

PERANCANGAN KENDALI UNTUK STABILITAS ALTITUDE QUADROTOR DENGAN SLIDING PROPORSIONAL- INTEGRAL-DERIVATIF

Ravi Bagus Aradea

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail: ravibagus.21037@mhs.unesa.ac.id

Yusuf Fuad

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail: yusuffuad@unesa.ac.id*

Abstrak

Quadrotor adalah salah satu pesawat tanpa awak (UAV) dengan empat baling-baling yang memberikan gaya angkat dan kontrol arah terbangnya, menjadikannya handal dalam manuver dan stabil untuk berbagai aplikasi seperti pertanian, militer, dan pengamatan. Konfigurasi *rotor*-nya terbagi menjadi konfigurasi “+” dan “x”, dengan konfigurasi “x” cenderung lebih stabil dalam manuver. *Quadrotor* memiliki enam derajat kebebasan yang terdiri dari gerak translasi (x, y, z) dan rotasi (*roll, pitch, yaw*), yang dikendalikan melalui kecepatan *rotor*. Kecepatan *rotor* mempengaruhi gaya dorong serta momen *yawing*, yang dapat dikontrol dengan arah putaran *rotor* yang berlawanan. Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh model matematika *quadrotor* serta merancang kontrol *Sliding Proporsional-Integral-Derivatif* yang optimal guna meningkatkan kestabilan sistem. Pada penelitian ini dilakukan rekonstruksi dan linierisasi dari model dinamik *quadrotor* dalam posisi *hover*, analisis ketinggian sesudah dikenakan kontrol proporsional-integral-derivatif, serta setelah ditambahkan kontrol *sliding*. Untuk mencapai kestabilan, diterapkan kontrol PID dengan menentukan *gain* K_p, K_i dan K_d . Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, nilai *gain* kontrol yang memenuhi adalah $0 < K_p < 56854$; $0 < K_i < 19860$; dan $K_d > -7054$. Berdasarkan eksperimen, nilai *gain* kontrol yang digunakan adalah $K_p = 9000, K_i = 3000$ dan $K_d = 100$. Kemudian ditambahkan kontrol *sliding*, menjadikan *quadrotor* dapat bekerja dengan baik pada ketinggian 50 meter dan *quadrotor* dapat dikontrol mengikuti *trajectory* yang dibuat serta lebih *robust* dalam mencapai berapapun ketinggian yang ditentukan. Meskipun ada “noise lonjakan” di perpindahan ketinggian yang membutuhkan waktu 1.5 detik untuk perpindahan, namun rancangan model dinamik *quadrotor* stabil asimptotik, valid dan efektif digunakan. Penelitian dapat dilanjutkan dengan mengubah orientasi gerak *quadrotor*.

Kata Kunci: *Quadrotor, Sliding Mode Control, Proporsional-Integral-Derivatif, Asimptotik Stabil, Titik Kesetimbangan.*

Abstract

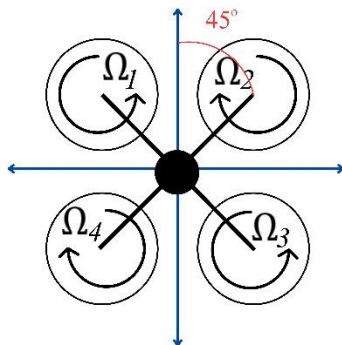
A *quadrotor* is an unmanned aerial vehicle (UAV) with four propellers that provide lift and directional control, making it highly maneuverable and stable for applications in agriculture, military, and surveillance. It typically uses either a “+” or “x” rotor configuration, with the latter offering better stability during flight. The *quadrotor* has six degrees of freedom – translational (x, y, z) and rotational (*roll, pitch, yaw*) – controlled by varying rotor speeds, which affect both thrust and yawing moment. This study develops a mathematical model of the *quadrotor* and designs an optimal *Sliding Proportional-Integral-Derivative* controller to improve system stability. The research includes reconstructing and linearizing the *quadrotor*’s dynamic model at *hover*, analyzing altitude control with a PID controller, and enhancing it with *sliding* control. A PID controller is applied using gain values determined by the Routh-Hurwitz criterion, the suitable control gain values are $0 < K_p < 56854$; $0 < K_i < 19860$; and $K_d > -7054$. Based on experimental results, the selected gain values are $K_p = 9000, K_i = 3000$ and $K_d = 100$. Then, a *sliding mode* control was added, enabling the *quadrotor* to operate effectively at an altitude of 50 meters. The *quadrotor* can be controlled to follow the predefined trajectory and demonstrates greater robustness in reaching any specified altitude. Although slight “spike noise” appears around 1.5 seconds during altitude transition, the overall system remains asymptotically stable, accurate, and functional. Future work may explore different motion orientations to enhance the model further.

