

ANALISI DINAMIK MODEL KOINFEKSI PENYEBARAN PENYAKIT FLU BABI (H1N1) DAN FLU BURUNG (H5N1)

Evi Khoirotun Nisa'

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : evi.20052@mhs.unesa.ac.id

Rudianto Artiono

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : rudiantoartiono@unesa.ac.id*

Abstrak

Koinfeksi antara penyakit Flu Babi dan Flu Burung merupakan tantangan dalam dunia medis yang membutuhkan perhatian serius. Flu Babi dan Flu Burung berdampak besar pada peternakan unggas serta menyebabkan epidemik pada manusia. Menurut Depkes RI, 2014, jumlah kasus di Indonesia sebanyak 197 kasus Flu Burung dan 165 diantaranya meninggal dunia, sementara pada tahun 2009, terjadi pandemi Flu Babi global yang disebabkan oleh virus H1N1. Penelitian ini akan menganalisis model koinfeksi Flu Babi dan Flu Burung untuk memahami intraksi antar penyakit pada dinamika penyebaran infeksi pada populasi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa terdapat empat titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit, titik kesetimbangan endemik Flu Babi, titik kesetimbangan endemik Flu Burung, serta titik kesetimbangan endemik koinfeksi. Bilangan reproduksi dasar ditentukan menggunakan Next Generation Matrix untuk kasus titik kesetimbangan bebas penyakit menghasilkan dua bilangan reproduksi dasar, yaitu bilangan reproduksi dasar Flu Babi (R_{01}) dan bilangan reproduksi dasar Flu Burung (R_{02}). Ketika $R_{01} < 1$ dan $R_{02} < 1$, titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil, yang berarti kedua penyakit akan hilang dari populasi dalam jangka waktu tertentu. Jika $R_{01} > 1$ dan $R_{02} < 1$, menunjukkan bahwa penyakit Flu Babi akan tetap ada dalam populasi. Sebaliknya, jika $R_{01} < 1$ dan $R_{02} > 1$, penyakit Flu Burung akan tetap ada dalam populasi. Jika $R_{01} > 1$ dan $R_{02} > 1$, keduanya akan tetap ada dalam populasi. Diperoleh 2 bilangan reproduksi dasar yaitu, $\lambda_1 = R_{0,1} = \frac{\Lambda\beta_1}{\mu(\alpha+\mu)}$ sebagai bilangan reproduksi dasar untuk penyakit Flu Babi sedangkan $\lambda_2 = R_{0,2} = \frac{\Lambda\beta_2}{\mu(\delta_2+\mu)}$ sebagai bilangan reproduksi dasar untuk penyakit Flu Burung. Hasil dari simulasi numerik yang dilakukan menggunakan MATLAB juga mendukung hasil analisis tersebut.

Kata Kunci: Flu Babi (H1N1), Flu Burung (H5N1), Koinfeksi, Pemodelan Matematika

Abstract

Coinfection between Swine Flu and Bird Flu is a challenge in the medical world that requires serious attention. Swine Flu and Bird Flu have a major impact on poultry farming and cause epidemics in humans. According to the Indonesian Ministry of Health, 2014, the number of cases in Indonesia was 197 cases of Bird Flu and 165 of them died, while in 2009, there was a global Swine Flu pandemic caused by the H1N1 virus. This study will analyze the Swine Flu and Bird Flu coinfection model to understand the interaction between diseases in the dynamics of infection spread in the population. The results of the study showed that there were four equilibrium points, namely the disease-free equilibrium point, the endemic equilibrium point of Swine Flu, the endemic equilibrium point of Bird Flu, and the endemic equilibrium point of coinfection. The basic reproduction number is determined using the Next Generation Matrix for the case of a disease-free equilibrium point producing two basic reproduction numbers, namely the basic reproduction number of Swine Flu (R_{01}) and the basic reproduction number of Bird Flu (R_{02}). When $R_{01} < 1$ and $R_{02} < 1$, the disease-free equilibrium point will be stable, which means that both diseases will disappear from the population within a certain period of time. If $R_{01} > 1$ and $R_{02} < 1$, it indicates that Swine Flu disease will remain in the population. Conversely, if $R_{01} < 1$ and $R_{02} > 1$, Bird Flu disease will remain in the population. If $R_{01} > 1$ and $R_{02} > 1$, both will remain in the population. 2 basic reproduction numbers are obtained, namely, $\lambda_1 = R_{0,1} = \frac{\Lambda\beta_1}{\mu(\alpha+\mu)}$ as the basic reproduction number for Swine Flu disease while $\lambda_2 = R_{0,2} = \frac{\Lambda\beta_2}{\mu(\delta_2+\mu)}$ as the basic reproduction number for Bird Flu disease. The results of the numerical simulation carried out using MATLAB also support the results of the analysis.

Keywords: Swine Flu (H1N1), Bird Flu (H5N1), Coinfections, Mathematical Modeling

PENDAHULUAN

Influenza atau biasa disebut “flu” merupakan salah satu penyakit menular yang saat ini ditemukan tidak hanya di daerah tropis tetapi juga di daerah non tropis. Penyakit ini merupakan penyakit pernapasan menular yang disebabkan oleh virus influenza. Penyakit ini dapat tergolong ke dalam penyakit ringan hingga penyakit berat yang dapat mengakibatkan kematian. Virus penyebab penyebaran penyakit influenza merupakan virus RNA yang termasuk dalam familia *ortomyxoviridae* dan memiliki diameter 90-120 nanometer. Penyakit ini terdiri atas 3 tipe yaitu influenza tipe A (H1N1, H5N1), tipe B (Flu Perut) dan tipe C (Flu Ringan). (Abelson, 2009).

Di antara ketiga tipe penyakit tersebut influenza tipe A merupakan penyakit influenza yang dapat menyerang semua kelompok umur manusia dan hewan. Virus ini dapat ditularkan pada spesies lain dan dapat menimbulkan wabah yang berdampak besar pada peternakan unggas. Hal ini menimbulkan suatu wabah influenza manusia sehingga menyebabkan suatu epidemik. Sedangkan influenza tipe B merupakan penyakit influenza yang hanya menyerang manusia khususnya anak-anak dimana tingkat bahaya dari penyakit ini lebih rendah dari tipe A. Virus dari tipe B memiliki keragaman antigenetik yang relatif lebih sedikit. Oleh sebab itu, Influenza tipe B tidak menyebabkan suatu epidemik. Meskipun jarang terjadi, influenza tipe B seringkali disebut flu perut (*stomach flu*) oleh berbagai kalangan (Rendell, 2006). Selanjutnya influenza tipe C merupakan penyakit influenza yang paling ringan dari pada tipe A dan tipe B karena tidak menimbulkan kerusakan serius pada sistem pernapasan sehingga tidak menyebabkan wabah (Bedada, dkk., 2015).

Menyebarnya virus dari penyakit influenza tipe A (H1N1) ini telah menjadi wabah internasional yang mencemaskan warga di berbagai negara. Salah satu influenza tipe A Flu babi (*swine flu*) merupakan virus influenza baru yang menyebabkan penyakit di manusia. Virus ini telah menyebar ke berbagai penjuru dunia. Dahulu penyakit ini ditularkan melalui binatang, terutama babi namun kini terjadi penularan antar manusia sehingga yang penyakit

digolongkan dalam *public health emergency of international concern* (PHEIC). Gejala flu babi pada manusia berupa demam, batuk, nyeri tenggorokan, hidung berair, nyeri otot dan sendi, sakit kepala, menggigil, lesu, napas cepat, atau sesak nafas. Pada flu babi terlihat bahwa seseorang dapat menularkan virus sejak satu hari sebelum muncul gejala hingga 7 hari setelah orang tersebut merasakan gejala. (Wardhani, P. dkk, 2010)

Sampai saat ini belum ada vaksin yang tersedia untuk perlindungan terhadap virus flu babi (H1N1). Hal yang terbaik yang dapat dilakukan untuk mencegah penyebaran virus di antaranya yaitu menghindari bersentuhan atau kontak langsung dengan penderita flu babi, bila bersentuhan tidak dapat dihindari maka gunakan masker, mencuci tangan dengan sabun, hindari menyentuh mata, mulut dan hidung karena virus dapat masuk melalui bagian tubuh tersebut. Untuk masa inkubasi pada virus flu babi ini 3 sampai 5 hari meskipun ada yang menyebut 2 sampai dengan 3 hari, namun untuk penderita anak-anak dapat menularkan virus dengan masa waktu yang lebih lama.

Virus Flu Babi dan Flu Burung merupakan tantangan dalam dunia medis yang membutuhkan perhatian serius. Virus Flu Burung menyebar di antara populasi burung dan memiliki potensi penularan ke manusia. Sebagian besar penderita gejala flu burung (H5N1) pada manusia sama dengan influenza lainnya yaitu demam lebih dari 38°C dan gejala saluran pernafasan, diare, muntah-muntah, nyeri perut, nyeri dada. Tanda dan gejala pada unggas saat terinfeksi virus H5N1 sangat beragam, mulai dari gejala ringan hingga berat. Hal ini tergantung keganasan virus, lingkungan, dan keadaan unggas sendiri, gejala awal yang akan di timbulkan yaitu kurangnya akan produksi telur, perubahan warna jengger yang menjadi biru, kepala dan sekitar mata bengkak, diare, bersin, depresi dan kurangnya nafsu makan. Di beberapa kasus unggas mati tanpa gejala kematian terjadi setelah 24 jam timbul gejala. (A.A. Wiradewi Lestari, dkk, 2008)

Kasus pertama flu burung di temukan di China pada tahun 2003 dan meluas ke beberapa negara termasuk Indonesia pada tahun 2003. Mulai tahun 2003 hingga juni 2014, jumlah kasus di Indonesia sebanyak 197 kasus flu burung dan 165 diantaranya

meninggal dunia (Depkes RI, 2014). Saat ini di Indonesia banyak faktor yang mempengaruhi terjadinya kasus penyakit flu burung, diantaranya kebersihan lingkungan yang sangat kurang, banyaknya rumah yang berdekatan dengan kandang hewan atau unggas yang selama ini merupakan pembawa virus tersebut. Manusia yang kontak langsung dengan unggas sangat beresiko terkena virus flu burung jika tidak ada antisipasi yang tepat oleh pemerintah maupun masyarakat itu sendiri. Virus flu burung mulai menyebar sejak 2003 dan telah menyebar hingga ke 31 provinsi. Oleh karena itu sejak tahun 2004 pemerintah mengeluarkan kebijakan strategi guna mencegah penyebaran penyakit virus (Martindah, 2008). Penyakit ini tidak hanya menginfeksi manusia tetapi juga beberapa jenis unggas misalnya ayam, bebek, angsa, dan itik. Sementara komponen lingkungan juga mempengaruhi penyebaran virus ini seperti udara, air, kebersihan kandang dan lain lain.

