jika } j = 4 \\ 7, & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 2 \\ 4, & \text{jika } j \equiv 0(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 3 \\ 1, & \text{jika } j \equiv 1(\text{mod } 3),\ j \neq 1, \text{dan } j \neq 4 \end{cases}$$

c. Jika $r \equiv 2 (\text{mod } 3)$

$$f(v_{1,j}) = \begin{cases} 0, & \text{jika } j \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq r - 1 \\ 3, & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq r \\ 6, & \text{jika } j \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 1, & \text{jika } j = r - 1 \\ 4, & \text{jika } j = r \end{cases}$$

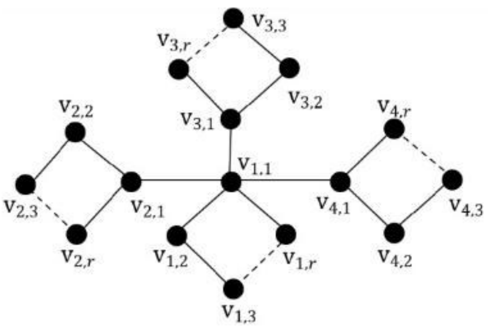
$$f(v_{2,j}) = \begin{cases} 5, & \text{jika } j = 1 \\ 2, & \text{jika } j = 2 \\ 7, & \text{jika } j \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 4, & \text{jika } j \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 1 \\ 1, & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 2 \end{cases}$$

$$f(v_{3,j}) = \begin{cases} 6, & \text{jika } j \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq r - 1 \\ 3, & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq r \\ 0, & \text{jika } j \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 4, & \text{jika } j = r - 1 \\ 1, & \text{jika } j = r \end{cases}$$

$$f(v_{4,j}) = \begin{cases} 7, & \text{jika } j \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq r - 1 \\ 4, & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq r \\ 1, & \text{jika } j \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 5, & \text{jika } j = r - 1 \\ 2, & \text{jika } j = r \end{cases}$$

Simpul $v_{i,j}$ ditunjukkan pada Gambar 6, dengan keterangan sebagai berikut:

- $v_{1,1}$: simpul yang berderajat 5,
- $v_{2,1}, v_{3,1}, v_{4,1}$: simpul yang berderajat 3, dan
- $v_{2,2}, v_{2,3}, \dots, v_{2,r}, v_{3,2}, v_{3,3}, \dots, v_{3,r}, v_{4,2}, v_{4,3}, \dots, v_{4,r}$: simpul yang berderajat 2.



Gambar 6. Notasi Pelabelan Graf $S_3 \rhd C_r$.

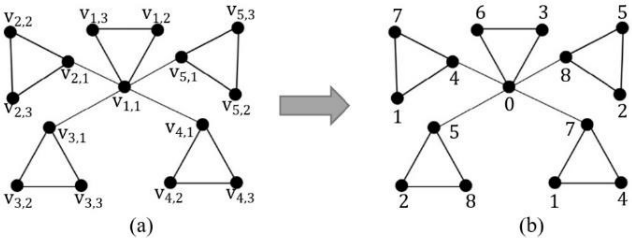
Langkah pembuktian tersebut menghasilkan teorema berikut:

Teorema 4. Misalkan graf H adalah sebuah graf $S_3 \rhd C_r$ dengan $r \geq 3$. Maka, nilai minimum span dari pelabelan $L(3,1)$ pada H adalah

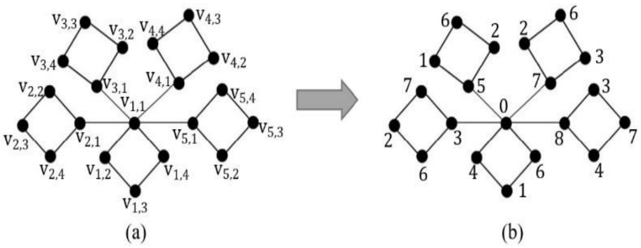
$$\lambda_{3,1}(S_3 \rhd C_r) = \begin{cases} 8, \text{jika } r = 3, \\ 7, \text{jika } r > 3. \end{cases}$$