Keywords: *Quadrotor, Sliding Mode Control, Proporsional-Integral-Derivatif, Asymptotically Stable, Equilibrium Point.*

PENDAHULUAN

Quadrotor adalah salah satu jenis pesawat terbang tanpa awak atau *Unmanned Aerial Vehicle* (UAV) yang menggunakan empat baling-baling (*rotor*) untuk menghasilkan gaya angkat dan mengendalikan arah terbangnya. Desain empat *rotor* memberikan *quadrotor* kemampuan manuver yang tinggi dan stabilitas yang baik, sehingga sering digunakan dalam berbagai aplikasi seperti bidang sipil, komersial, penanganan bencana, pengamatan meteorologi, pertanian, serta militer, seperti pengawasan, pengintaian, dan komunikasi, juga untuk tujuan pendidikan (Noordin *et al.*, 2019).

Quadrotor memiliki dua konfigurasi utama, yaitu konfigurasi + (plus) dan konfigurasi × (silang), yang membedakan orientasi keempat *rotor* terhadap badan *quadrotor*. Pada konfigurasi +, satu *rotor* berada di depan, satu di belakang dan dua lainnya di sisi kiri dan kanan, membentuk pola tanda plus (+). Sedangkan pada konfigurasi ×, keempat *rotor* membentuk sudut 45° dari badan *quadrotor* sehingga tidak ada *rotor* yang tepat di depan atau belakang, tetapi di posisi diagonal (Niemic *et al.*, 2016), menjadikannya lebih efisien untuk banyak aplikasi karena stabilitas yang lebih baik dalam manuver dan kontrol yang lebih responsif.



Gambar 1. Konfigurasi × (silang) baling-baling *quadrotor*

Gerak dasar *quadrotor* terbagi menjadi dua kategori utama: gerak translasi dan gerak rotasi, dengan enam derajat kebebasan (*degree of freedom*) yang dimilikinya. Dalam sistem koordinat Cartesius, posisi *quadrotor* diwakili oleh tiga variabel state: posisi x, y dan z . Orientasi *quadrotor* diatur oleh tiga sudut rotasi: *roll* (ϕ) pada sumbu X , *pitch* (θ) pada sumbu Y , dan *yaw* (ψ) pada sumbu Z . Selain itu, terdapat enam variabel state tambahan yang menggambarkan kecepatan *quadrotor*: kecepatan linier u (sepanjang sumbu X), v (sepanjang sumbu

Y), dan w (sepanjang sumbu Z), serta kecepatan sudut untuk *roll*, *pitch* dan *yaw* ($\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$) (Jirinec, 2011). Pengaturan variable - variabel tersebut memungkinkan penyesuaian dinamis untuk mencapai altitude (ketinggian) yang diinginkan.

Altitude (ketinggian), yaitu posisi vertikal *quadrotor* dari permukaan yang dapat diatur sesuai kebutuhan dengan mengubah kecepatan keempat *rotor*-nya. Kecepatan *rotor* juga mempengaruhi gaya dan momen pada *quadrotor* seperti gaya dorong yang dihasilkan oleh putaran *rotor*, momen *pitching* dan *rolling* akibat perbedaan gaya dorong di antara *rotor*, serta momen *yawing*. Momen *yawing* disebabkan oleh ketidakseimbangan kecepatan rotasi keempat *rotor*, namun dapat diatasi ketika dua *rotor* berputar dalam arah yang berlawanan. Baling-baling depan kanan dan baling-baling belakang kiri berputar searah arah jarum jam, sedangkan baling-baling depan kiri dan baling-baling belakang kanan berputar berlawanan jarum jam (Niemic *et al.*, 2016).

Quadrotor memiliki *multi-output* yang *underactuated* yaitu sistem yang memiliki lebih sedikit *aktuator* (penggerak) dibandingkan dengan derajat kebebasan yang dimilikinya, dengan *high coupling degrees* dan ketidaklinieran yang tidak diketahui yang menunjukkan perilaku dinamis non-linier. Karakteristik ini membuat sistem kontrol *quadrotor* menjadi masalah yang sulit untuk dipecahkan. Oleh karena itu, *quadrotor* memerlukan kemampuan otonom yang *robust* untuk menjaga stabilitasnya agar dapat menyelesaikan misi yang diinginkan (Gaitan & Bolea, 2013).

Beberapa penelitian sebelumnya telah memberikan landasan bagi pengembangan lebih lanjut dalam analisis kestabilan gerak dan kontrol *quadrotor*. Penelitian skripsi oleh Baroro dan Fuad (2016) menyatakan bahwa *quadrotor* stabil untuk masing-masing gerak vertikal (naik dan turun), gerak *yawing* (belok kanan dan kiri), gerak longitudinal (maju dan mundur), dan gerak *lateral* (geser kanan dan kiri) dengan masing-masing $K_p = 15000$ dan $K_D = 1000$, dengan $K_p = 25000$ dan $K_D = 5000$, dengan $K_p = 500$ dan $K_D = 70$, dengan $K_p = 700$ dan $K_D = 100$. Akan tetapi penelitian tersebut hanya berhenti pada fungsi transfer dari sistem dinamik. Penelitian tersebut kemudian dilanjutkan oleh Salmaa dan Fuad (2017), menyatakan bahwa gerak diagonal bidang X^+OZ^- , bidang X^-OZ^+ , bidang Y^+OZ^+ , dan bidang Y^-OZ^+ adalah stabil jika