Beberapa penelitian sebelumnya telah dilakukan mengenai model koinfeksi, antara lain oleh Rezanissa P. dan Rudianto A. (2021) yang melakukan analisis dinamik model koinfeksi penyakit Rubella dan Covid-19. Selanjutnya Sukma N.S dan Rudianto A. (2021), dalam penelitiannya melakukan analisis matematika untuk model koinfeksi Campak dan Covid-19. Selain itu A.F Anwar, dkk(2019), telah melakukan analisis matematika terkait koinfeksi influenza A dan Pneumokokus.

Berdasarkan latar belakang di atas peneliti akan membahas tentang penyebaran penyakit influenza flu babi dan flu burung. Virus penyebab flu burung angka kematian yang tinggi, sedangkan virus flu babi memiliki angka kematian yang rendah penularannya pada manusia.

KAJIAN TEORI (GUNAKAN STYLE SECTION)

FLU BABI

Influenza Flu Babi adalah penyakit yang di sebabkan oleh virus influenza tipe A yang umumnya menyerang babi. Virus ini dapat bermutasi ke manusia yang menyebabkan infeksi pada manusia. Saat ini masih belum tersedia vaksin untuk melindungi penyebaran virus ini, hal yang terbaik yang dapat dilakukan untuk mencegah penyebaran virus di antaranya yaitu menghindari bersentuhan atau kontak langsung dengan penderita Flu Babi, bila

bersentuhan tidak dapat dihindari maka gunakan masker, mencuci tangan dengan sabun, hindari menyentuh mata, mulut dan hidung karena virus dapat masuk melalui bagian tubuh tersebut. *World Health Organization* pada tahun 2016 menyatakan bahwa penyebaran virus ini tidak lagi dari hewan ke manusia melainkan manusia ke manusia.

FLU BURUNG

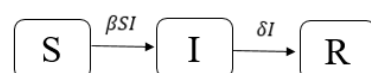
Influenza Flu Burung adalah penyakit yang di sebabkan oleh virus influenza tipe A, yang umumnya menjangkit burung. Virus ini dapat menimbulkan berbagai gejala pada burung, mulai dari ringan hingga parah dan dapat menyebabkan kematian pada beberapa kasus. Kejadian penularan langsung dari burung ke manusia relatif jarang terjadi, tetapi resiko meningkat jika terjadi mutasi virus yang memungkinkan penularan lebih efisien antar manusia. (Ghozali, 2016).

HUBUNGAN VIRUS FLU BABI DAN FLU BURUNG

Koinfeksi antara kedua jenis virus Flu Babi dan Flu Burung terutama terkait dengan fakta bahwa keduanya merupakan penyakit zoonosis, artinya mereka dapat menginfeksi baik hewan maupun manusia. Selain itu, baik flu babi maupun flu burung memiliki potensi untuk menyebabkan wabah atau bahkan pandemi di antara populasi manusia jika tidak dikendalikan dengan baik. Oleh karena itu, penting untuk mengambil langkah-langkah pencegahan yang tepat, pengawasan hewan, dan kebersihan lingkungan, untuk mengurangi risiko penyebaran kedua jenis virus ini. (Darmawan, R. 2009)

MODEL EPIDEMIK SIR

Model SIR (*Susceptibel, Infected, Recovered*) merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk memodelkan penyebaran penyakit dan menggambarkan dinamika penyebaran penyakit menular dengan membagi menjadi tiga kelompok, yaitu kelompok individu *Susceptibel* (rentan terhadap penyakit), kelompok individu *Infected* (terinfeksi penyakit), dan kelompok individu *Recovered* (sembuh dari penyakit). Model SIR dinyatakan dalam kompartemen model sebagai berikut. (Toaha, S., & Khaeruddin, K. 2014).



Gambar 1. Model SIR

sehingga, sistem persamaan model tersebut adalah :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \delta I \\ \frac{dR}{dt} &= \delta I\end{aligned}\quad (1)$$

dimana, $N = S + I + R$ adalah total populasi

$\frac{dS}{dt}$: Laju transmisi individu rentan pada saat t

$\frac{dI}{dt}$: Laju transmisi individu terinfeksi pada saat t

$\frac{dR}{dt}$: Laju transmisi individu sembuh pada saat t

S : Populasi individu rentan

I : Populasi individu terinfeksi

R : Populasi individu sembuh

β : Laju infeksi S ke I

δ : Laju kesembuhan

MODEL EPIDEMIK SEIR

Model epidemik SEIR dibagi menjadi empat kondisi yaitu *Susceptibel* (S) atau individu yang rentan terhadap penyakit, *Exposed* (E) atau individu yang terpapar akan terinfeksi virus (akan terinfeksi penyakit), *Infected* (I) atau individu yang terinfeksi dan dapat menyebarkan penyakit tersebut kepada individu yang rentan, dan *Removed* (R) atau individu yang diasumsikan telah sembuh atau kebal terhadap penyakit sehingga terhindar dari kematian (Shahnaz, A. Yani, R., 2023).

SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

Sistem persamaan diferensial merupakan sistem yang memuat n persamaan diferensial dengan n fungsi yang tidak diketahui dan n merupakan bilangan bulat positif yang lebih besar dari atau sama dengan dua (Rizal, M., & Artiono, R., 2021). Bentuk umum dari sistem persamaan diferensial adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\quad (2)$$

$$\text{dengan } \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, f(x, t) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

merupakan fungsi t dan x pada selang waktu t .

TITIK KESTABILAN

Analisis titik kesetimbangan dilakukan untuk menggambarkan perilaku sistem pada titik kesetimbangan. Keadaan setimbang dianggap stabil jika solusi-solusi yang berdekatan dengan titik ekuilibrium cenderung menuju ke titik tersebut.

Definisi titik ekuilibrium yaitu :

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan jika $f(\bar{x}) = 0$ (Perko L, 2001).

Nilai eigen atau λ diperoleh dari persamaan karakteristik, nilai dari λ dapat berupa nilai real berbeda atau kompleks dan disebut nilai eigen. Hal tersebut menyebabkan hasil kesimpulan dari titik ekuilibrium yang berbeda-beda. Tabel berikut menunjukkan jenis titik serta kestabilan titik kesetimbangan pada sistem dinamik (Boyce dkk., 2017).

BILANGAN REPRODUKSI DASAR R_0

Bilangan reproduksi dasar (R_0) merepresentasikan suatu bilangan sebagai ambang batas penularan penyakit yang diakibatkan oleh individu terinfeksi pada populasi yang rentan. (Driessche, 2017). Bilangan reproduksi dasar dari sistem persamaan dapat diperoleh dengan nilai eigen matriks Jacobian yang dihitung pada titik kritis bebas penyakit. Karakteristik R_0 , yaitu:

1. Ketika $R_0 < 1$, maka penyakit akan hilang, sehingga jumlah individu yang rentan maupun sembuh lebih banyak daripada populasi individu yang terinfeksi.
2. Ketika $R_0 = 1$, maka penyakit akan tetap ada dan stabil, namun tidak menimbulkan wabah.
3. Ketika $R_0 > 1$, maka penyakit akan terus meningkat menjadi epidemi sehingga jumlah individu yang rentan maupun sembuh lebih sedikit daripada populasi individu yang terinfeksi (Diekmann dkk, 2009)

NILAI EIGEN DAN VAKTOR EIGEN

“Misalkan H adalah matriks dengan ukuran $n \times n$, ada satu vektor bukan 0 pada \mathbb{R}^n disebut vektor eigen dari H , sehingga Hx adalah kelipatan skalar x .

$$Hx = \lambda x. \quad (3)$$

λ merupakan skalar yang disebut nilai eigen H dan x merupakan vektor eigen H relatif terhadap λ .”

Nilai eigen dari matriks H dapat dijabarkan melalui persamaan berikut :

$$Hx = \lambda Ix. \quad (4)$$

Atau

$$(\lambda I - H)x = 0, \quad (5)$$

dimana I merupakan matriks identitas. λ harus memiliki satu solusi tak nol dari persamaan $(\lambda I - H)x = 0$ untuk menjadi nilai eigen, jika

$$\det(\lambda I - H)x = 0. \quad (6)$$

Persamaan $\det(\lambda I - H)x = 0$ disebut persamaan karakteristik matriks H (Anton dan Rorres, 2004).

NEXT GENERATION MATRIX (NGM)

Model ini dilakukan untuk menentukan bilangan reproduksi dasar. Misalkan \mathcal{F} merupakan matriks dengan entri nilai parameter yang menyebabkan munculnya penyakit, dan \mathcal{V} merupakan matriks dengan entri nilai parameter tingkat perpindahan dari subpopulasi terinfeksi ke subpopulasi yang lainnya, dimana \mathcal{F} dan \mathcal{V} merupakan matriks $n \times n$ (Driessche & Watmough, 2002). Sehingga dapat diperoleh $F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_j} (x_0) \right]$ dan $V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_j} (x_0) \right]$ (7) dengan $1 \leq i, j \leq m$, dimana x_j merupakan populasi infeksi dan x_0 merupakan titik ekuilibrium bebas penyakit (Driessche & Watmough, 2002). Selanjutnya di definisikan bahwa K merupakan next generation matrix, sehingga R_0 didapatkan dengan mencari nilai maksimum modulus dari nilai eigen (Diekmann, Heesterbeek, & Roberts, 2010).

