MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 13 No 02
Tahun 2025

PELABELAN TOTAL (A,D)-SISI ANTIAJAIB SUPER PADA GRAF $G + K_1$

Christyan Tamaro Nadeak
Program Studi Sains Data, Fakultas Sains, Institut Teknologi Sumatera
christyan.nadeak@sd.itera.ac.id*

Abstrak

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf berode n dan berukuran m. Suatu pemetaan bijeksi $f: V(G) \cup E(G) \to \{1,2, \dots, m+n\}$ disebut sebagai Pelabelan Total (a, d)-sisi Antiajaib jika himpunan bobot sisi $W = \{w(uv) = f(u) + f(uv) + f(v) \mid uv \in E\}$ membentuk suatu barisan aritmatika dengan suku awal a dan beda d, atau sama dengan himpunan $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(m-1)d\}$. Pelabelan Total (a, d)-sisi Antiajaib disebut sebagai Pelabelan Total (a, d)-sisi Antiajaib Super jika pelabelan untuk himpunan titiknya adalah $f: V(G) \to \{1,2, \dots, n\}$. Pada penelitian ini akan dibahas Pelabelan Total (a, d)-sisi Antiajaib Super pada graf $G + K_1$.
Kata Kunci: Pelabelan Total (a, d)-sisi Antiajaib, Pelabelan Total (a, d)-sisi Antiajaib Super, Graf Join, Graf Bintang.

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a graph of order n and size m. A bijection $f: V(G) \cup E(G) \to \{1,2, \dots, m+n\}$ is called (a, d)-edge antimagic total labeling if the set of edge weight $W = \{w(uv) = f(u) + f(uv) + f(v) \mid uv \in E\}$ forms an arithmetic sequence with initial term a and difference d, or equals to the set $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(m-1)d\}$. An (a, d)-edge antimagic total labeling is called super (a, d)-edge antimagic total labeling if the labelling of the vertex set is $f: V(G) \to \{1,2, \dots, n\}$. This study discuss a super (a, d)-edge antimagic total labeling for graph $G + K_1$.
Keywords: *(a, d)-edge antimagic total labeling, super (a, d)-edge antimagic total labeling, join graph, star graph.*

PENDAHULUAN

Teori graf adalah cabang dari matematika diskrit yang mempelajari struktur yang terdiri dari dua elemen utama, yaitu simpul dan sisi yang menghubungkan pasangan simpul tersebut. Secara formal, graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut $G = (V, E)$ di mana V adalah himpunan simpul dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan elemen-elemen dari V. Setiap sisi $e \in E$ dapat digambarkan sebagai pasangan terurut (u, v) dengan $u, v \in V$, yang menyatakan bahwa ada hubungan antara simpul u dan v.

Teori graf memiliki aplikasi yang sangat luas dan berperan penting dalam berbagai bidang ilmu, seperti ilmu komputer, jaringan komunikasi, hingga biologi dan ilmu sosial. Sejak diperkenalkan oleh matematikawan Swiss, Leonhard Euler, melalui pemecahan masalah "Jembatan Königsberg" pada abad ke-18, konsep teori graf telah berkembang pesat. Permasalahan yang awalnya berfokus pada penentuan apakah mungkin berjalan melalui tujuh jembatan di kota Königsberg tanpa melewati jembatan yang sama dua kali, kini telah menjadi landasan dalam berbagai aplikasi, seperti algoritma pencarian di jaringan komputer, optimasi jalur pada sistem transportasi, analisis sosial, serta permodelan berbagai jenis hubungan dalam data besar.

Teori graf memiliki berbagai aplikasi dalam banyak masalah matematis dan komputasional, seperti pencarian jalur terpendek, penjadwalan, pewarnaan graf, dan pelabelan graf. Pelabelan graf G adalah suatu pemetaan dari himpunan titik $V(G)$ atau himpunan sisi $E(G)$ ke bilangan bulat positif yang disebut sebagai label. Terdapat berbagai macam pelabelan pada graf, salah satunya adalah Pelabelan Total (a, d)-sisi Antiajaib Super.