memenuhi $0 < K_p < 10513, K_I > 0$ dan $K_D < 7680$ serta gerak diagonal di bidang X^+OY^+ , di bidang X^+OY^- , di bidang X^-OY^- , di bidang X^-OY^+ adalah asimptotik stabil jika memenuhi $K_p > 0, K_I > 0$ dan $K_D > -1520$. Kemudian dilanjutkan kembali oleh Razi dan Fuad (2018), diperoleh bahwa *quadrotor* stabil asimptotik untuk masing-masing gerak vertikal, gerak *yawing*, gerak longitudinal, dan *lateral* dengan $K_p = 60000$ dan $K_D = 4000, K_p = 80000$ dan $K_D = 7000, K_p = 13000$ dan $K_D = 3000, K_p = 11000$ dan $K_D = 1100$. Sedangkan penggunaan algoritma *tangent bug* yang fisibel digunakan untuk menerapkan *target tracking* melewati beberapa *obstacles*. Penelitian-penelitian tersebut di atas hanya menjelaskan gerak *quadrotor* secara umum serta khusus pada *drone* tipe 2.0 berbasis *target tracking* dan belum secara spesifik mengkaji penerapan kontrol *sliding* proporsional-integral-derivatif pada aspek *altitude* yang ditentukan.

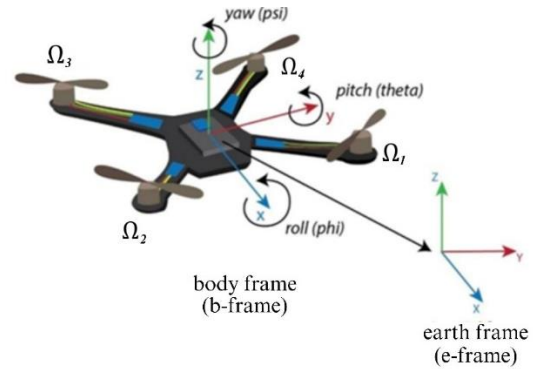
Pada penelitian ini akan dikombinasikan kontrol PID dengan mekanisme kontrol *sliding* yang lebih *robust* terhadap gangguan dan ketidakpastian parameter sistem (Rinaldi *et al.*, 2023).

KAJIAN TEORI

SISTEM DINAMIK QUADROTOR

Quadrotor memiliki sistem dinamik yang kompleks, dimana banyak variabel saling berinteraksi untuk menghasilkan gerakan yang diinginkan. Gerakan *quadrotor* sangat bergantung pada pengaturan kecepatan putaran *rotor* dan arah putaran baling-baling. Perubahan pada salah satu variabel tersebut akan berdampak pada gaya-gaya yang bekerja pada *quadrotor*, sehingga mempengaruhi posisi dan orientasi geraknya.

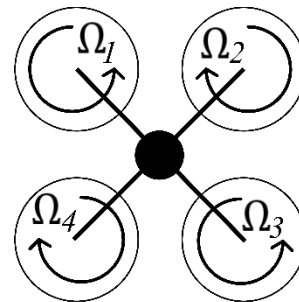
Pada *quadrotor*, terdapat dua sistem koordinat yang digunakan, yaitu sistem *earth frame* (tetap) dan sistem yang *body frame* (dinamis). Hukum Newton I dianggap berlaku pada sistem koordinat tetap, yang sering disebut sebagai sistem inersia. Pada sistem koordinat tetap, digunakan sistem ONED, di mana NED adalah singkatan dari *north-east-down* (utara-timur-bawah), karena vektor-vektornya mengarah ke utara, timur, dan pusat Bumi. Sedangkan pada sistem koordinat bergerak, dalam literatur ilmiah disebut sebagai sistem OABC, di mana ABC adalah singkatan dari *aircraft body center* (pusat badan pesawat) (Sabatino, 2015).



Gambar 2. Skema *quadrotor*

Sumber: Aisuwarya *et al.* (2022)

Altitude quadrotor dapat diatur sesuai kebutuhan dengan mengubah kecepatan keempat *rotor*-nya. Kecepatan *rotor* juga mempengaruhi gaya dan momen pada *quadrotor* seperti gaya dorong yang dihasilkan oleh putaran *rotor*, momen *pitching* dan *rolling* akibat perbedaan gaya dorong di antara *rotor*, serta momen *yawing*. Momen *yawing* disebabkan oleh ketidakseimbangan kecepatan rotasi keempat *rotor*, namun dapat diatasi ketika dua *rotor* berputar dalam arah yang berlawanan. Baling-baling depan kiri dan baling-baling belakang kanan (Ω_1 dan Ω_3) berputar berlawanan arah jarum jam, sedangkan baling-baling depan kanan dan baling-baling belakang kiri (Ω_2 dan Ω_4) berputar searah jarum jam.