PELABELAN $L(3,1)$ PADA GRAF $S_4 \rhd C_r$

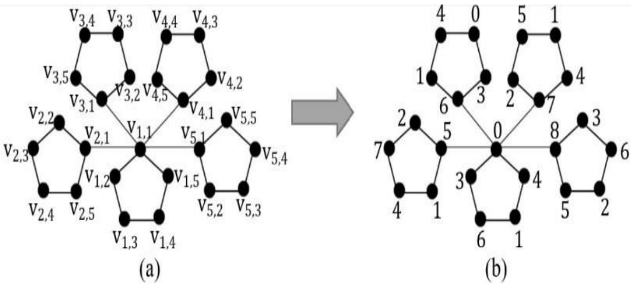
Pelabelan $L(3,1)$ pada graf $S_4 \rhd C_3$ diperlihatkan pada Gambar 7, dengan $\lambda_{3,1}(S_4 \rhd C_3) = 8$. Sedangkan pelabelan $L(3,1)$ pada graf $S_4 \rhd C_4$ ditampilkan pada Gambar 8, dengan $\lambda_{3,1}(S_4 \rhd C_4) = 8$. Selanjutnya, pelabelan $L(3,1)$ pada graf $S_4 \rhd C_5$ dapat mengikuti pola pelabelan graf $S_4 \rhd C_4$, seperti yang disajikan pada Gambar 9.



Gambar 7. (a) Notasi Pelabelan Graf $S_4 \rhd C_3$, (b) Pelabelan $L(3,1)$ pada Graf $S_4 \rhd C_3$.



Gambar 8. (a) Notasi Pelabelan Graf $S_4 \rhd C_4$, (b) Pelabelan $L(3,1)$ pada Graf $S_4 \rhd C_4$.



Gambar 9. (a) Notasi Pelabelan Graf $S_4 \rhd C_5$, (b) Pelabelan $L(3,1)$ pada Graf $S_4 \rhd C_5$.

Dengan demikian, diperoleh konjektur sebagai berikut:

Misalkan graf H adalah sebuah graf $S_4 \rhd C_r$ dengan $r \geq 3$. Maka, nilai minimum *span* dari pelabelan $L(3,1)$ pada H adalah $\lambda_{3,1}(S_4 \rhd C_r) = 8$.

Untuk membuktikan konjektur tersebut, perlu ditunjukkan bahwa $\lambda_{3,1}(S_4 \rhd C_r) \geq 8$ dan $\lambda_{3,1}(S_4 \rhd C_r) \leq 8$. Merujuk pada Teorema 2 dan Teorema 3, graf S_6 dan C_r yang merupakan subgraf dari $S_4 \rhd C_r$ memiliki nilai minimum *span* $\lambda_{3,1}(S_6) = 8$, $\lambda_{3,1}(C_r) = 6$ untuk $r \geq 3$ serta $\lambda_{3,1}(C_r) = 4$ untuk r kelipatan 4. Berdasarkan Teorema 1, $\lambda_{3,1}(S_4 \rhd C_r) \geq \lambda_{3,1}(S_6) = 8$.

Untuk menunjukkan bahwa $\lambda_{3,1}(S_4 \rhd C_r) \leq 8$ cukup dengan melakukan pelabelan:

a. Jika $r \equiv 0 \pmod 3$

$$f(v_{1,j}) = \begin{cases} 0, & \text{jika } j \equiv 1 (\text{mod } 3) \\ 3, & \text{jika } j \equiv 2 (\text{mod } 3) \\ 6, & \text{jika } j \equiv 0 (\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$f(v_{2,j}) = \begin{cases} 4, & \text{jika } j \equiv 1 (\text{mod } 3) \\ 7, & \text{jika } j \equiv 2 (\text{mod } 3) \\ 1, & \text{jika } j \equiv 0 (\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$f(v_{3,j}) = \begin{cases} 5, & \text{jika } j \equiv 1 (\text{mod } 3) \\ 2, & \text{jika } j \equiv 2 (\text{mod } 3) \\ 8, & \text{jika } j \equiv 0 (\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$f(v_{4,j}) = \begin{cases} 7, & \text{jika } j \equiv 1 (\text{mod } 3) \\ 1, & \text{jika } j \equiv 2 (\text{mod } 3) \\ 4, & \text{jika } j \equiv 0 (\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$f(v_{5,j}) = \begin{cases} 8, & \text{jika } j \equiv 1 (\text{mod } 3) \\ 2, & \text{jika } j \equiv 2 (\text{mod } 3) \\ 5, & \text{jika } j \equiv 0 (\text{mod } 3) \end{cases}$$

b. Jika $r \equiv 1 \pmod 3$

$$f(v_{1,j}) = \begin{cases} 0, & \text{jika } j = 1 \\ 4, & \text{jika } j = 2 \\ 1, & \text{jika } j = 3 \\ 6, & \text{jika } j \equiv 1 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 1 \\ 0, & \text{jika } j \equiv 2 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 2 \\ 3, & \text{jika } j \equiv 0 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 3 \end{cases}$$