Konsep Pelabelan Total (a, d)-sisi Antiajaib diperkenalkan pertama kali oleh Simanjuntak, Miller, dan Bertault yang didefinisikan sebagai fungsi bijektif $f: (V(G) \cup E(G)) \to \{1,2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ yang memenuhi himpunan bobot sisi $W = \{w(uv) = f(u) + f(uv) + f(v) \mid uv \in E\}$ membentuk suatu barisan aritmatika dengan suku awal a dan beda d, atau sama dengan himpunan $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(|E(G)|-1)d\}$ (Simanjuntak dkk. 2000). Pelabelan Total (a, d)-sisi Antiajaib disebut sebagai Pelabelan Total (a, d)-sisi Antiajaib Super jika pelabelan untuk himpunan titiknya adalah $f: V(G) \to \{1,2, \dots, |V(G)|\}$.

Dalam penelitian ini akan dibahas Pelabelan Total (a, d)-sisi Antiajaib Super pada graf $G + K_1$.

KAJIAN TEORI

Graf G adalah suatu pasangan terurut $G = (V, E)$ dimana V merupakan himpunan titik dan E merupakan himpunan sisi, dengan $E \subseteq V^2$. Kardinalitas dari himpunan titik $V(G)$ disebut sebagai orde dari graf G, sedangkan kardinalitas dari himpunan sisi $E(G)$ disebut sebagai ukuran dari graf G. Dua titik u dan v dikatakan saling bertetangga jika terdapat sisi yang menghubungkan antara titik u dan titik v.

Komplemen dari graf G, dinotasikan dengan $\bar{G}$ adalah suatu graf yang dibentuk dari graf G dengan $V(\bar{G}) = V(G)$ dan $E(\bar{G}) = \{uv \mid u, v \in V(G), uv \notin E(G)\}$. Suatu graf berorde n disebut sebagai Graf Lengkap, dinotasikan dengan K_n jika semua pasangan titik pada graf tersebut saling bertetangga. Graf $\overline{K_n}$ merupakan suatu graf berorde n yang tidak memiliki sisi.

Diberikan dua graf G_1 dan G_2. Operasi join antara graf G_1 dan G_2, dinotasikan dengan $G_1 + G_2$, adalah suatu graf yang terbentuk dari graf G_1 dan G_2 dan menghubungkan setiap titik yang terdapat pada graf G_1 dengan setiap titik yang terdapat pada graf G_2. Secara formal, $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{u_1u_2 \mid u_1 \in V(G_1), u_2 \in V(G_2)\}$.

Graf Bintang, dinotasikan dengan S_n, adalah suatu graf berorde n di mana terdapat satu titik yang bertetangga dengan $n - 1$ titik lainnya, dan $n - 1$ titik tersebut hanya bertetangga dengan satu titik itu. Graf Bintang S_n merupakan graf operasi join $\overline{K_{n-1}} + K_1$.

Suatu bijeksi $f: \big(V(G) \cup E(G)\big) \to \{1,2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ disebut sebagai Pelabelan Total (a, d)-sisi Antiajaib jika himpunan bobot sisi $W = \{w(uv) = f(u) + f(uv) + f(v) \mid uv \in E\}$ membentuk suatu barisan aritmatika dengan suku awal a dan beda d, atau sama dengan himpunan $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (|E(G)| - 1)d\}$. Pelabelan Total (a, d)-sisi Antiajaib disebut sebagai Pelabelan Total (a, d)-sisi Antiajaib Super jika pelabelan untuk himpunan titiknya adalah $f: V(G) \to \{1,2, \dots, |V(G)|\}$.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam studi ini adalah kajian pustaka. Kajian pustaka merupakan pendekatan yang digunakan untuk mengumpulkan dan menganalisis informasi yang telah dipublikasikan sebelumnya dalam berbagai sumber literatur.