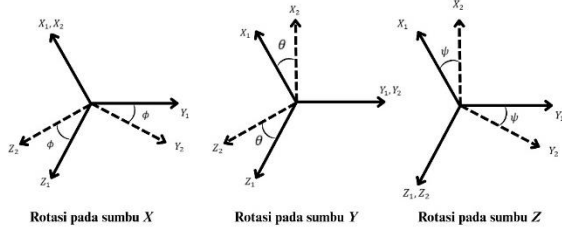


Gambar 3. Arah putaran baling baling

Gerakan naik atau turun sepanjang sumbu Z dalam *earth frame* disebut sebagai gerak vertikal pada *quadrotor*. Dengan mengubah daya dorong total yang dihasilkan oleh keempat *rotor*, gerakan ini dapat dikontrol. *Quadrotor* naik ketika kecepatan putar semua *rotor* meningkat secara bersamaan, karena dorongan total menjadi lebih besar dari gaya gravitasi. Sebaliknya, *quadrotor* turun jika kecepatan *rotor* dikurangi, sehingga dorongan total lebih kecil dari gaya gravitasi.

MATRIKS ROTASI QUADROTOR

Rotasi *quadrotor* sepanjang sumbu X, Y dan Z menghasilkan sudut *roll*, *pitch* dan *yaw*, yang dilambangkan sebagai $R(\phi, X), R(\theta, Y)$ dan $R(\psi, Z)$. Matriks rotasi *quadrotor* dapat diperoleh dengan mengalikan ketiga matriks rotasi pada masing-masing sumbu (Dharmawan *et al.*, 2014).



Gambar 4. Rotasi pada sumbu X, Y dan Z

Matriks rotasi pada sumbu X adalah

$$R(\phi, X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1)$$

Matriks rotasi pada sumbu Y adalah

$$R(\theta, Y) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

Matriks rotasi pada sumbu Z adalah

$$R(\psi, Z) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

sehingga

$$R = R(\phi, X)R(\theta, Y)R(\psi, Z) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

dimana

$$\begin{aligned} k_{11} &= \cos \theta \cos \psi, \\ k_{12} &= \cos \theta \sin \psi, \\ k_{13} &= -\sin \theta, \\ k_{21} &= \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi, \\ k_{22} &= \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi, \\ k_{23} &= \sin \phi \cos \theta, \\ k_{31} &= \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi, \\ k_{32} &= \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi, \\ k_{33} &= \cos \phi \cos \theta. \end{aligned}$$

Dengan ϕ, θ dan ψ adalah sudut masing-masing sumbu dengan satuan radian dan diasumsikan bahwa *quadrotor* sebagai struktur yang simetris dari keempat lengan *quadrotor* dan berada pada sumbu X dan sumbu Y . Matriks diagonal I_n adalah matriks momen inersia dari *quadrotor* dimana $I_x = I_y$ dan I_n adalah matriks momen inersia (Dharmawan *et al.*, 2014).

$$I_n = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (5)$$

Transformasi matriks (6) digunakan untuk mentransformasi kecepatan angular dalam *b-frame* (p, q, r) ke kecepatan sudut dalam *e-frame* (ϕ, θ, ψ) (Dharmawan *et al.*, 2014):

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = R_r \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (6)$$

dimana

$$R_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

Jika vektor posisi Γ_E menunjukkan posisi awal *quadrotor*, dan dinyatakan dengan

$$\Gamma_E = [x \ y \ z]^T \quad (8)$$

diperoleh derivatif dari Γ_E adalah

$$\dot{\Gamma}_E = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T \quad (9)$$

Untuk menentukan komponen dari kecepatan linier *quadrotor*, digunakan:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = R^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (11)$$

sehingga diperoleh (Domingues, 2009):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \quad (12)$$

dimana

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \theta \cos \psi u + (\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi)v \\ &\quad + (\cos \phi \sin \theta \cos \psi) + (\sin \phi \sin \psi)w, \\ a_{21} &= \cos \theta \sin \psi u + (\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi)v \\ &\quad + (\sin \theta \cos \phi \sin \psi) - (\sin \phi \cos \psi)w, \\ a_{31} &= -\sin \theta u + \sin \phi \cos \theta v + \cos \theta \cos \phi w. \end{aligned}$$

TITIK KESETIMBANGAN

Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{x} = f(x(t))$ dengan $x \in \mathbb{R}^n$ adalah solusi persamaan dengan kondisi awal $x(0) = x_0$ dalam bentuk $x(t, x_0)$. Vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ disebut titik setimbang (Olsder & Van der Woude, 1994).

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Jika A adalah matriks $n \times n$, $n \in \mathbb{N}$, maka vektor tak nol $x \in \mathbb{R}^n$ dinamakan vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar λ dari vektor x , yaitu $Ax = \lambda x$, untuk suatu skalar $\lambda \in \mathbb{C}$. Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan x adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ (Anton & Kaul, 2019).

FUNGSI TRANSFER

Fungsi transfer menggambarkan hubungan antara *input* dan *output* pada sistem linier yang tidak bergantung pada waktu atau disebut *Linear Time Invariant* (LTI). Fungsi transfer ini didefinisikan sebagai perbandingan dari *output* terhadap *input*, dengan asumsi bahwa semua kondisi awal bernilai nol (Finizio & Ladas, 1998).

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[\text{output}]}{\mathcal{L}[\text{input}]}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

dengan $Y(s)$ adalah transformasi Laplace dari *output* sistem dan $U(s)$ adalah transformasi Laplace dari *input* sistem serta dengan asumsi bahwa semua kondisi awal adalah bernilai nol.