$$f(v_{2,j}) = \begin{cases} 3, \text{jika } j = 1 \\ 7, \text{jika } j = 2 \\ 2, \text{jika } j = r-1 \\ 6, \text{jika } j = r \\ 1, \text{jika } j \equiv 0 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq r-1 \\ 4, \text{jika } j \equiv 1 (\text{mod } 3), j \neq r, \text{ dan } j \neq 1 \\ 7, \text{jika } j \equiv 2 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 2 \end{cases}$$

$$f(v_{3,j}) = \begin{cases} 5, & \text{jika } j = 1 \\ 2, & \text{jika } j = 2 \\ 6, & \text{jika } j = 3 \\ 1, & \text{jika } j \equiv 1 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 1 \\ 4, & \text{jika } j \equiv 2 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 2 \\ 7, & \text{jika } j \equiv 0 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 3 \end{cases}$$

$$f(v_{4,j}) = \begin{cases} 7, & \text{jika } j = 1 \\ 3, & \text{jika } j = 2 \\ 6, & \text{jika } j = 3 \\ 2, & \text{jika } j = 4 \\ 7, & \text{jika } j \equiv 2 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 2 \\ 4, & \text{jika } j \equiv 0 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 3 \\ 1, & \text{jika } j \equiv 1 (\text{mod } 3),\ j \neq 1, \text{ dan } j \neq 4 \end{cases}$$

$$f(v_{5,j}) = \begin{cases} 8, & \text{jika } j = 1 \\ 4, & \text{jika } j = 2 \\ 7, & \text{jika } j = 3 \\ 3, & \text{jika } j = 4 \\ 8, & \text{jika } j \equiv 2 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 2 \\ 5, & \text{jika } j \equiv 0 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 3 \\ 2, & \text{jika } j \equiv 1 (\text{mod } 3), \quad j \neq 1, \text{ dan } j \neq 4 \end{cases}$$

c. Jika $r \equiv 2$ (mod 3)

$$f(v_{1,j}) = \begin{cases} 0, \text{jika } j \equiv 1 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq r-1 \\ 3, \text{jika } j \equiv 2 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq r \\ 6, \text{jika } j \equiv 0 (\text{mod } 3) \\ 1, \text{jika } j = r-1 \\ 4, \text{jika } j = r \end{cases}$$

$$f(v_{2,j}) = \begin{cases} 5, \text{jika } j = 1 \\ 2, \text{jika } j = 2 \\ 7, \text{jika } j \equiv 0 (\text{mod } 3) \\ 4, \text{jika } j \equiv 1 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 1 \\ 1, \text{jika } j \equiv 2 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq 2 \end{cases}$$

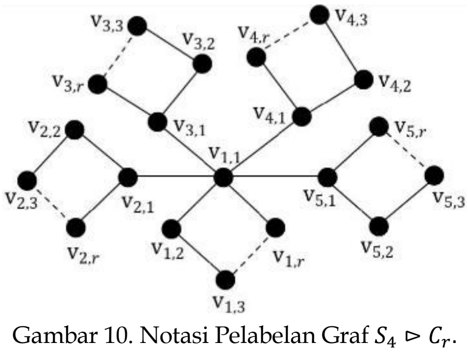
$$f(v_{3,j}) = \begin{cases} 6, \text{jika } j \equiv 1 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq r-1 \\ 3, \text{jika } j \equiv 2 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq r \\ 0, \text{jika } j \equiv 0 (\text{mod } 3) \\ 4, \text{jika } j = r-1 \\ 1, \text{jika } j = r \end{cases}$$

$$f(v_{4,j}) = \begin{cases} 7, \text{jika } j \equiv 1 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq r-1 \\ 4, \text{jika } j \equiv 2 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq r \\ 1, \text{jika } j \equiv 0 (\text{mod } 3) \\ 5, \text{jika } j = r-1 \\ 2, \text{jika } j = r \end{cases}$$

$$f(v_{5,j}) = \begin{cases} 8, \text{jika } j \equiv 1 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq r-1 \\ 5, \text{jika } j \equiv 2 (\text{mod } 3) \text{ dan } j \neq r \\ 2, \text{jika } j \equiv 0 (\text{mod } 3) \\ 6, \text{jika } j = r-1 \\ 3, \text{jika } j = r \end{cases}$$

Simpul $v_{i,j}$ ditunjukkan pada Gambar 10 dengan keterangan sebagai berikut:

- $v_{1,1}$: simpul yang berderajat 6,
- $v_{2,1},, v_{4,1}, v_{5,1}$: simpul yang berderajat 3, dan
- $v_{2,2}, v_{2,3}, \dots, v_{2,r}, v_{3,2}, v_{3,3}, \dots, v_{3,r}, v_{4,2}, v_{4,3}, \dots, v_{4,r}, v_{5,2}, v_{5,3}, \dots, v_{5,r}$: simpul yang berderajat 2.