Adapun langkah-langkah yang telah dilakukan diantaranya:

1. Menelaah definisi dari Pelabelan Total (a, d)-sisi Antiajaib Super dan operasi join antara dua graf.
2. Memberikan contoh sederhana dari Pelabelan Total (a, d)-sisi Antiajaib Super pada Graf Bintang S_n
3. Memberikan pembuktian dan karakteristik Pelabelan Total (a, d)-sisi Antiajaib Super pada graf $G + K_1$ secara umum

HASIL DAN PEMBAHASAN

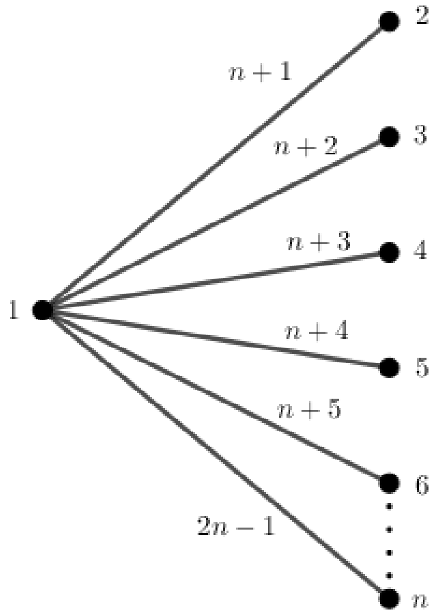
Berikut merupakan hasil dari penelitian ini, dimulai dari eksistensi pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super pada beberapa kelas graf dengan operasi join terhadap K_1.

Teorema 3.1: Graf S_n memiliki pelabelan total $(n + 4, 2)$-sisi antiajaib super.

Bukti: Definisikan pelabelan f bagi graf S_n sebagai berikut:

$$f(v_i) = i, f\big(v_1v_j\big) = n + j - 1; i \geq 1, j \geq 2$$

Dengan pelabelan f seperti di atas, maka bobot masing-masing sisi adalah $w\big(v_1v_j\big) = n + 2j$. Dapat dengan mudah dilihat bahwa $\{w(v_1v_2), w(v_1v_3), \dots, w(v_1v_n)\}$ membentuk sebuah barisan aritmatika dengan suku awal $n + 4$ dan beda 2, sehingga f merupakan pelabelan total $(n + 4, 2)$-sisi antiajaib super.



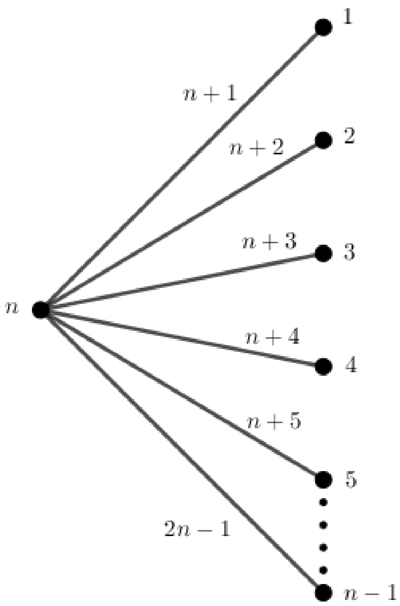
Gambar 3.1. Pelabelan Total $(n+4, 2)$-Sisi Antiajaib Super pada graf S_n

Teorema 3.1: Graf S_n memiliki pelabelan total $(2n+2, 2)$-sisi antiajaib super.

Bukti: Definisikan pelabelan f bagi graf S_n sebagai berikut:

$$f(v_1) = n, f(v_i) = i-1, f(v_1 v_j) = n+j-1; i, j \geq 2$$

Dengan pelabelan f seperti di atas, maka bobot masing-masing sisi adalah $w(v_1 v_j) = 2n+2j-2$. Dapat dengan mudah dilihat bahwa $\{w(v_1 v_2), w(v_1 v_3), \dots, w(v_1 v_n)\}$ membentuk sebuah barisan aritmatika dengan suku awal $2n+2$ dan beda 2, sehingga f merupakan pelabelan total $(2n+2, 2)$-sisi antiajaib super.