KESTABILAN SISTEM DINAMIK

Diberikan persamaan diferensial $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}(t))$ dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah solusi persamaan dengan kondisi awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ dalam bentuk $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$.

1. Vektor $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ yang memenuhi $f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ disebut titik setimbang.
2. Suatu sistem dikatakan stabil jika $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$ berakibat $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.
3. Suatu sistem dikatakan stabil asimtotik di sekitar titik setimbang jika titik $\bar{\mathbf{x}}$ stabil, dan jika terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}}\| = 0$ jika $\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta_1$;
4. Suatu sistem dikatakan tidak stabil jika $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$ berakibat $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}}\| \geq \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.

Notasi $\|\cdot\|$ merujuk pada *norm*, yang umumnya menggunakan *norm* Euclidean. Secara intuitif, suatu sistem dianggap stabil jika solusinya tetap berada di sekitar titik kesetimbangan di dalam suatu persekitaran ε . Sistem dikatakan stabil asimtotik apabila solusinya konvergen menuju titik kesetimbangan. Sebaliknya, sistem disebut tidak stabil jika terdapat solusi yang, meskipun dimulai sangat dekat dengan titik kesetimbangan, akan menjauh dari titik setimbang tersebut (Olsder & Van der Woude, 1994).

KRITERIA ROUTH HURWITZ

Nilai eigen dari matriks A adalah akar-akar dari persamaan karakteristik

$$\det(\lambda I - A) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

dengan $a_0 = 1$. Kestabilan dari matriks A dapat ditentukan berdasarkan koefisien dari persamaan karakteristik $\{a_i\}$ tanpa menghitung terlebih dahulu nilai eigen dari matriks A . Tanpa menentukan besarnya nilai eigen, kriteria Routh-Hurwitz lebih fokus pada kepastian posisi (*locus*) dari nilai eigen pada separuh kiri bidang kompleks (*left-half plane*). Prosedur dari kriteria Routh-Hurwitz adalah sebagai berikut (Olsder & Van der Woude, 1994).

a_0	a_2	a_4	a_6	\dots
a_1	a_3	a_5	a_7	\dots
b_1	b_2	b_3	b_4	\dots
c_1	c_2	c_3	c_4	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

dengan koefisien $\{a_i\}$ dan $\{b_i\}$ ditentukan dari:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \quad b_i = \frac{a_1 a_{2i} - a_0 a_{2i+1}}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \quad c_i = \frac{b_1 a_{2i+1} - a_1 b_{i+1}}{b_1}$$

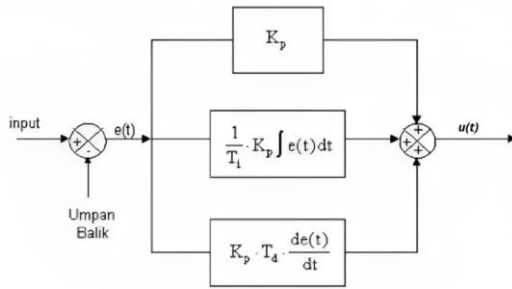
$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

Skema tersebut dilanjutkan hingga hanya tersisa elemen-elemen nol pada suku-suku di sisi kanan dan di bawah dalam tabel Routh-Hurwitz. Menurut kriteria Routh-Hurwitz, matriks A memiliki nilai eigen yang terletak di separuh kiri bidang kompleks jika dan hanya jika semua elemen di kolom pertama tabel Routh-Hurwitz memiliki tanda yang sama. Jika tidak ada perubahan tanda (dari tanda positif (+) ke tanda negatif (-) atau sebaliknya), maka kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi, dan sistem dinyatakan stabil atau stabil asimtotik (Olsder & Van der Woude, 1994).

KONTROL PROPORSIONAL-INTEGRAL-DERIVATIF

Kontrol Proporsional-Integral-Derivatif (PID) terdiri dari tiga komponen utama: kontrol proporsional, kontrol integral dan kontrol derivatif. Kontrol proporsional mempercepat waktu naik, kontrol integral berfungsi untuk mengurangi *error*, sementara kontrol derivatif membantu mengurangi *overshoot* dan mempercepat respon sistem. Dengan menggabungkan ketiga kontrol ini, dapat diperoleh sistem kendali yang memiliki waktu naik cepat, *error* minimal, dan stabilitas yang baik (Gunterus, 1994).

Berikut merupakan blok diagram kontrol PID



Gambar 5. Blok diagram kontrol PID

Sumber: Gunterus (1994).

Dengan bentuk umum

$$y(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_I} \int_0^t e(t) dt + K_p T_D \frac{de(t)}{dt}$$

atau dalam transformasi laplace diubah ke bentuk

$$\frac{U(s)}{Y(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

dengan

$$T_D = \frac{K_D}{K_p}$$

$$T_I = \frac{K_p}{K_I}$$

KONTROL SLIDING

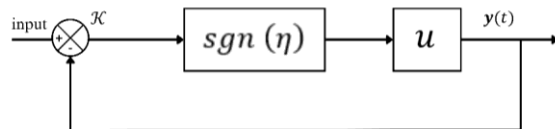
Salah satu kontrol yang dapat diterapkan dalam desain pengontrol *robust* adalah *sliding mode control* (SMC), yang dikenal efektif dalam menangani ketidakpastian dan gangguan pada sistem (Shtessel *et al.*, 2014).