METODE

Penelitian ini merupakan studi literatur yang mengkaji konsep dan teori mengenai analisis matematika model koinfeksi penyakit Hepatitis B dan Demam Berdarah *Dengue* dengan menggunakan berbagai sumber literature yang dilakukan dengan tahapan sebagai berikut : (1) studi literatur; (2) menyusun asumsi; (3) merekonstruksi model matematika dari penyebaran penyakit; (4) menentukan titik kesetimbangan; (5) menganalisa jenis kestabilan; (6) simulasi; (7) menarik kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

KONSTRUKSI MODEL MATEMATIKA

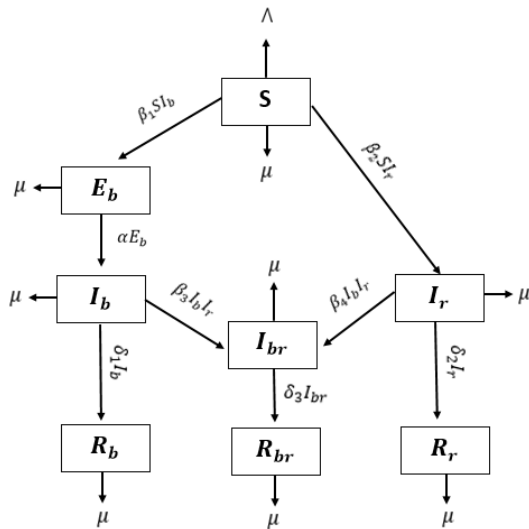
Proses pemodelan untuk kedua penyakit dikembangkan dari model dasar penyebaran penyakit SIR dan SEIR yang diperkenalkan oleh Kermack-Mckendrick pada tahun 1927, dengan memodifikasi jumlah populasi sesuai dengan karakteristik penyakit (Kermack-Mckendrick, 1927). Model yang dikembangkan merupakan hasil modifikasi dari model ko-infeksi yang telah dikembangkan oleh Rezanissa Purnamandaru dan Rudianto Artiono pada tahun 2021 (Rezanissa P. dan Rudianto A. 2021). Pada penyebaran penyakit influenza tipe A ini, melibatkan populasi manusia dengan delapan kondisi yaitu:

1. *Susceptible* (S) merupakan jumlah individu yang rentan terinfeksi penyakit.
2. *Exposed* pada flu babi (E_b) merupakan jumlah individu yang terpapar akan terkena virus atau terinfeksi penyakit.
3. I_b menyatakan populasi manusia terinfeksi penyakit Flu Babi.
4. I_r menyatakan populasi manusia terinfeksi penyakit Flu Burung.
5. I_{br} menyatakan populasi manusia terinfeksi penyakit Flu Babi dan Flu Burung.
6. R_b menyatakan populasi manusia sembuh dari penyakit Flu Babi.
7. R_r menyatakan populasi manusia sembuh dari penyakit Flu Burung.
8. R_{br} menyatakan populasi manusia sembuh dari penyakit Flu Babi dan Flu Burung.

Berikut ini adalah beberapa asumsi yang diterapkan untuk menghasilkan kondisi ideal dan memberikan batasan dalam pembentukan model.

- a. Angka kelahiran dan angka kematian yang sama.
- b. Populasi bersifat tertutup (tidak terjadinya migrasi).
- c. Tidak terjadi re-infeksi dari Flu Babi maupun Flu Burung.
- d. Populasi manusia terinfeksi penyakit Flu Babi dan Flu Burung sembuh pada waktu yang bersamaan.
- e. Populasi manusia rentan dapat terinfeksi penyakit Flu Babi dan Flu Burung pada waktu yang bersamaan

Berdasarkan asumsi di atas dapat dibuat diagram kompartemen SEIR pada penyakit Flu Babi dan SIR pada penyakit Flu Burung sebagai berikut :



Gambar 2. Diagram Model Kompartemen Koinfeksi Penyakit Influenza Flu Babi (H1N1) dan Flu Burung (H5N1).

Tabel 1 : Keterangan Variabel

No.	Variabel	Keterangan
1.	S	Populasi manusia rentan
2.	E_b	Populasi manusia yang terpapar akan terinfeksi virus flu babi
3.	I_b	Populasi manusia terinfeksi virus flu babi
4.	I_r	Populasi manusia terinfeksi virus flu burung
5.	I_{br}	Populasi manusia terinfeksi virus flu babi & flu burung
6.	R_b	Populasi manusia yang sembuh dari virus flu babi
7.	R_r	Populasi manusia yang sembuh dari virus flu burung
8.	R_{br}	Populasi manusia yang sembuh dari virus flu babi & flu burung

Tabel 2 : Parameter Pada Model SEIR dan SIR

No.	Parameter	Keterangan
1.	Λ	Laju kelahiran alami
2.	α	Laju transmisi E_b ke I_b
3.	β_1	Laju infeksi antar populasi rentan dan populasi terinfeksi flu babi
4.	β_2	Laju infeksi antar populasi rentan dan populasi terinfeksi flu burung
5.	β_3	Laju transmisi antar populasi terinfeksi flu babi & populasi terinfeksi flu burung
6.	β_4	Laju transmisi antar populasi terinfeksi flu babi & populasi terinfeksi flu burung
7.	δ_1	Laju kesembuhan dari flu babi
8.	δ_2	Laju kesembuhan dari flu burung
9.	δ_3	Laju kesembuhan dari flu babi dan flu burung

Berdasarkan persamaan gambar 2 dapat diperoleh model SEIR dan SIR sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta_1 S I_b - \beta_2 S I_r - \mu S, \\
 \frac{dE_b}{dt} &= \beta_1 S I_b - \alpha E_b - \mu E_b, \\
 \frac{dI_r}{dt} &= \beta_2 S I_r - \beta_4 I_b I_r - \delta_2 I_r - \mu I_r, \\
 \frac{dI_b}{dt} &= \alpha E_b - \beta_3 I_b I_r - \delta_1 I_b - \mu I_b, \\
 \frac{dI_{br}}{dt} &= \beta_3 I_b I_r + \beta_4 I_b I_r - \delta_3 I_{br} - \mu I_{br},
 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dR_b}{dt} &= \delta_1 I_b - \mu R_b, \\
 \frac{dR_r}{dt} &= \delta_2 I_r - \mu R_r, \\
 \frac{dR_{br}}{dt} &= \delta_3 I_{br} - \mu R_{br}.
 \end{aligned}$$

TITIK KESETIMBANGAN

Titik kesetimbangan pada model penyebaran koinfeksi penyakit Hepatitis B dan Demam Berdarah Dengue dapat ditentukan dengan membuat ruas kanan pada setiap persamaan sama dengan nol

1. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

$$\text{Titik Kritis 1} = \{S = \frac{\Lambda}{\mu}, E_b = 0, I_b = 0, I_r = 0, I_{br} = 0, R_b = 0, R_r = 0, R_{br} = 0\}.$$

2. Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit Flu Babi (H1N1)

$$\begin{aligned}
 \text{Titik Kritis 2} &= \{S = \frac{\alpha \delta_1 + \alpha \mu + \delta_1 \mu^2}{\alpha \beta_1}, E_b = \frac{\Lambda \alpha \beta_1 - \alpha \delta_1 \mu - \alpha \mu^2 - \delta_1 \mu^2 - \mu^3}{\alpha(\alpha + \mu) \beta_1}, I_b = \frac{\Lambda \alpha \beta_1 - \alpha \delta_1 \mu - \alpha \mu^2 - \delta_1 \mu^2 - \mu^3}{\beta_1(\alpha \delta_1 + \alpha \mu + \delta_1 \mu^2 + \mu^2)}, \\
 &I_r = 0, I_{br} = 0, R_b = \frac{\delta_1(\Lambda \alpha \beta_1 - \alpha \delta_1 \mu - \alpha \mu^2 - \delta_1 \mu^2 - \mu^3)}{\beta_1(\alpha \delta_1 + \alpha \mu + \delta_1 \mu^2 + \mu^2) \mu}, R_r = 0, R_{br} = 0\}.
 \end{aligned}$$

3. Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit Flu Burung (H5N1)

$$\begin{aligned}
 \text{Titik Kritis 3} &= \{S = \frac{\delta_2 + \mu}{\beta_2}, E_b = 0, I_b = 0, I_r = \frac{\Lambda \beta_2 - \delta_2 \mu - \mu^2}{\beta_2(\delta_2 + \mu)}, I_{br} = 0, R_b = 0, R_r = \frac{\delta_2 + (\Lambda \beta_2 - \delta_2 \mu - \mu^2)}{\beta_2(\delta_2 + \mu) \mu}, R_{br} = 0\}.
 \end{aligned}$$

4. Titik Kesetimbangan Endemik Ko-Infeksi Penyakit Flu Babi dan Flu Burung

$$\begin{aligned}
 \text{Titik Kritis 4} &= \{S = \frac{\Lambda}{\beta_1 I_b^* + \beta_2 I_r^* + \mu}, E_b = \frac{\beta_1 \left(\frac{\Lambda}{\beta_1 I_b^* + \beta_2 I_r^* + \mu} \right) I_b^*}{\alpha + \mu}, I_b = I_b^*, I_r = I_r^*, I_{br} = \frac{I_b^* I_r^* (\beta_3 + \beta_4)}{\delta_3 + \mu}, R_b = \frac{\delta_1 I_b^*}{\mu}, R_r = \frac{\delta_2 I_r^*}{\mu}, R_{br} = \frac{\delta_3 I_b^* I_r^* (\beta_3 + \beta_4)}{\mu(\delta_3 + \mu)}\}.
 \end{aligned}$$

BILANGAN REPRODUKSI DASAR (R_0)

Tahap selanjutnya yaitu menentukan bilangan reproduksi dasar. Bilangan reproduksi dasar digunakan sebagai parameter dan menentukan tingkat penyebaran suatu penyakit. Perhitungan R_0 hanya menganggap pada populasi yang terinfeksi sedangkan populasi yang rentan diabaikan (Diekman, et al. 2009).

Bilangan reproduksi dasar (R_0) akan ditentukan menggunakan *Next Generation Matrix* (NGM).

Konstruksi NGM dilakukan pada individu yang terinfeksi saja.