Gambar 3.2. Pelabelan Total $(2n+2, 2)$-Sisi Antiajaib Super pada graf S_n

Teorema 3.3: Misalkan graf $G = (V, E)$ dengan n titik dan m sisi memiliki pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super. Maka graf $G + K_1$ memiliki pelabelan total $(a+1, d)$-sisi antiajaib super untuk $a = 2n - m + 3$ dan $d = 2$.

Bukti:

Misalkan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf G berturut-turut adalah $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Misalkan bijeksi $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2, \dots, m+n\}$ merupakan pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super bagi graf G, dengan tanpa mengurangi keumuman misalkan $f(v_i) = i$. Misalkan u adalah titik pada graf K_1, dan $E(G + K_1) = E(G) \cup \{uv_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Definisikan f_k sebagai pelabelan baru bagi graf $G + K_1$ dengan ketentuan sebagai berikut:

$$f_k(v_i) = f(v_i), f_k(u) = n+1,$$
$$f_k(e_j) = f(e_j) + 1, f_k(uv_i) = n + m + i + 1.$$

Dengan pelabelan seperti ini, maka bobot $w(uv_1), w(uv_2), \dots, w(uv_n)$ membentuk suatu barisan aritmatika dengan beda 2, yaitu $\{2n+m+4, 2n+m+6, \dots, 4n+m+2\}$. Untuk pelabelan f total (a,d)-sisi antiajaib super pada graf G, misalkan bobotnya adalah $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(m-1)d\}$. Dengan pelabelan f_k, maka bobotnya menjadi $\{a+1, a+d+1, \dots, a+(m-1)d+1\}$. Agar bobot pada sisi pada graf G dan sisi uv_i tetap membentuk barisan aritmatika, kita akan pandang beberapa kasus:

Kasus 1: Nilai $d = 2$, dan barisan bobot yang dapat dibentuk adalah $\{2n+m+4, a+1, 2n+m+6, a+3, \dots\}$ dengan beda dari barisan bobot ini adalah 1. Perhatikan bahwa karena panjang barisan bobot $\{2n+m+4, 2n+m+6, \dots, 4n+m+2\}$ adalah n dan $\{a+1, a+3, a+5, \dots, a+2(m-1)+1\}$ adalah m, maka agar dapat dibentuk barisan $\{2n+m+4, a+1, 2n+m+6, a+3, \dots\}$ haruslah $m = n$ atau $m = n-1$. Kemudian dari barisan tersebut haruslah $a = 2n+m+4$. Perhatikan bahwa bobot maksimum dari graf G adalah $a + 2(m-1) \leq (n-1) + n + (m+n)$, sehingga $2n+m+4+2m-2 = 2n+3m+2 \leq 3n+m-1 \Rightarrow 2m-n+3 \leq 0$. Untuk $m = n$, maka $n+3 \leq 0$, sedangkan untuk $m = n-1$, maka $n+1 \leq 0$, di mana keduanya merupakan suatu kontradiksi.

Kasus 2: Nilai $d = 2$, dan barisan bobot yang dapat dibentuk adalah $\{a+1, 2n+m+4, a+3, 2n+m+6, \ldots\}$ dengan beda dari barisan bobot ini adalah 1. Perhatikan bahwa karena panjang barisan bobot $\{2n+m+4, 2n+m+6, \ldots, 4n+m+2\}$ adalah n dan $\{a+1, a+3, a+5, \ldots, a+2(m-1)+1\}$ adalah m, maka agar dapat dibentuk barisan $\{2n+m+4, a+1, 2n+m+6, a+3, \ldots\}$ haruslah $m = n$ atau $m = n+1$. Kemudian dari barisan tersebut haruslah $a = 2n+m+2$. Perhatikan bahwa bobot maksimum dari graf G adalah $a + 2(m-1) \leq (n-1) + n + (m+n)$, sehingga $2n+m+2+2m-2 = 2n+3m \leq 3n+m-1 \Rightarrow 2m-n+1 \leq 0$. Untuk $m = n$, maka $n+1 \leq 0$, sedangkan untuk $m = n+1$, maka $n+3 \leq 0$, di mana keduanya juga merupakan suatu kontradiksi.