Gambar 10. Notasi Pelabelan Graf $S_4 \rhd C_r$.

Langkah pembuktian tersebut menghasilkan teorema berikut:

Teorema 5 Misalkan graf H adalah sebuah graf $S_4 \rhd C_r$ dengan $r \geq 3$. Maka, nilai minimum *span* dari pelabelan $L(3,1)$ pada H adalah $\lambda_{3,1}(S_4 \rhd C_r) = 8$.

Dengan cara yang sama seperti yang dilakukan pada bagian Hasil, diperoleh nilai minimum *span* dari pelabelan $L(3,1)$ pada $S_5 \rhd C_r$ yang disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Hasil Pelabelan $L(3,1)$ pada Graf $S_5 \rhd C_r$

r	$\lambda_{3,1}(S_5 \rhd C_r)$
1	9
2	9
3	9

Dengan demikian, didapatkan pelabelan $L(3,1)$ pada $S_3 \rhd C_r, S_4 \rhd C_r$, dan $S_5 \rhd C_r$ dengan nilai minimum *span* sebagai berikut:

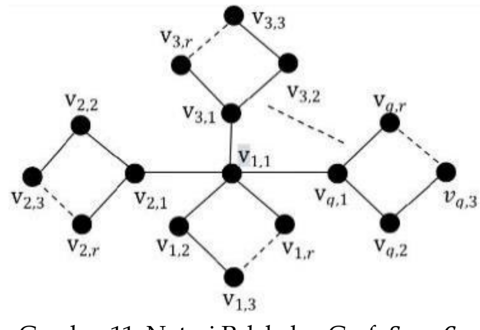
Tabel 2. Hasil Pelabelan $L(3,1)$ pada Graf $S_q \rhd C_r$

r	$\lambda_{3,1}(S_3 \rhd C_r)$	$\lambda_{3,1}(S_4 \rhd C_r)$	$\lambda_{3,1}(S_5 \rhd C_r)$
1	8	8	9
2	7	8	9
3	7	8	9

Berdasarkan Tabel 2, diperoleh konjektur bahwa:

$$\lambda_{3,1}(S_q \rhd C_r) = \begin{cases} 8, & \text{jika } q = r = 3, \\ q+4, & \text{jika } q \geq 4 \text{ atau } r \geq 4. \end{cases}$$

Saat $q = 3$, nilai minimum *span*-nya adalah 7 (untuk $r \geq 4$). saat $q = 4$, nilai minimum span-nya adalah 8 (untuk $r \geq 3$). Saat $q = 5$ nilai minimum *span*-nya adalah 9 (untuk $r \geq 3$). Selain itu, dalam struktur graf $S_q \rhd C_r$ yang diilustrasikan pada Gambar 11, terdapat penambahan dua sisi untuk graf S_q yaitu $v_{1,1}v_{1,2}$ dan $v_{1,1}v_{1,r}$ sehingga membentuk S_{q+2} dengan nilai minimum *span* $q+4$. Dengan demikian, diperoleh konjektur bahwa untuk $q \geq 4$ dan $r \geq 3$, nilai minimum *span*-nya adalah $q+4$. Akan dilakukan pembuktian konjektur terhadap graf $S_q \rhd C_r$ dengan $r \geq 3$.



Gambar 11. Notasi Pelabelan Graf $S_q \rhd C_r$.

Graf S_q, S_{q+2}, dan C_r merupakan subgraf dari $S_q \rhd C_r$. Merujuk pada Teorema 2 dan 3, S_q memiliki nilai minimum *span* $\lambda_{3,1}(S_q) = q + 2$, S_{q+2} memiliki nilai minimum *span* $\lambda_{3,1}(S_{q+2}) = q + 4$, dan C_r memiliki nilai minimum *span* $\lambda_{3,1}(C_n) = 6$ untuk $n \geq 3$ serta $\lambda_{3,1}(C_n) = 4$ untuk n kelipatan 4. Berdasarkan Teorema 2.1, $\lambda_{3,1}(S_3 \rhd C_r) \geq \lambda_{3,1}(S_{q+2}) = q + 4$.