Diperoleh nilai R_0 adalah nilai eigen terbesar dari **NGM**. Dari elemen diagonal utama, diperoleh dua nilai R_0 :

$$R_{0,1} = \frac{\frac{\Lambda\beta_1}{\alpha+\mu}}{\frac{\Lambda\beta_1}{\mu(\alpha+\mu)}}, R_{0,2} = \frac{\frac{\Lambda\beta_2}{\delta_2+\mu}}{\frac{\Lambda\beta_2}{\mu(\delta_2+\mu)}} \quad (9)$$

λ_1 dan λ_2 merupakan nilai eigen dominan sehingga diperoleh 2 bilangan reproduksi dasar yaitu, $\lambda_1 = R_{0,1} = \frac{\Lambda\beta_1}{\mu(\alpha+\mu)}$ sebagai bilangan reproduksi dasar untuk penyakit Flu Babi sedangkan $\lambda_2 = R_{0,2} = \frac{\Lambda\beta_2}{\mu(\delta_2+\mu)}$ sebagai bilangan reproduksi dasar untuk penyakit Flu Burung.

Nilai R_0 ini menentukan potensi penyebaran penyakit dalam populasi. Jika $R_0 > 1$, penyakit berpotensi menyebar dalam populasi. Jika $R_0 < 1$ penyakit cenderung tidak menyebar dan bisa menghilang dari populasi.

ANALISIS KESTABILAN TITIK KESETIMBANGAN

Untuk mengetahui kestabilan titik kesetimbangan dari sistem maka terlebih dahulu dilakukan proses linierisasi. Substitusi titik kritis ini dalam bentuk matriks Jacobi sehingga dari persamaan di peroleh:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial dS}{\partial S} & \frac{\partial dS}{\partial E_b} & \frac{\partial dS}{\partial I_r} & \frac{\partial dS}{\partial I_b} & \frac{\partial dS}{\partial I_{br}} & \frac{\partial dS}{\partial R_b} & \frac{\partial dS}{\partial R_r} & \frac{\partial dS}{\partial R_{br}} \\ \frac{\partial dE_b}{\partial S} & \frac{\partial dE_b}{\partial E_b} & \frac{\partial dE_b}{\partial I_r} & \frac{\partial dE_b}{\partial I_b} & \frac{\partial dE_b}{\partial I_{br}} & \frac{\partial dE_b}{\partial R_b} & \frac{\partial dE_b}{\partial R_r} & \frac{\partial dE_b}{\partial R_{br}} \\ \frac{\partial dI_r}{\partial S} & \frac{\partial dI_r}{\partial E_b} & \frac{\partial dI_r}{\partial I_r} & \frac{\partial dI_r}{\partial I_b} & \frac{\partial dI_r}{\partial I_{br}} & \frac{\partial dI_r}{\partial R_b} & \frac{\partial dI_r}{\partial R_r} & \frac{\partial dI_r}{\partial R_{br}} \\ \frac{\partial dI_b}{\partial S} & \frac{\partial dI_b}{\partial E_b} & \frac{\partial dI_b}{\partial I_r} & \frac{\partial dI_b}{\partial I_b} & \frac{\partial dI_b}{\partial I_{br}} & \frac{\partial dI_b}{\partial R_b} & \frac{\partial dI_b}{\partial R_r} & \frac{\partial dI_b}{\partial R_{br}} \\ \frac{\partial dI_{br}}{\partial S} & \frac{\partial dI_{br}}{\partial E_b} & \frac{\partial dI_{br}}{\partial I_r} & \frac{\partial dI_{br}}{\partial I_b} & \frac{\partial dI_{br}}{\partial I_{br}} & \frac{\partial dI_{br}}{\partial R_b} & \frac{\partial dI_{br}}{\partial R_r} & \frac{\partial dI_{br}}{\partial R_{br}} \\ \frac{\partial dR_b}{\partial S} & \frac{\partial dR_b}{\partial E_b} & \frac{\partial dR_b}{\partial I_r} & \frac{\partial dR_b}{\partial I_b} & \frac{\partial dR_b}{\partial I_{br}} & \frac{\partial dR_b}{\partial R_b} & \frac{\partial dR_b}{\partial R_r} & \frac{\partial dR_b}{\partial R_{br}} \\ \frac{\partial dR_r}{\partial S} & \frac{\partial dR_r}{\partial E_b} & \frac{\partial dR_r}{\partial I_r} & \frac{\partial dR_r}{\partial I_b} & \frac{\partial dR_r}{\partial I_{br}} & \frac{\partial dR_r}{\partial R_b} & \frac{\partial dR_r}{\partial R_r} & \frac{\partial dR_r}{\partial R_{br}} \\ \frac{\partial dR_{br}}{\partial S} & \frac{\partial dR_{br}}{\partial E_b} & \frac{\partial dR_{br}}{\partial I_r} & \frac{\partial dR_{br}}{\partial I_b} & \frac{\partial dR_{br}}{\partial I_{br}} & \frac{\partial dR_{br}}{\partial R_b} & \frac{\partial dR_{br}}{\partial R_r} & \frac{\partial dR_{br}}{\partial R_{br}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Analisis titik kesetimbangan bebas penyakit

$$J = \begin{bmatrix} -I_b\beta_1 - I_r\beta_2\mu & 0 & -\beta_2S & -\beta_1S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_b\beta_1 & -\alpha - \mu & 0 & \beta_1S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_r\beta_2 & 0 & -I_b\beta_1 + \beta_2S - \delta_2 - \mu & -I_r\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -I_b\beta_1 & -I_r\beta_2 - \delta_1 - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_b\beta_1 + I_r\beta_2 & I_r\beta_2 + I_b\beta_1 & -\delta_3 - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

diperoleh dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit ke dalam matriks Jacobian (4.51), sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\frac{\beta_2\Lambda}{\mu} & -\frac{\beta_1\Lambda}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha - \mu & 0 & -\frac{\beta_1\Lambda}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_2\Lambda}{\mu} - \delta_2 - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -\delta_1 - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_3 - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix} \quad (11)$$

Analisis kestabilan diperoleh dengan menganalisis nilai eigen pada titik kesetimbangan bebas penyakit. Berdasarkan matriks Jacobian di atas, diperoleh 8 nilai eigen sebagai berikut :

- $\lambda_{01} = -\mu$, karena setiap parameter pada model bernilai positif, maka λ_{01} akan selalu bernilai negatif.
- $\lambda_{02} = -\alpha - \mu$, karena setiap parameter pada model bernilai positif, maka λ_{02} akan selalu bernilai negatif.
- $\lambda_{03} = \frac{\beta_2\Lambda}{\mu} - \delta_2 - \mu$, nilai eigen λ_{03} akan berniali negatif jika di penuhi syarat berikut :

$$\begin{aligned} \frac{\beta_2\Lambda}{\mu} - \delta_2 - \mu &< 0 \\ \frac{\beta_2\Lambda}{\mu} &< \delta_2 + \mu \\ \frac{\beta_2\Lambda}{\mu(\delta_2+\mu)} &< 1 \\ \frac{\beta_2\Lambda}{\mu\delta_2+\mu^2} &< 1 \end{aligned} \quad (12)$$

- $\lambda_{04} = -\delta_1 - \mu$, karena setiap parameter pada model bernilai positif, maka λ_{04} akan selalu bernilai negatif.
- $\lambda_{05} = -\delta_3 - \mu$, karena setiap parameter pada model bernilai positif, maka λ_{05} akan selalu bernilai negatif.
- $\lambda_{06} = -\mu$, karena setiap parameter pada model bernilai positif, maka λ_{06} akan selalu bernilai negatif.
- $\lambda_{07} = -\mu$, karena setiap parameter pada model bernilai positif, maka λ_{07} akan selalu bernilai negatif.
- $\lambda_{08} = -\mu$, karena setiap parameter pada model bernilai positif, maka λ_{08} akan selalu bernilai negatif.

Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil jika di penuhi syarat untuk λ_{03} . Selanjutnya akan ditunjukkan analisis titik kesetimbangan endemik penyakit Flu Babi diperoleh dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan endemik penyakit Flu Babi ke dalam matriks Jacobian, sehingga diperoleh 8 nilai eigen sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} \frac{\Lambda\alpha\beta_1 - \alpha\delta_1\mu - \alpha\mu^2 - \delta_1\mu^2 - \mu^3}{\alpha\delta_1 + \alpha\mu + \delta_1\mu + \mu^2} - \beta_1 - \mu & 0 & \frac{\beta_1(\alpha\delta_1 + \alpha\mu + \delta_1\mu + \mu^2)}{\mu\beta_1} & \frac{\alpha\delta_1 + \alpha\mu + \delta_1\mu + \mu^2}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & \frac{\alpha\delta_1 + \alpha\mu + \delta_1\mu + \mu^2}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 0 & \frac{\beta_1(\alpha\delta_1 + \alpha\mu + \delta_1\mu + \mu^2)}{\mu\beta_1} - \beta_2 - \mu & -\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -\beta_1 - \delta_1 - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 + \beta_1 & -\delta_1 - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & \delta_1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

- $\lambda_{11} = -\delta_3 - \mu$, karena setiap parameter pada model bernilai positif, maka λ_{11} akan selalu bernilai negatif.
- $\lambda_{12} = -\mu$, karena setiap parameter pada model bernilai positif, maka λ_{12} akan selalu bernilai negatif.
- $\lambda_{13} = -\mu$, karena setiap parameter pada model bernilai positif, maka λ_{13} akan selalu bernilai negatif.
- $\lambda_{14} = -\mu$, karena setiap parameter pada model bernilai positif, maka λ_{14} akan selalu bernilai negatif.
- $\lambda_{15} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\delta_1 + \mu} (\Lambda\beta_1 -$

$$\sqrt{\Lambda^2\beta_1^2 - 4\Lambda\beta_1^2 - 8\Lambda\beta_1\delta_1\mu - 4\Lambda\beta_1\mu^2 + 4\delta_1^3\mu + 12\delta_1^2\mu^2 + 12\delta_1\mu^3 + 4\mu^4})$$

- $\lambda_{16} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\delta_1 + \mu} (\Lambda\beta_1 +$

$$\sqrt{\Lambda^2\beta_1^2 - 4\Lambda\beta_1^2 - 8\Lambda\beta_1\delta_1\mu - 4\Lambda\beta_1\mu^2 + 4\delta_1^3\mu + 12\delta_1^2\mu^2 + 12\delta_1\mu^3 + 4\mu^4})$$

Analisi kestabilan untuk dua nilai eigen dapat diperoleh dari persamaan kuadrat $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ dengan syarat $\lambda_{15} < 0$ dan $\lambda_{16} < 0$. Kondisi ini dapat terjadi ketika $-\frac{b}{a} < 0$ dan $\frac{c}{a} < 0$