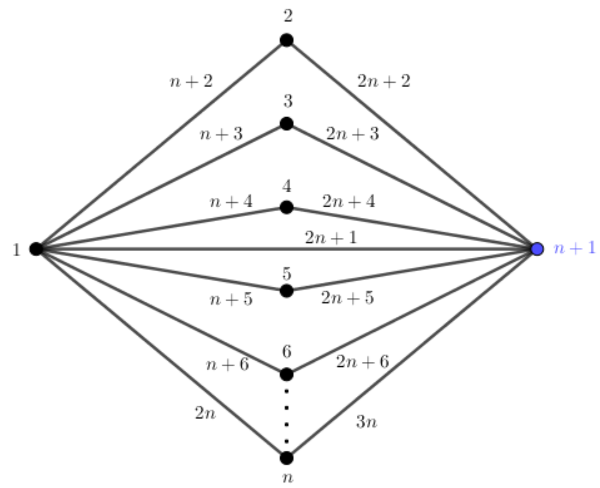
Kasus 3: Nilai $d = 2$, dan barisan bobot yang dapat dibentuk adalah $\{2n+m+4, 2n+m+6, \ldots, 4n+m+2, a+1, a+3, a+5, \ldots, a+2(m-1)+1\}$ dengan beda dari barisan bobot ini adalah 2. Kemudian dari barisan tersebut haruslah $a = 4n+m+3$. Perhatikan bahwa bobot maksimum dari graf G adalah $a+2(m-1) \leq (n-1)+n+(m+n)$, sehingga $4n+m+3+2m-2 = 4n+3m+1 \leq 3n+m-1 \Rightarrow n+2m+2 \leq 0$, yang merupakan suatu kontradiksi.

Kasus 4: Nilai $d = 2$, dan barisan bobot yang dapat dibentuk adalah $\{a+1, a+3, a+5, \ldots, a+2(m-1)+1, 2n+m+4, 2n+m+6, \ldots, 4n+m+2\}$ dengan beda dari barisan bobot ini adalah 2. Kemudian dari barisan tersebut haruslah $a+2m+1 = 2n+m+4$, sehingga $a = 2n-m+3$. Perhatikan bahwa bobot maksimum dari graf G adalah $a+2(m-1) \leq (n-1)+n+(m+n)$, sehingga $2n-m+3+2m-2 = 2n+m+1 \leq 3n+m-1 \Rightarrow 2 \leq n$, sedangkan bobot minimum dari graf G adalah $1+2+(n+1) = n+4 \leq a = 2n-m+3$. Sehingga $m \leq n-1$. Jadi dalam pelabelan f_k ini hanya Kasus 4 yang memenuhi. ∎

Dalam konteks graf G merupakan graf terhubung, di mana $m \geq n-1$, maka graf G yang memenuhi pada Kasus 4 Teorema 3.1 adalah ketika $m = n-1$, atau dengan kata lain ketika G merupakan suatu graf pohon. Sehingga nilai dari a adalah $n+4$ dan $d = 2$. Teorema 3.1 membuktikan bahwa Graf bintang S_n, adalah contoh graf pohon yang memiliki pelabelan total $(n+4, 2)$-sisi antiajaib super. Kemudian berdasarkan Teorema 3.3, maka pelabelan graf bagi graf $S_n + K_1$ adalah sebagai berikut:

$$f_k(v_i) = i, f_k(v_1 v_j) = n+j, f_k(u) = n+1,$$
$$f_k(uv_i) = n+m+i+1$$

Dapat dilihat bahwa $\{w(v_1v_2), \ldots w(v_1v_n), w(uv_1), \ldots, w(uv_n)\}$ membentuk sebuah barisan aritmatika dengan suku awal $n+5$ dan beda 2.