Berikut didefinisikan pola pelabelan $L(3,1)$ pada graf $S_q \rhd C_r$, dengan pemetaan:

a. Jika $r \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$

$$f(v_{1,j}) = \begin{cases} 0, & \text{jika } j \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3) \\ 3, & \text{jika } j \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3) \\ 6, & \text{jika } j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3) \end{cases}$$

$$f(v_{2,j}) = \begin{cases} 4, & \text{jika } j \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3) \\ 7, & \text{jika } j \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3) \\ 1, & \text{jika } j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3) \end{cases}$$

$$f(v_{3,j}) = \begin{cases} 5, & \text{jika } j = 1 \\ 2, & \text{jika } j = 2 \\ 8, & \text{jika } j = r = 3 \\ 6, & \text{jika } j = 3 \neq r \\ 3, & \text{jika } j \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq 1 \\ 7, & \text{jika } j \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq 2 \\ 1, & \text{jika } j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq 3 \end{cases}$$

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} i + 3, & \text{jika } j \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3),\ i \geq 4 \\ i - 3, & \text{jika } j \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3) \\ i, & \text{jika } j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3) \end{cases}$$

b. Jika $r \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$

$$f(v_{1,j}) = \begin{cases} 0, & \text{jika } j = 1 \\ 4, & \text{jika } j = 2 \\ 1, & \text{jika } j = 3 \\ 6, & \text{jika } j \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq 1 \\ 0, & \text{jika } j \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq 2 \\ 3, & \text{jika } j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq 3 \end{cases}$$

$$f(v_{2,j}) = \begin{cases} 3, & \text{jika } j = 1 \\ 7, & \text{jika } j = 2 \\ 2, & \text{jika } j = r - 1 \\ 6, & \text{jika } j = r \\ 1, & \text{jika } j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq r - 1 \\ 4, & \text{jika } j \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3),\ j \neq r, \text{ dan } j \neq 1 \\ 7, & \text{jika } j \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq 2 \end{cases}$$

$$f(v_{3,j}) = \begin{cases} 5, & \text{jika } j = 1 \\ 2, & \text{jika } j = 2 \\ 6, & \text{jika } j = 3 \\ 1, & \text{jika } j \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq 1 \\ 4, & \text{jika } j \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq 2 \\ 7, & \text{jika } j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq 3 \end{cases}$$

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} i + 3, & \text{jika } j = 1,\ i \geq 4 \\ i - 1, & \text{jika } j = 2 \\ i + 2, & \text{jika } j = 3 \\ i - 2, & \text{jika } j = 4 \\ i + 3, & \text{jika } j \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq 2 \\ i, & \text{jika } j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq 3 \\ i - 3, & \text{jika } j \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3),\ j \neq 1, \text{ dan } j \neq 4 \end{cases}$$

c. Jika $r \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$

$$f(v_{1,j}) = \begin{cases} 0, & \text{jika } j \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq r - 1 \\ 3, & \text{jika } j \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq r \\ 6, & \text{jika } j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3) \\ 1, & \text{jika } j = r - 1 \\ 4, & \text{jika } j = r \end{cases}$$

$$f(v_{2,j}) = \begin{cases} 5, & \text{jika } j = 1 \\ 2, & \text{jika } j = 2 \\ 7, & \text{jika } j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3) \\ 4, & \text{jika } j \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq 1 \\ 1, & \text{jika } j \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq 2 \end{cases}$$

$$f(v_{3,j}) = \begin{cases} 6, & \text{jika } j \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq r - 1 \\ 3, & \text{jika } j \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq r \\ 0, & \text{jika } j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3) \\ 4, & \text{jika } j = r - 1 \\ 1, & \text{jika } j = r \end{cases}$$

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} i + 3, & \text{jika } j \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq r - 1,\ i \geq 4 \\ i, & \text{jika } j \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3) \text{ dan } j \neq r \\ i - 3, & \text{jika } j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3) \\ i + 1, & \text{jika } j = r - 1 \\ i - 2, & \text{jika } j = r \end{cases}$$

Simpul $v_{i,j}$ ditunjukkan pada Gambar 11 dengan keterangan sebagai berikut:

$v_{1,1}$: simpul yang berderajat $q + 2$,

$v_{2,1}, v_{3,1}, \dots, v_{q,1}$: simpul yang berderajat 3, dan

$v_{2,2}, v_{2,3}, \dots, v_{2,r}, v_{3,2}, v_{3,3}, \dots, v_{3,r}, \dots, v_{q,2}, v_{q,3}, \dots, v_{q,r}$: simpul yang berderajat 2.