Dengan menggunakan rumus akar persamaan kuadrat diperoleh :

$$\lambda_{15} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_{16} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dari persamaan diatas diperoleh nilai :

$$a = \delta_1 + \mu$$

$$b = \Lambda^2\beta_1^2 - \Lambda\beta_1\delta_1^2 + 2\Lambda\beta_1\delta_1\mu + \Lambda\beta_1\mu^2 - \delta_1^3\mu + 3\delta_1^2\mu^2 + 3\delta_1\mu^3 + \mu^4$$

$$c = \Lambda\beta_1$$

Sehingga,

$$-\frac{b}{a} < 0$$

$$-\frac{\Lambda^2\beta_1^2 - \Lambda\beta_1\delta_1^2 + 2\Lambda\beta_1\delta_1\mu + \Lambda\beta_1\mu^2 - \delta_1^3\mu + 3\delta_1^2\mu^2 + 3\delta_1\mu^3 + \mu^4}{\delta_1 + \mu}$$

$$< 0$$

$$-\frac{\Lambda^2\beta_1^2 - \Lambda\beta_1(-\delta_1^2 + 2\delta_1\mu + \mu^2) + (-\delta_1^3\mu + 3\delta_1^2\mu^2 + 3\delta_1\mu^3 + \mu^4)}{\delta_1 + \mu} < 0,$$

dan

$$\frac{c}{a} < 0$$

$$\frac{\Lambda\beta_1}{\mu\alpha + \mu} < 0, \text{ dan}$$

Nilai eigen λ_{15} dan λ_{16} akan bernilai negatif jika dipenuhi syarat berikut

$$-\frac{\Lambda^2\beta_1^2 - \Lambda\beta_1(-\delta_1^2 + 2\delta_1\mu + \mu^2) + (-\delta_1^3\mu + 3\delta_1^2\mu^2 + 3\delta_1\mu^3 + \mu^4)}{\delta_1 + \mu} < 0 \text{ dan}$$

$$\frac{\Lambda\beta_1}{\mu\alpha + \mu} < 0$$

$$g. \lambda_{17} = \frac{1}{\beta_1(\delta_1 + \mu)} \left(\Lambda\beta_1 + \delta_1\beta_1\alpha + \alpha\beta_1\mu + \delta_1\beta_1 + \delta_1\beta_1\mu + 2\mu\beta_1 + 2\mu^2\beta_1 - \delta_1\mu - \mu^2 - (\Lambda^2\beta_1^2 - 2\Lambda\alpha\beta_1^2\delta_1 - 2\Lambda\alpha\beta_1^2\mu + 2\Lambda\beta_1^2\delta_1 + 2\Lambda\beta_1^2\delta_1\mu - 2\Lambda\beta_1\delta_1\mu - 2\Lambda\beta_1\mu^2 + \alpha^2\beta_1^2\delta_1^2 + 2\alpha^2\beta_1^2\delta_1\mu + \alpha^2\beta_1^2\mu^2 + 4\alpha\beta_1\delta_1^3 + 12\alpha\beta_1\delta_1^2\mu + 12\alpha\beta_1\delta_1\mu^2 + 4\alpha\beta_1\mu^3 - 2\alpha\beta_1^2\delta_1^2 - 4\alpha\beta_1^2\delta_1\mu - 2\alpha\beta_1^2\delta_1\mu^2 + 2\alpha\beta_1\delta_1\mu + 4\alpha\beta_1\delta_1\mu^2 + 2\alpha\beta_1\mu^3 + \beta_1^2\delta_1^2 + 2\beta_1^2\delta_1^2\mu + \beta_1^2\delta_1^2\mu^2 - 2\beta_1\delta_1\mu - 4\beta_1\delta_1\mu^2 - 2\beta_1\delta_1\mu^3 - \delta_1^2\mu^2 + 2\delta_1\mu^3 + \mu^4)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$h. \lambda_{18} = \frac{1}{\beta_1(\delta_1 + \mu)} \left(\Lambda\beta_1 + \delta_1\beta_1\alpha + \alpha\beta_1\mu + \delta_1\beta_1 + \delta_1\beta_1\mu + 2\mu\beta_1 + 2\mu^2\beta_1 - \delta_1\mu - \mu^2 + (\Lambda^2\beta_1^2 - 2\Lambda\alpha\beta_1^2\delta_1 - 2\Lambda\alpha\beta_1^2\mu + 2\Lambda\beta_1^2\delta_1 + 2\Lambda\beta_1^2\delta_1\mu - 2\Lambda\beta_1\delta_1\mu - 2\Lambda\beta_1\mu^2 + \alpha^2\beta_1^2\delta_1^2 + 2\alpha^2\beta_1^2\delta_1\mu + \alpha^2\beta_1^2\mu^2 + 4\alpha\beta_1\delta_1^3 + 12\alpha\beta_1\delta_1^2\mu + 12\alpha\beta_1\delta_1\mu^2 + 4\alpha\beta_1\mu^3 - 2\alpha\beta_1^2\delta_1^2 - 4\alpha\beta_1^2\delta_1\mu - 2\alpha\beta_1^2\delta_1\mu^2 + 2\alpha\beta_1\delta_1\mu + 4\alpha\beta_1\delta_1\mu^2 + 2\alpha\beta_1\mu^3 + \beta_1^2\delta_1^2 + 2\beta_1^2\delta_1^2\mu + \beta_1^2\delta_1^2\mu^2 - 2\beta_1\delta_1\mu - 4\beta_1\delta_1\mu^2 - 2\beta_1\delta_1\mu^3 - \delta_1^2\mu^2 + 2\delta_1\mu^3 + \mu^4)^{\frac{1}{2}} \right)$$

nilai eigen λ_{17} dan λ_{18} akan bernilai negatif jika di penuhi dengan syarat berikut:

Analisi kestabilan untuk dua nilai eigen dapat diperoleh dari persamaan kuadrat $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, dengan syarat $\lambda_{17} < 0$ dan $\lambda_{18} < 0$. Kondisi ini dapat terjadi ketika $-\frac{b}{a} < 0$ dan $\frac{c}{a} < 0$

Dengan menggunakan rumus akar persamaan kuadrat diperoleh :

$$\lambda_{17} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_{18} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dari persamaan diatas diperoleh nilai :

$$a = \beta_1(\delta_1 + \mu)$$

$$b = \Lambda\beta_1 + \beta_1\alpha(\delta_1 + 2\mu) + \beta_1\delta_1(\delta_1 + 2\mu) + 2\mu^2\beta_1 - \mu(\delta_1 + \mu)$$

$$c = \Lambda\beta_1^2 - \Lambda\beta_1\delta_1^2 + 2\Lambda\beta_1\delta_1\mu - \Lambda\beta_1\mu^2 + \delta_1^3\mu + 3\delta_1^2\mu^2 + 3\delta_1\mu^3 + \mu^4$$

Sehingga,

$$-\frac{b}{a} < 0$$

$$-\frac{\Lambda\beta_1 + \beta_1\alpha(\delta_1 + 2\mu) + \beta_1\delta_1(\delta_1 + 2\mu) + 2\mu^2\beta_1 - \mu(\delta_1 + \mu)}{\beta_1(\delta_1 + \mu)} < 0, \text{ dan}$$

$$\frac{c}{a} < 0$$

$$\frac{\Lambda\beta_1^2 - \Lambda\beta_1\delta_1^2 + 2\Lambda\beta_1\delta_1\mu - \Lambda\beta_1\mu^2 + \delta_1^3\mu + 3\delta_1^2\mu^2 + 3\delta_1\mu^3 + \mu^4}{\beta_1(\delta_1 + \mu)}$$

< 0

$$\frac{\Lambda\beta_1^2 - \Lambda\beta_1(\delta_1^2 + 2\delta_1\mu + \mu^2) + \delta_1^3 + 3\delta_1^2\mu^2 + 3\delta_1\mu^3 + \mu^4}{\beta_1(\delta_1 + \mu)} < 0$$

Nilai eigen λ_{17} dan λ_{18} akan bernilai negatif jika dipenuhi syarat berikut

$$-\frac{(\Lambda\beta_1 + \beta_1\alpha(\delta_1 + 2\mu) + \beta_1\delta_1(\delta_1 + 2\mu) + 2\mu^2\beta_1 - \mu(\delta_1 + \mu))}{\beta_1(\delta_1 + \mu)} < 0, \text{ dan}$$

$$\frac{\Lambda\beta_1^2 - \Lambda\beta_1(\delta_1^2 + 2\delta_1\mu + \mu^2) + \delta_1^3 + 3\delta_1^2\mu^2 + 3\delta_1\mu^3 + \mu^4}{\beta_1(\delta_1 + \mu)}$$

Titik kesetimbangan endemik penyakit Flu Babi akan stabil jika dipenuhi syarat untuk $\lambda_{15}, \lambda_{16}, \lambda_{17}$, dan λ_{18} . Selanjutnya akan ditunjukkan analisis titik kesetimbangan endemik penyakit Flu Burung Dari matriks Jacobian di atas, diperoleh 8 nilai eigen sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\Lambda\beta_2 - \delta_2\mu + \mu^2}{\delta_2 + \mu} & 0 & -\delta_2 - \mu & -\frac{\beta_1(\delta_2 + \mu)}{\beta_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha - \mu & 0 & \frac{\beta_1(\delta_2 + \mu)}{\beta_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Lambda\beta_2 - \delta_2\mu + \mu^2}{\delta_2 + \mu} & 0 & 0 & -\frac{(\Lambda\beta_2 - \delta_2\mu + \mu^2)\beta_4}{\beta_2(\delta_2 + \mu)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta_3 & -\frac{(\Lambda\beta_2 - \delta_2\mu + \mu^2) - \delta_1 - \mu}{\beta_2(\delta_2 + \mu)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 + \beta_4 & \frac{\beta_3 + \beta_4}{\beta_2} & -\delta_2 - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_1}{\beta_2} & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix} \quad (14)$$

- $\lambda_{21} = -\delta_3 - \mu$, karena setiap parameter pada model bernilai positif, maka λ_{21} akan selalu bernilai negatif.
- $\lambda_{22} = -\mu$, karena setiap parameter pada model bernilai positif, maka λ_{22} akan selalu bernilai negatif.
- $\lambda_{23} = -\mu$, karena setiap parameter pada model bernilai positif, maka λ_{23} akan selalu bernilai negatif.
- $\lambda_{24} = -\mu$, karena setiap parameter pada model bernilai positif, maka λ_{24} akan selalu bernilai negatif.