Misalkan kontrol *sliding* didefinisikan sebagai berikut:

$$s = \text{sgn}(\eta)$$

dengan fungsi $\text{sgn}(\eta)$ didefinisikan sebagai:

$$\text{sgn}(\eta) = \begin{cases} 1 & \eta > 0 \\ 0 & \eta = 0 \\ -1 & \eta < 0 \end{cases}$$

Gambar 6. Blok diagram kontrol *sliding*

Bentuk umum dari kontrol *sliding* adalah

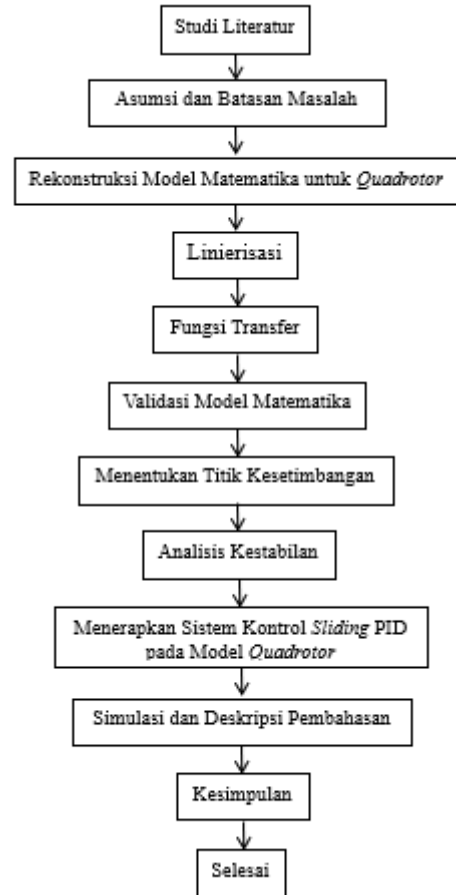
$$y(t) = \mathcal{K}(\text{sgn}(\eta))u$$

dimana

- $y(t)$: output
- \mathcal{K} : gain dari output
- $\text{sgn}(\eta)$: kontrol *sliding*
- u : konstanta kontrol *sliding*

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian yang digunakan adalah studi literatur, dimana informasi atau data yang dibutuhkan, seperti model matematika dan parameter, diperoleh melalui penelaahan berbagai sumber, termasuk buku, jurnal, artikel, serta referensi terkait.



Gambar 7. Diagram Alir Penelitian

HASIL DAN PEMBAHASAN

REKONSTRUKSI MODEL DINAMIK QUADROTOR

Model dinamik *quadrotor* direkonstruksi dengan menganalisis gerak pada *quadrotor* dan mendapatkan model kinematikanya dengan menerapkan asumsi dan batasan penelitian sebagai berikut:

1. Struktur *quadrotor* dianggap sebagai benda kaku (*rigid body*) dan simetris,
2. Titik berat beban *quadrotor* berada tepat di tengah (pusat masa) *quadrotor*,
3. Efek getaran dari baling-baling diabaikan.
4. Pembahasan difokuskan pada analisis *altitude* pada *quadrotor* bertipe silang "x" dengan pengontrol *sliding* PID.

5. Parameter-parameter yang digunakan dalam merekonstruksi model dinamik *quadrotor* diadopsi dari Jirinec (2011).

6. Spesifikasi *quadrotor* dalam analisis gerak vertikal *quadrotor* diadopsi dari Koszewnik (2014).

Vektor posisi linier dan vektor posisi sudut diperoleh dengan mendefinisikan koordinat bumi pada *e-frame* sebagai berikut:

$$\mathbf{r}_E = [x \ y \ z]^T \quad (13)$$

$$\mathbf{\theta}_E = [\phi \ \theta \ \psi]^T \quad (14)$$

Vektor kecepatan linier \mathbf{V}_B dan vektor kecepatan sudut $\mathbf{\tau}_B$ pada *quadrotor* adalah:

$$\mathbf{V}_B = [u \ v \ w]^T \quad (15)$$

$$\mathbf{\tau}_B = [p \ q \ r]^T \quad (16)$$

Diperoleh vektor posisi $\mathbf{\xi}_p$ dan vektor kecepatan $\mathbf{\xi}_s$ dari *quadrotor* adalah:

$$\mathbf{\xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_E \\ \mathbf{\theta}_E \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T \quad (17)$$

$$\mathbf{\xi}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_B \\ \mathbf{\tau}_B \end{bmatrix} = [u \ v \ w \ p \ q \ r]^T \quad (18)$$

Gerak dan stabilisasi *quadrotor* memerlukan gaya aerodinamik serta momen yang dihasilkan oleh *rotor-rotor*-nya. Rotor ke- i menghasilkan gaya aerodinamik F_i dan momen M_i sebagai berikut (Elkholy, 2014):

$$F_i = b\Omega_i^2$$

$$M_i = \mu\Omega_i^2$$

dimana b gaya aerodinamik (gaya angkat) dan μ adalah konstanta setiap momen. Sedangkan Ω_i adalah kecepatan *rotor* ke- i dengan $i = 1, 2, 3, 4$.