Langkah pembuktian tersebut menghasilkan teorema berikut:

Teorema 6 Misalkan graf H adalah sebuah graf $S_q \rhd C_r$ dengan $q \geq 3$ dan $r \geq 3$. Maka, nilai minimum *span* dari pelabelan $L(3,1)$ pada H adalah

$$\lambda_{3,1}(S_q \rhd C_r) = \begin{cases} 8, & \text{jika } q = r = 3, \\ q+4, & \text{jika } q \geq 4 \text{ atau } r \geq 4. \end{cases}$$

PENUTUP

SIMPULAN

Telah ditunjukkan pelabelan $L(3,1)$ pada graf $S_q \rhd C_r$ untuk beberapa nilai q dan r. Berdasarkan pengamatan pola dan bukti matematis, nilai minimum *span* dari pelabelan $L(3,1)$ pada graf $S_q \rhd C_r$ dengan $q \geq 3$ dan $r \geq 3$ adalah

$$\lambda_{3,1}(S_q \rhd C_r) = \begin{cases} 8, & \text{jika } q = r = 3, \\ q+4, & \text{jika } q \geq 4 \text{ atau } r \geq 4. \end{cases}$$

SARAN

Saran untuk penelitian selanjutnya dapat dikaji nilai minimum *span* pelabelan $L(3,1)$ pada graf lain seperti graf operasi korona.

DAFTAR PUSTAKA

Accardi, L., Ghorbal, A. B., Obata, N. (2004). Monotone Independence, Comb Graphs and Bose-Einstein Condensation. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Proability and Related Topics,* 7(3), 419-435.

Christianti, A. (2015). *Penentuan Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Tanpa Loop.* (Skripsi Sarjana, Universitas Lampung)

Damayanti, R. T. (2011). Automorfisme graf bintang dan graf lintasan. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, 2(1), 35-40.

Febryani, F. (2023). *Pelabelan Titik* L(3,1) *pada Graf Supercycle*. (Skripsi Sarjana, Universitas Pendidikan Indonesia).

Fernandez, C., Flores, A., Tomova, M., & Wyels, C. (2008). The Radio Number of Gear Graphs. *arXiv preprint arXiv:0809.2623*.

Ghosh, S., Pal, A. (2016). L(3,1)-Labeling of Some Simple Graphs. *AMO - Advanced Modelling and Optimization* , 18, 243 - 248.

Griggs, J. R., & Yeh, R. K. (1992). Labeling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, *5*(4), 586-595.

Ilyas, M., Yundari, Y., Pasaribu, M. (2021). Pelabelan *Graceful* dan Skolem *Graceful* pada Graf U-Bintang dan Graf $S_{n,3}$. *Bimaster,* 10(2), 219-228.

Komarullah,, H. *Pelabelan L(2, 1) pada Graf Buku Segitiga, Graf Kerucut, Graf* Tadpole *dan Graf* Dumbbell *Serta Graf Hasil Identifikasi Titik Dari Graf Buku Segitiga dan Graf Lintasan* (Skripsi Sarjana, Universitas Jember).

Kustanti, K. (2017). *Pelabelan (2,1) pada Graf Hasil Operasi comb Graf Lingkaran dan Graf Bintang*. (Skripsi Sarjana, UIN Sunan Gunung Djati).

Rosyidah, N. M., Zahidah, S., Purwati, U. D., Susilowati, L. (2021). On *Comb* Product Graphs with Respect to the Complement Metric Dimension. *AIP Conference Proceedings, 2329(1)*.

Sagala, Y. C., Susiana. (2018). Pelabelan L(2,1) pada Graf Sierpinski S(n,k). *Junal Sains Indonesia* , 42(1), 22 - 24.

Saputro, S. W., Mardiana, N., & Purwasih, I. A. (2013). The metric dimension of *comb* product graphs. In *Graph Theory Conference in Honor of Egawa's 60th Birthday, September* (Vol. 10).

Shao, Z., Yeh, R. K., Zhang, D. (2008). The (2,1)-Labelling on Graphs and Frequency Assignment Problem. *Applied Mathematics Letters, 21*, 37-41.

Umam, I. A. (2021). *Pelabelan L(2,1) pada Graf Lollipop $L_{m,n}$* . (Skripsi Sarjana, Universitas Jember)