Gambar 3.3. Pelabelan Total $(n+5, 2)$-Sisi Antiajaib Super pada graf $S_n + K_1$

Teorema 3.4: Misalkan graf $G = (V, E)$ dengan n titik dan m sisi memiliki pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib super. Maka graf $G + K_1$ memiliki pelabelan total $(n+5, d)$-sisi antiajaib super untuk $a = 2n+2$ dan $d = 2$.

Bukti:

Misalkan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf G berturut-turut adalah $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Misalkan bijeksi $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2, \ldots, m+n\}$ merupakan pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib super bagi graf G, dengan tanpa mengurangi keumuman misalkan $f(v_i) = i$. Misalkan u adalah titik pada graf K_1, dan $E(G+K_1) = E(G) \cup \{uv_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Definisikan f_k sebagai pelabelan baru bagi graf $G + K_1$ dengan ketentuan sebagai berikut:

$$f_k(v_i) = f(v_i) + 1, f_k(u) = 1,$$
$$f_k(e_j) = f(e_j) + n + 1, f_k(uv_i) = n + i + 1.$$

Dengan pelabelan seperti ini, maka bobot $w(uv_1), w(uv_2), \ldots, w(uv_n)$ membentuk suatu barisan aritmatika dengan beda 2, yaitu $\{n+5, n+7, \ldots, 3n+3\}$. Untuk pelabelan f total (a,d)-sisi antiajaib super pada graf G, misalkan bobotnya adalah $\{a, a+d, a+$

$2d, \ldots, a + (m-1)d\}$. Dengan pelabelan f_k, maka bobotnya menjadi $\{a + n + 3, a + d + n + 3, \ldots, a + (m-1)d + n + 3\}$. Agar bobot pada sisi pada graf G dan sisi uv_i tetap membentuk barisan aritmatika, kita akan pandang beberapa kasus:

Kasus 1: Nilai $d = 2$, dan barisan bobot yang dapat dibentuk adalah $\{n + 5, a + n + 3, n + 7, a + d + n + 3, \ldots\}$ dengan beda dari barisan bobot ini adalah 1. Maka $a + n + 3 = n + 6$, sehingga $a = 3$. Tetapi perhatikan bahwa bobot minimum dari graf G adalah $1 + 2 + (n + 1) \leq a \Longrightarrow 4 + n \leq 3$, suatu kontradiksi.

Kasus 2: Nilai $d = 2$, dan barisan bobot yang dapat dibentuk adalah $\{a + n + 3, n + 5, a + d + n + 3, n + 7, \ldots\}$ dengan beda dari barisan bobot ini adalah 1. Maka $a + n + 3 = n + 4$, sehingga $a = 1$. Tetapi perhatikan bahwa bobot minimum dari graf G adalah $1 + 2 + (n + 1) \leq a \Longrightarrow 4 + n \leq 1$, suatu kontradiksi.

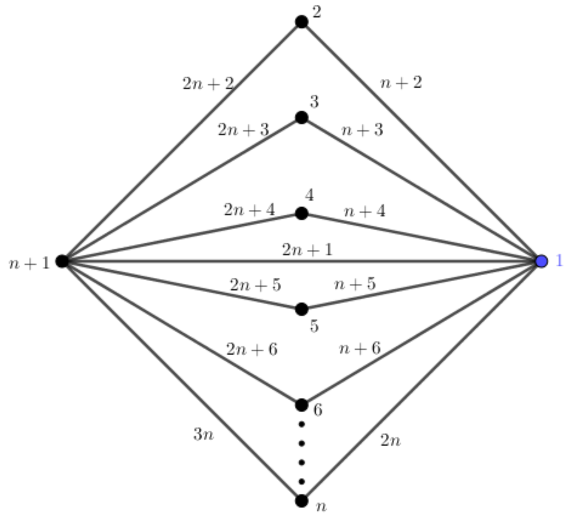
Kasus 3: Nilai $d = 2$, dan barisan bobot yang dapat dibentuk adalah $\{a + n + 3, a + d + n + 3, \ldots, a + (m-1)d + n + 3, n + 5, n + 7, \ldots, 3n + 3\}$ dengan beda dari barisan bobot ini adalah 2. Maka $a + 2m - 2 + n + 3 = n + 3$, sehingga $a = 2 - 2m \leq 0$, suatu kontradiksi.