$$\text{e. } \lambda_{25} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\delta_2 + \mu} \left(\Lambda\beta_1 - \sqrt{(\Lambda^2\beta_2^2 - 4\Lambda\beta_2^2 - 8\Lambda\beta_2\delta_2\mu - 4\Lambda\beta_2\mu^2 + 4\delta_2^3\mu + 12\delta_2^2\mu^2 + 12\delta_2\mu^3 + 4\mu^4)} \right)$$

$$\text{f. } \lambda_{26} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\delta_2 + \mu} \left(\Lambda\beta_1 + \sqrt{(\Lambda^2\beta_2^2 - 4\Lambda\beta_2^2 - 8\Lambda\beta_2\delta_2\mu - 4\Lambda\beta_2\mu^2 + 4\delta_2^3\mu + 12\delta_2^2\mu^2 + 12\delta_2\mu^3 + 4\mu^4)} \right)$$

Analisis kestabilan untuk dua nilai eigen dapat diperoleh dari persamaan kuadrat $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, dengan syarat $\lambda_{25} < 0$ dan $\lambda_{26} < 0$. Kondisi ini dapat terjadi ketika $-\frac{b}{a} < 0$ dan $\frac{c}{a} < 0$

Dengan menggunakan rumus akar persamaan kuadrat diperoleh :

$$\lambda_{25} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_{26} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dari persamaan diatas diperoleh nilai :

$$a = \delta_2 + \mu$$

$$b = \Lambda^2\beta_2^2 - \Lambda\beta_2\delta_2^2 + 2\Lambda\beta_2\delta_2\mu + \Lambda\beta_2\mu^2 - \delta_2^3\mu + 3\delta_2^2\mu^2 + 3\delta_2\mu^3 + \mu^4$$

$$c = \Lambda\beta_2$$

Sehingga,

$$-\frac{b}{a} < 0$$

$$-\frac{\Lambda^2\beta_2^2 - \Lambda\beta_2\delta_2^2 + 2\Lambda\beta_2\delta_2\mu + \Lambda\beta_2\mu^2 - \delta_2^3\mu + 3\delta_2^2\mu^2 + 3\delta_2\mu^3 + \mu^4}{\delta_2 + \mu} < 0$$

0, dan

$$\frac{c}{a} < 0$$

$$\frac{\Lambda\beta_2}{\delta_2 + \mu} < 0$$

Nilai eigen λ_{25} dan λ_{26} akan bernilai negatif jika dipenuhi syarat berikut

$$-\frac{\Lambda^2\beta_2^2 - \Lambda\beta_2(-\delta_2^2 + 2\delta_2\mu + \mu^2) + (-\delta_2^3\mu + 3\delta_2^2\mu^2 + 3\delta_2\mu^3 + \mu^4)}{\delta_2 + \mu} < 0 \text{ dan}$$

$$\frac{\Lambda\beta_2}{\delta_2 + \mu} < 0$$

- g. $\lambda_{27} = \frac{1}{\beta_2(\delta_2 + \mu)} \left(\Lambda\beta_2 + \delta_2\beta_2\alpha + \alpha\beta_2\mu + \beta_2\delta_2 + \delta_2\beta_2\mu + 2\mu\beta_2 + 2\mu^2\beta_2 - \beta_3\delta_2\mu - \mu^2 - (\Lambda^2\beta_2^2 - 2\Lambda\alpha\beta_2^2\delta_2 - 2\Lambda\alpha\beta_2^2\mu + 2\Lambda\beta_2^2\delta_2 + 2\Lambda\beta_2^2\delta_2\mu - 2\Lambda\beta_2\delta_2\mu - 2\Lambda\beta_2\mu^2 + \alpha^2\beta_2^2\delta_2^2 + 2\alpha^2\beta_2^2\delta_2\mu + \alpha^2\beta_2^2\mu^2 + 4\alpha\beta_2\delta_2^3 + 12\alpha\beta_2\delta_2^2\mu + 12\alpha\beta_2\delta_2\mu^2 + 4\alpha\beta_2\mu^3 - 2\alpha\beta_2^2\delta_2^2 - 4\alpha\beta_2^2\delta_2\mu - 2\alpha\beta_2^2\mu^2 + 2\alpha\beta_2\delta_2^2\mu + 4\alpha\beta_2\delta_2\mu^2 + 2\alpha\beta_2\mu^3 + \beta_2^2\delta_2^2 + 2\beta_2^2\delta_2\mu + \beta_2^2\delta_2^2\mu^2 - 2\beta_2\delta_2^2\mu - 4\beta_2\delta_2\mu^2 - 2\beta_2\delta_1\mu^3 - \beta_3\delta_2^2\mu^2 + 2\delta_2\mu^3 + \mu^4)^{\frac{1}{2}} \right)$
- h. $\lambda_{28} = \frac{1}{\beta_2(\delta_2 + \mu)} \left(\Lambda\beta_2 + \delta_2\beta_2\alpha + \alpha\beta_2\mu + \beta_2\delta_2 + \delta_2\beta_2\mu + 2\mu\beta_2 + 2\mu^2\beta_2 - \beta_3\delta_2\mu - \mu^2 + (\Lambda^2\beta_2^2 - 2\Lambda\alpha\beta_2^2\delta_2 - 2\Lambda\alpha\beta_2^2\mu + 2\Lambda\beta_2^2\delta_2 + 2\Lambda\beta_2^2\delta_2\mu - 2\Lambda\beta_2\delta_2\mu - 2\Lambda\beta_2\mu^2 + \alpha^2\beta_2^2\delta_2^2 + 2\alpha^2\beta_2^2\delta_2\mu + \alpha^2\beta_2^2\mu^2 + 4\alpha\beta_2\delta_2^3 + 12\alpha\beta_2\delta_2^2\mu + 12\alpha\beta_2\delta_2\mu^2 + 4\alpha\beta_2\mu^3 - 2\alpha\beta_2^2\delta_2^2 - 4\alpha\beta_2^2\delta_2\mu - 2\alpha\beta_2^2\mu^2 + 2\alpha\beta_2\delta_2^2\mu + 4\alpha\beta_2\delta_2\mu^2 + 2\alpha\beta_2\mu^3 + \beta_2^2\delta_2^2 + 2\beta_2^2\delta_2\mu + \beta_2^2\delta_2^2\mu^2 - 2\beta_2\delta_2^2\mu - 4\beta_2\delta_2\mu^2 - 2\beta_2\delta_1\mu^3 - \beta_3\delta_2^2\mu^2 + 2\delta_2\mu^3 + \mu^4)^{\frac{1}{2}} \right)$ nilai eigen λ_{28} akan bernilai negatif jika di penuhi dengan syarat berikut:

Analisi kestabilan untuk dua nilai eigen dapat diperoleh dari persamaan kuadrat $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, dengan syarat $\lambda_{27} < 0$ dan $\lambda_{28} < 0$. Kondisi ini dapat terjadi ketika $-\frac{b}{a} < 0$ dan $\frac{c}{a} < 0$. Dengan menggunakan rumus akar persamaan kuadrat diperoleh :

$$\lambda_{27} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_{28} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dari persamaan diatas diperoleh nilai :

$$a = \beta_2(\delta_2 + \mu)$$

$$b = \Lambda\beta_2 + \beta_2\alpha(\delta_2 + 2\mu) + \beta_2(\delta_2 + 2\mu) + 2\mu^2\beta_2 - \mu(\delta_2 + \mu)$$

$$c = \Lambda\beta_2^2 - \Lambda\beta_2\delta_2^2 + 2\Lambda\beta_2\delta_2\mu - \Lambda\beta_2\mu^2 + \delta_2^3\mu + 3\delta_2^2\mu^2 + 3\delta_2\mu^3 + \mu^4$$

Sehingga,

$$-\frac{b}{a} < 0$$

$$-\frac{(\Lambda\beta_2 + \beta_2\alpha(\delta_2 + 2\mu) + \beta_2(\delta_2 + 2\mu) + 2\mu^2\beta_2 - \mu(\delta_2 + \mu))}{\beta_2(\delta_2 + \mu)} < 0, \text{ dan}$$

$$\frac{c}{a} < 0$$

$$\frac{\Lambda\beta_2^2 - \Lambda\beta_2\delta_2^2 + 2\Lambda\beta_2\delta_2\mu - \Lambda\beta_2\mu^2 + \delta_2^3\mu + 3\delta_2^2\mu^2 + 3\delta_2\mu^3 + \mu^4}{\beta_2(\delta_2 + \mu)} < 0$$

$$\frac{\Lambda\beta_2^2 - \Lambda\beta_2(\delta_2^2 - 2\delta_2\mu + \mu^2) + \mu\delta_2^3 + 3\delta_2^2\mu^2 + 3\delta_2\mu^3 + \mu^4}{\beta_2(\delta_2 + \mu)} < 0$$

Nilai eigen λ_{26} dan λ_{27} akan bernilai negatif jika dipenuhi syarat berikut.

$$-\frac{(\Lambda\beta_2 + \beta_2\alpha(\delta_2 + 2\mu) + \beta_2(\delta_2 + 2\mu) + 2\mu^2\beta_2 - \mu(\delta_2 + \mu))}{\beta_2(\delta_2 + \mu)} < 0, \text{ dan}$$

$$\frac{\Lambda\beta_2^2 - \Lambda\beta_2(\delta_2^2 - 2\delta_2\mu + \mu^2) + \mu\delta_2^3 + 3\delta_2^2\mu^2 + 3\delta_2\mu^3 + \mu^4}{\beta_2(\delta_2 + \mu)} < 0$$

Titik kesetimbangan endemik penyakit Flu Burung akan stabil jika dipenuhi syarat untuk $\lambda_{25}, \lambda_{26}, \lambda_{27}$, dan λ_{28} . Selanjutnya akan ditunjukkan analisis titik kesetimbangan endemik koinfeksi penyakit Flu Babi dan Flu Burung diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut :

$$J = \begin{bmatrix} \beta_2 I_b^* - I_r^* \beta_2 - \mu & 0 & -\beta_2 S & -\beta_1 S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 I_b^* & -\alpha - \mu & 0 & \beta_1 S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 I_b^* & 0 & -\delta_2 - \mu - \beta_4 I_b^* & -\beta_4 I_b^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -\beta_1 I_r^* - \delta_1 - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 I_b^* + \beta_4 I_b^* & \beta_3 I_r^* + \beta_4 I_r^* & -\delta_3 - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix} \quad (15)$$

Jika semua kondisi di atas terpenuhi, yaitu $\beta_1 I_b^* - I_r^* \beta_2 < \mu$ dan $-\beta_4 I_b^* + \beta_2 S < \delta_2 - \mu$, maka titik kesetimbangan endemik ko-infeksi adalah stabil. Namun apabila kondisi tersebut tidak terpenuhi, maka sistem tidak akan stabil pada titik kesetimbangan endemik tersebut.

Analisis kestabilan diperoleh dengan menganalisis nilai eigen pada titik kesetimbangan endemik koinfeksi penyakit Flu Babi dan Flu Burung. Dari matriks Jacobian di atas, diperoleh 8 nilai eigen. Namun, analisis nilai eigen ini tidak dapat dijabarkan karena kompleksitas analisis ini, perhitungan nilai eigen dilakukan dengan bantuan aplikasi Maple.

SIMULASI NUMERIK

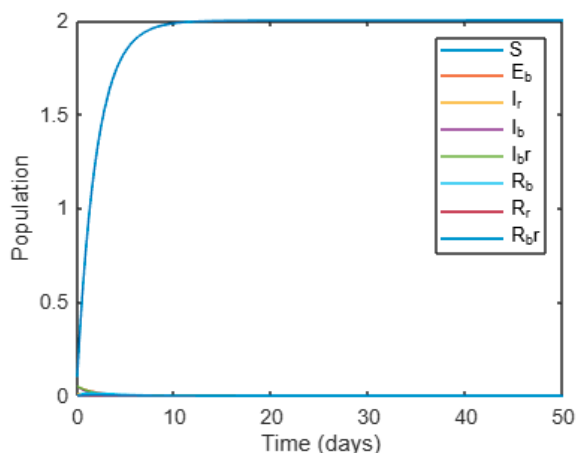
Simulasi ini bertujuan untuk memahami perilaku dari setiap populasi pada model saat terjadi penyebaran penyakit influenza tipe A H1N1 dan H5N1. Simulasi ini dilakukan dengan menggunakan program MATLAB Online R2020b. Nilai parameter diperoleh dari berbagai referensi sarta asumsi yang di sajikan pada tabel berikut

Parameter	Nilai	Sumber
Λ	1	Asumsi
β_1	0.25	Atkins,2010
β_2	0.2	Baleuna dkk,2020
β_3	0.05	Asumsi
β_4	0.1	Asumsi
α	0.15	Asumsi
δ_1	0.5	Baleuna dkk,2020
δ_2	0.001	Libotte dkk, 2020
δ_3	0.1	Asumsi
μ	0.5	Asumsi

Dengan nilai awal $S(0) = 0,1; I_b(0) = 0,05; I_r(0) = 0,01; E_b(0) = 0,05; I_{br}(0) = 0,05; R_b(0) = 0; R_r(0) = 0; R_{br}(0) = 0$.

Berikut merupakan simulasi yang dilakukan menggunakan *software* MATLAB Online dengan menggunakan ODE45.

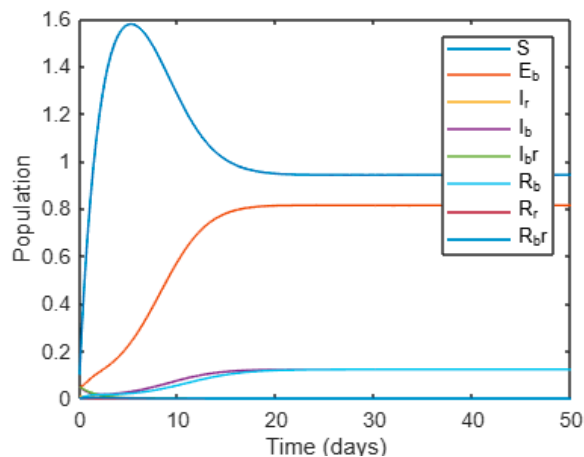
diperoleh $R_{01} = 0,5$ dan $R_{02} = 0,79$ serta pada analisis kestabilan diperoleh $\lambda_{01} = -0,5; \lambda_{02} = -0,5; \lambda_{03} = -0,5; \lambda_{04} = -1,15; \lambda_{05} = -0,5; \lambda_{06} = -0,1; \lambda_{07} = -0,5; \lambda_{08} = -0,6$. Berdasarkan nilai eigen, maka jenis kesetimbangan adalah stabil asimtotik pada Titik Kritis 1 = $(2; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0)$ dan akan menghasilkan simulasi sebagai berikut :



Gambar 3. Grafik Simulasi Model Bebas Penyakit pada saat $t \leq 50$

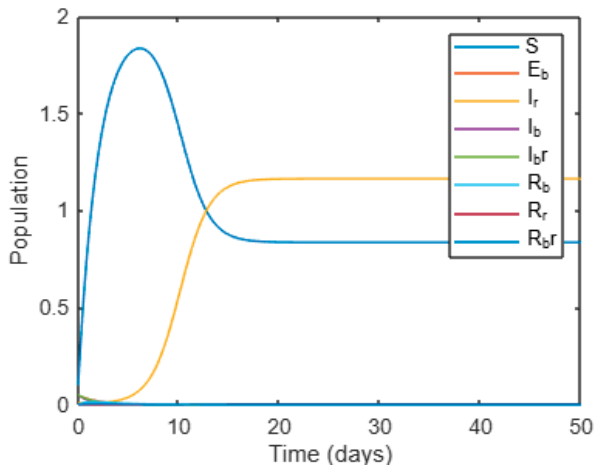
Berdasarkan gambar 3 di atas menunjukkan bahwa pada hari ke-10 dan seterusnya, populasi manusia yang terinfeksi penyakit Flu Babi dan Flu Burung semakin menurun ke angka nol sehingga tidak lagi ditemukan kedua penyakit tersebut pada populasi manusia. Hasil ini menunjukkan bahwa eksistensi titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil. Semua populasi akan menuju titik nol kecuali populasi manusia rentan. Selanjutnya dilakukan modifikasi

nilai $\beta_1 = 4,6$ dan diperoleh $R_{01} = 9,2$ dan $R_{02} = 0,79$ serta pada analisis kestabilan diperoleh $\lambda_{11} = -0,5; \lambda_{12} = -0,4; \lambda_{13} = -0,4; \lambda_{14} = -1,88; \lambda_{15} = -0,6; \lambda_{16} = -0,5; \lambda_{17} = -0,5$ dan $\lambda_{18} = -0,3$. Berdasarkan nilai eigen tersebut, maka jenis kesetimbangan adalah **stabil asimtotik** pada Titik Kritis 2 $(2,6; 0,25; 0,0386; 0; 0; 0,0385; 0; 0)$ dan akan menghasilkan simulasi sebagai berikut :



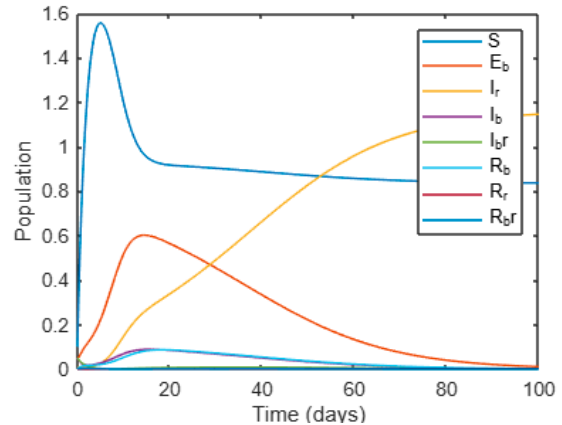
Gambar 4. Grafik Simulasi Model Penyakit Flu Babi pada saat $t \leq 50$

Berdasarkan gambar 4. Menunjukkan bahwa eksistensi titik kesetimbangan endemik penyakit Flu Babi yang stabil. Semua populasi akan menuju titik nol kecuali populasi manusia rentan, populasi manusia yang terinfeksi Flu Babi dan populasi manusia yang sembuh dari Flu Babi. Selanjutnya dilakukan modifikasi nilai $\beta_2 = 0,5$ dan diperoleh $R_{01} = 0,038$ dan $R_{02} = 1,097$ serta pada analisis kestabilan diperoleh $\lambda_{21} = -0,5; \lambda_{22} = -0,5; \lambda_{23} = -0,5; \lambda_{24} = -0,6; \lambda_{25} = -1,15; \lambda_{26} = -0,5; \lambda_{27} = -0,02$ dan $\lambda_{28} = -0,5$. Berdasarkan nilai eigen tersebut, maka jenis kesetimbangan adalah **stabil asimtotik** pada Titik Kritis 3 $(0,835; 0; 0; 1,163; 0; 0; 2,334; 0)$ dan akan menghasilkan simulasi sebagai berikut :