Kasus 4: Nilai $d = 2$, dan barisan bobot yang dapat dibentuk adalah $\{n + 5, n + 7, \ldots, 3n + 3, a + n + 3, a + d + n + 3, \ldots, a + (m-1)d + n + 3\}$ dengan beda dari barisan bobot ini adalah 2. Maka $3n + 5 = a + n + 3$, sehingga $a = 2n + 2$. Jadi dalam pelabelan f_k ini hanya Kasus 4 yang memenuhi. ■

Teorema 3.2 telah membuktikan bahwa Graf bintang S_n adalah contoh graf yang memiliki pelabelan total $(2n + 2, 2)$ -sisi antiajaib super. Kemudian berdasarkan Teorema 3.4 maka pelabelan graf bagi graf $S_n + K_1$ adalah sebagai berikut:

$$f_k(v_1) = n + 1, f_k(v_i) = i; 2 \leq i \leq n, f_k(u) = 1,$$
$$f_k(v_1 v_j) = 2n + 1 + j, f_k(uv_i) = n + i; 2 \leq i \leq n,$$
$$f_k(uv_1) = 2n + 1.$$

Dapat dilihat bahwa $\{w(uv_2), \ldots w(uv_n), w(v_1 u), w(v_1 v_2), \ldots, w(v_1 v_n)\}$ membentuk sebuah barisan aritmatika dengan suku awal $n + 5$ dan beda 2.



Gambar 3.4. Pelabelan Total $(n + 5, 2)$-Sisi Antiajaib Super pada graf $S_n + K_1$

Dapat dilihat bahwa bentuk pelabelan pada Gambar 3.4 sama seperti pada Gambar 3.3.

PENUTUP

SIMPULAN

Hasil dari penelitian ini adalah terdapat Pelabelan Total $(n + 4, 2)$ -sisi dan $(2n + 2, 2)$ -sisi Antiajaib Super pada Graf Bintang S_n. Kemudian secara umum, jika graf G berorde n dan berukuran m memiliki pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super, maka graf $G + K_1$ memiliki pelabelan total $(a + 1, d)$-sisi antiajaib super untuk $a = 2n - m + 3$ dan $d = 2$, dan juga pelabelan total $(n + 5, d)$ -sisi antiajaib super untuk $a = 2n + 2$ dan $d = 2$. Salah satu graf G yang memenuhi kedua kondisi tersebut adalah Graf Bintang S_n.

SARAN

Penelitian dapat diperluas untuk graf operasi join yang lebih umum, yaitu graf $G_1 + G_2$, dengan mempertimbangkan konsep pelabelan seperti pada pembuktian Teorema 3.3 dan Teorema 3.4

DAFTAR PUSTAKA

Harary, F. Graph Theory. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994.

Skiena, S. "Cycles, Stars, and Wheels." §4.2.3 in Implementing Discrete Mathematics:

Combinatorics and Graph Theory with Mathematica. Reading, MA: Addison-Wesley, pp. 83 and 144-147, 1990.

R. Diestel, Graph Theory. Springer-Verlag Heidelberg. 2005.

Simanjuntak R, Bertault F dan Miller M. Two new (a, d)-antimagic graph labellings. Proc. of Eleventh Australian Workshop of Combinatorial Algorithm, 2000.