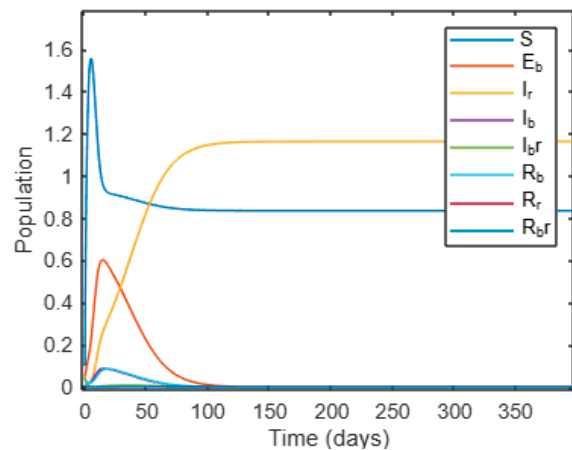


Gambar 5. Simulasi Model Penyakit Flu Burung pada saat $t \leq 50$

Berdasarkan gambar 4.4 di atas menunjukkan bahwa populasi manusia rentan awalnya berada di titik 0,1 kemudian mengalami kenaikan pada minggu pertama ke titik 1,84 hingga minggu selanjutnya mengalami penurunan secara bertahap ke titik 0,85. Penurunan populasi manusia rentan dapat terjadi akibat berkurangnya populasi karena terdapat populasi yang terpapar oleh penyakit Flu Burung. Sementara itu, populasi yang terinfeksi penyakit Flu Burung pada awalnya berada di titik 0,01, namun kemudian naik secara bertahap menuju titik 1,13, yang menunjukkan bahwa penyakit Flu Burung akan tetap di temukan di dalam populasi. Hal serupa terjadi pada populasi manusia sembuh dari penyakit Flu Burung yang mengalami kenaikan secara bertahap menuju titik 0,01, yang menunjukkan bahwa sebagian besar individu yang terinfeksi mampu pulih dan membangun kekebalan terhadap penyakit Flu Burung. Hasil ini menunjukkan bahwa eksistensi titik kesetimbangan endemik penyakit Flu Burung yang stabil. Semua populasi akan menuju titik nol kecuali populasi manusia rentan, populasi manusia yang terinfeksi Flu Burung dan populasi manusia yang sembuh dari Flu Burung. Selanjutnya dilakukan modifikasi nilai $\beta_1 = 4,6$ dan $\beta_2 = 0,5$ dan diperoleh $R_{01} = 0,038$ dan $R_{02} = 1,097$ serta pada analisis kestabilan diperoleh nilai eigen dengan memodifikasi nilai akan menghasilkan simulasi maka jenis kesetimbangan adalah **stabil asimtotik** pada Titik Kritis 4 dan akan menghasilkan simulasi sebagai berikut :



Gambar 6. Grafik Simulasi Model Penyakit Flu Babi dan Flu Burung pada saat $t \leq 100$



Gambar 7. Grafik Simulasi Model Penyakit Flu Babi dan Flu Burung pada saat $t \leq 400$

Pada gambar 6. dan 7. di atas menunjukkan bahwa populasi manusia rentan awalnya berada di titik 0,1 mengalami kenaikan pada minggu pertama ke titik 1,6, namun pada minggu selanjutnya mengalami penurunan secara bertahap ke titik 0,93. Penurunan populasi manusia rentan dapat terjadi akibat berkurangnya populasi karena terdapat populasi yang terpapar oleh penyakit Flu babi dan Flu Burung serta kematian alami pada populasi rentan. Sementara itu, populasi manusia yang terinfeksi penyakit Flu Babi pada awalnya berada di titik 0,05 kemudian mengalami kenaikan pada hari ke-10 menuju titik 0,08 hingga hari berikutnya mengalami penurunan secara bertahap ke titik 0,002. Hal ini menunjukkan bahwa penyakit Flu Babi akan tetap ditemukan di dalam populasi. Demikian pula, populasi manusia sembuh dari penyakit Flu babi yang mengalami kenaikan pada hari kepada hari ke-20 menuju titik 0,09 hingga hari berikutnya mengalami penurunan secara bertahap ke titik 0,0002.

Hal ini menunjukkan bahwa sebagian besar individu yang terinfeksi mampu pulih dan membangun kekebalan terhadap penyakit Flu Babi. Selanjutnya, populasi manusia yang terinfeksi penyakit Flu Burung pada awalnya berada di titik 0,01 dan mengalami kenaikan dan menuju ke titik 1,2, yang menunjukkan bahwa penyakit Flu Burung akan tetap ditemukan di dalam populasi. Hal serupa terjadi pada populasi manusia sembuh dari penyakit Flu Burung yang mengalami kenaikan secara bertahap menuju titik 0,6, yang menunjukkan bahwa sebagian besar individu yang terinfeksi mampu pulih dan membangun kekebalan terhadap penyakit Flu Burung. Selain itu, populasi manusia terinfeksi penyakit Flu Babi dan Flu burung pada awalnya berada di titik 0.05 mengalami kenaikan secara bertaap menuju titik 0,00002, yang menunjukkan bahwa koinfeksi penyakit Flu Babi dan Flu Burung akan tetap ditemukan di dalam populasi. Hasil ini menunjukkan bahwa eksistensi titik kesetimbangan endemik koinfeksi Flu Babi dan Flu Burung yang stabil. Semua populasi tidak akan mencapai titik nol, yang menegaskan bahwa penyakit - penyakit ini dapat terus bertahan dalam populasi manusia.

PENUTUP

SIMPULAN

Penelitian ini membahas mengenai model koinfeksi penyakit Flu Babi dan Flu Burung yang menghasilkan model berdasarkan karakteristik dari kedua penyakit. Terdapat empat titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit, titik kesetimbangan endemik Flu Babi, titik kesetimbangan endemik Flu Burung, serta titik kesetimbangan endemik koinfeksi. Bilangan reproduksi dasar ditentukan menggunakan *Next Generation Matrix*, untuk kasus titik kesetimbangan bebas penyakit menghasilkan dua bilangan reproduksi dasar, yaitu bilangan reproduksi dasar Flu Babi yaitu $R_{01} = \frac{\Lambda\beta_1}{\mu(\alpha+\mu)}$ dan bilangan reproduksi dasar Flu Burung yaitu $R_{02} = \frac{\Lambda\beta_2}{\mu(\delta_2+\mu)}$. Ketika $R_{01} < 1$ dan $R_{02} < 1$, titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil, yang berarti kedua penyakit akan hilang dari populasi dalam jangka waktu tertentu. Jika $R_{01} > 1$ dan $R_{02} < 1$, menunjukkan bahwa penyakit Flu Babi akan tetap ada dalam populasi. Sebaliknya, jika $R_{01} < 1$ dan $R_{02} > 1$, penyakit Flu

Burung akan tetap ada dalam populasi. Jika $R_{01} > 1$ dan $R_{02} > 1$, keduanya akan tetap ada dalam populasi. Hasil dari simulasi numerik yang dilakukan menggunakan MATLAB juga mendukung hasil analisis tersebut.

SARAN

Apabila skripsi ini dilanjutkan dengan membahas model matematika penyebaran penyakit influenza tipe A H1N1 dan H5N1, disarankan untuk mendapatkan variabel kontrol berupa vaksinasi. Tujuannya adalah untuk memahami efek vaksinasi dalam menurunkan penyebaran penyakit influenza tipe A H1N1 dan H5N1.

DAFTAR PUSTAKA

Daftar pustaka disusun menggunakan aplikasi Reference Management Software seperti Mendeley, Zotero, Endnote dll.

- A'maulidin, H., Faruk, A., & Cahyono, E. S.(2016). Analisis Kestabilan Model Epidemik untuk Penyakit Tuberkulosis. Prosiding SEMIRATA Bidang MIPA, 207-213.
- Abelson , B.(2019). Antibiotic, & Your Immune System. Flu Shots.
- Arsyad, S. H., Resmawan, & Achmad, N. (2020). Analisis model predator-prey leslie-gower dengan pemberian racun pada predator. JRAM , 1-16.
- Berman, A. and Plemmons, R.J. (2010) Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. New York:Academic Press.
- British Broadcasting Corporation. 2017. Data of H1N1 Infactious. (Diakses pada 06 Maret 2018).
- Boyce, W.E dan DiPrima, R.C.. 2000. ODE Architect Companion. New York: John Willy and sons, Inc.
- Boyce, W. E., DiPrima, R. C., & Meade, D. B. (2021). Elementary differential equations and boundary value problems. John Wiley & Sons.
- Darmawan, R. (2009). *Tanya Jawab Flu Babi, Flu Singapura, dan Flu Burung*. Niaga Swadaya.
- Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., Roberts, M. G.. 2009. "The Construction of Generation Matrices for Compartmental Epidemic

- Models." *Journal of The Royal Society*, 873-885.
- Diekmann, O., Heesterbeek, J. A., & Roberts, M. G. (2010). The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models. *Interface*, 873-885.
- Driessche, P. v., & Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *elsevier*, 29-48.
- Giesecke, J. 2002. *Modern Infectious Disease Epidemiology*, Second Edition. Florida: CRC Press.
- Kementrian Kesehatan Iran. (2015). Flu Babi di Iran Tewaskan Banyak Jiwa. (Online), (http://www.Flu%20bayi%20di%20era%20Tewaskan%20banyak%20Jiwa%20_%20Kemenkes%20Iran%20Republika%.html), diakses pada 11 Maret 2018)
- Kiselev, O. I. Virus influenza A (H5N1) yang sangat patogen. Reservoir alami virus influenza a Ciri-ciri epizootologis dan epidemiologis flu burung.
- Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics*. (S. Corliss, B. Russiello, & M. Edward, Eds.) (tenth). USA: Laurie Rosatone.
- Laksana, A. 2011. *Model Penyebaran Penyakit Melalui Hubungan Seksual (PHS): Gonorrhea dan HIV/AIDS*. UGM, Yogyakarta.
- Lestari Wiradewi A.A, I.A. Putri W, Tjok Gda Oka,. (2010) *KONFIRMASI FLU BABI A/H1N1 MENGGUNAKAN PCR*.
- Mulyadi, B., Prihatini., (2005) *DIAGNOSA LABORATORIK FLU BURUNG (H5N1)*.
- Nugraha, A. A. 2022. *ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA META POPULASI PENYEBARAN VIRUS EBOLA*. Skripsi. Program Studi Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim. Malang.
- Perko, L. (2001). *Diferensial Equations and Dynamical System Texts in Applied Mathematics Vol 7*. USA: Springer-Verlag.
- Shahnaz, A. Yani, R. (2023) *Model SEIR Penyebaran Covid-19 dengan Parameter Penggunaan Masker Kesehatan Vaksinasi*.
- Sinula, A. L. P. (2018). PENYEBARAN PENYAKIT INFLUENZA TIPE A (H1N1) MODEL SEI_S I_N R. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*.
- Toaha, S., & Khaeruddin, K. (2014). Model Sir Untuk Penyebaran Penyakit Flu Burung. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*.
- Wardhani, P., Arthamin, M. Z., Sudewa, A. A. G., Dharma, R., Arif, M., Kumalawati, J., ... & Fahmi, A. (2010) *CLINICAL PATHOLOGY AND MEDICAL LABORATORY*.
- World Health Organisation. (2017). H1N1 Could Spread Globally in World. (Online), (<http://www.who.int/influenza/H1N1/could/Spread/Globally/inWorld/>), diakses pada 09 Maret 2018).