Momen M_i yang bekerja pada *quadrotor* dapat ditentukan dengan menganalisis gaya dan momen yang dihasilkan oleh *rotor-rotor*-nya. Setiap *rotor* menghasilkan momen M_i yang arahnya ditentukan oleh arah rotasi *rotor*, serta gaya dorong ke atas F_i . Berikut adalah rumusan untuk total gaya dorong T_{tot} yang dihasilkan oleh seluruh *rotor*:

$$T_{tot} = \sum_{i=1}^4 F_i = \sum_{i=1}^4 b\Omega_i^2 \quad (19)$$

Pada *quadrotor* dengan konfigurasi silang, *rotor* tidak sejajar dengan sumbu X atau Y , melainkan membentuk sudut 45° terhadap kedua sumbu. Untuk menghitung momen atau gaya yang bekerja pada sumbu X atau Y , dibutuhkan komponen panjang lengan yang sejajar dengan sumbu tersebut. Karena *rotor* berada di sudut 45° terhadap kedua sumbu, sehingga panjang lengan harus diproyeksikan ke arah sumbu X atau Y . Dengan

aturan trigonometri diperoleh $l_p = \frac{l}{2}\sqrt{2}$ (Ali dan Jaber, 2022)

Total momen pada sumbu X dinyatakan sebagai berikut (Jacewicz *et al.*, 2022):

$$\begin{aligned} M_x &= -F_1 l_p + F_2 l_p + F_3 l_p - F_4 l_p \\ &= -(b\Omega_1^2)l_p + (b\Omega_2^2)l_p + (b\Omega_3^2)l_p - (b\Omega_4^2)l_p \\ &= l_p b(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \end{aligned} \quad (20)$$

Total momen pada sumbu Y dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} M_y &= -F_1 l_p - F_2 l_p + F_3 l_p + F_4 l_p \\ &= -(b\Omega_1^2)l_p - (b\Omega_2^2)l_p + (b\Omega_3^2)l_p + (b\Omega_4^2)l_p \\ &= l_p b(-\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{aligned} \quad (21)$$

Total momen pada sumbu Z dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} M_z &= M_1 - M_2 + M_3 - M_4 \\ &= (\mu\Omega_1^2) + (\mu\Omega_3^2) - (\mu\Omega_2^2) - (\mu\Omega_4^2) \\ &= \mu(\Omega_1^2 + \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \Omega_4^2) \end{aligned} \quad (22)$$

Diperoleh matriks 20 dari persamaan 19 - 22 sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} T_{tot} \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ -l_p b & l_p b & l_p b & -l_p b \\ -l_p b & -l_p b & l_p b & l_p b \\ \mu & -\mu & \mu & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

dengan μ adalah koefisien gaya hambatan *rotor* dari *quadrotor*.

Transformasi koordinat dari *e-frame* ke *b-frame* menggambarkan perubahan posisi *quadrotor* dalam ruang. Dengan menggunakan matriks rotasi, transformasi ini dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_l(t)}{dt} &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{V}_B(t) \\ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dengan

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

dimana

$$\begin{aligned} m_{11} &= \cos \psi \cos \theta, \\ m_{12} &= -\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi, \\ m_{13} &= \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \cos \phi, \\ m_{21} &= \sin \psi \cos \theta, \\ m_{22} &= \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \theta \sin \phi, \\ m_{23} &= -\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \sin \theta \cos \phi, \\ m_{31} &= -\sin \theta, \\ m_{32} &= \cos \theta \sin \phi, \\ m_{33} &= \cos \theta \cos \phi. \end{aligned}$$

sehingga diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u(\cos \psi \cos \theta) + \\ &\quad v(-\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi) \\ &\quad + w(\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \cos \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{y} &= u(\sin \psi \cos \theta) + \\ &\quad v(\cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \theta \sin \phi) + \\ &\quad w(\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) \\ \dot{z} &= -u \sin \theta + \\ &\quad v(\cos \theta \sin \phi) + w(\cos \theta \cos \phi)\end{aligned}\quad (24)$$

Untuk menghubungkan kecepatan sudut yang diukur pada *body quadrotor* dengan koordinat tetap, digunakan transformasi kecepatan sudut dari *b-frame* terhadap *e-frame* yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\tau_B &= \mathbf{W} \dot{\Theta}_E \\ \tau_B &= [p \ q \ r]^T \\ \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ \dot{\Theta}_E &= \mathbf{W}^{-1} \tau_B \\ \dot{\Theta}_E &= [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T \\ \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (25)$$

dimana

$$\begin{aligned}\phi &\equiv \phi(t); & \theta &\equiv \theta(t); & \psi &\equiv \psi(t) \\ p &\equiv p(t); & q &\equiv q(t); & r &\equiv r(t) \\ \dot{\phi} &\equiv \frac{d\phi}{dt}; & \dot{\theta} &\equiv \frac{d\theta}{dt}; & \dot{\psi} &\equiv \frac{d\psi}{dt}\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (22) diperoleh:

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= p + q(\sin \phi \tan \theta) + r(\cos \phi \tan \theta) \\ \dot{\theta} &= q \cos \phi - r \sin \phi \\ \dot{\psi} &= q(\sin \phi \sec \theta) + r(\cos \phi \sec \theta)\end{aligned}\quad (26)$$

Percepatan linier dapat diperoleh dengan menerapkan hukum kedua Newton, maka dapat dicari melalui (Domingues, 2009):

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_l &= m \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} \\ &= m \frac{d}{dt} [\mathbf{v}_B] + \boldsymbol{\omega}_B \times m[\mathbf{v}_B]\end{aligned}$$

dimana m yaitu massa *quadrotor* dan \mathbf{v}_B adalah vektor kecepatan pada *b-frame*, maka gaya yang bekerja adalah:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \left(\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right)$$

atau

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{u} + (qw - rv) \\ \dot{v} + (ru - pw) \\ \dot{w} + (pv - uq) \end{bmatrix}$$

Diperoleh gaya gravitasi dengan \mathbf{R} adalah matriks rotasi persamaan (4)

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_g &= m\mathbf{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = -mg \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_p &= \mathbf{F}_l\end{aligned}$$

Vektor percepatan linier dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}-mg \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{px} \\ F_{py} \\ F_{pz} \end{bmatrix} &= m \begin{bmatrix} \dot{u} + (qw - rv) \\ \dot{v} + (ru - pw) \\ \dot{w} + (pv - uq) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} &= \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_{px} \\ F_{py} \\ F_{pz} \end{bmatrix} - g \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} qw - rv \\ ru - pw \\ pv - uq \end{bmatrix}\end{aligned}$$

dimana $[F_{px} \ F_{py} \ F_{pz}]^T$ adalah komponen dari vektor \mathbf{F}_p yang masing-masing adalah gaya berat searah sumbu X , Y dan Z dengan asumsi bahwa *quadrotor* dalam posisi *hover*. Terdapat gaya pada sumbu Z dimana *quadrotor* dapat menjaga kestabilannya saat *hover*, yaitu

$$F_{pz} = T_{tot}$$

Sehingga persamaannya dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_{tot} \end{bmatrix} - g \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} qw - rv \\ ru - pw \\ pv - uq \end{bmatrix}\quad (27)$$

berdasarkan persamaan (27) diperoleh:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= g \sin \theta - qw + rv \\ \dot{v} &= -g \cos \theta \sin \phi - ru + pw \\ \dot{w} &= \frac{1}{m} T_{tot} - g \cos \theta \cos \phi - pv + uq\end{aligned}\quad (28)$$

dengan T_{tot} adalah total gaya dorong dari rotasi *quadrotor* persamaan (19).

Momen eksternal \mathbf{M} didefinisikan sama dengan perubahan waktu terhadap momentum sudut \mathbf{H} dari *quadrotor* (Jirinec, 2011):

$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$$

kemudian momentum pada *e-frame* dirubah terhadap *b-frame*, didapat:

$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\tau}_B \times \mathbf{H}$$

dengan $\mathbf{H} = \mathbf{I} \boldsymbol{\tau}_B$, maka diperoleh:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\tau}}_B + \boldsymbol{\tau}_B \times \mathbf{I} \boldsymbol{\tau}_B$$

dimana \mathbf{I} adalah momen inersia *quadrotor*

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

dengan I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} masing-masing adalah momen inersia terhadap sumbu X, Y dan Z . Sehingga komponen-komponen momentum setiap sumbu adalah

$$\begin{aligned}M_x &= \dot{p} l_{xx} + q r (I_{zz} - I_{yy}) \\ M_y &= \dot{q} l_{yy} + p r (I_{xx} - I_{zz}) \\ M_z &= \dot{r} l_{zz} + p q (I_{yy} - I_{xx})\end{aligned}\quad (29)$$

Karena badan *quadrotor* simetris pada bidang XZ dan YZ , maka berlaku $I_{xx} \approx I_{yy}$, sehingga persamaan (29) dapat ditulis:

$$M_x = \dot{p} l_{xx} + q r (I_{zz} - I_{yy})$$

$$M_y = \dot{q}I_{yy} + pr(I_{xx} - I_{zz}) \quad (30)$$

$$M_z = \dot{r}I_{zz}$$

Persamaan (30) dapat diubah dengan mensubstitusikan persamaan (20) – (22), menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{I_{xx}b}{I_{xx}}(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) - qr \frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}}, \\ \dot{q} &= \frac{I_{yy}b}{I_{yy}}(-\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) - pr \frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}}, \\ \dot{r} &= \frac{\mu}{I_{zz}}(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2). \end{aligned} \quad (31)$$

LINIERISASI

Persamaan (24), (26), (28) dan (31) merupakan model non-linier, sistem non linier dapat diaproksimasi dengan sistem linier yaitu dengan solusi terdekat yang mendekati sistem linier. Linierisasi dilakukan karena sistem linier dapat dianalisis jauh lebih mudah dibandingkan dengan sistem non-linier. Karena *quadrotor* berada dalam posisi *hover*, yaitu posisinya tetap di satu titik, dan semua *rotor*-nya berputar dengan kecepatan sudut konstan yang sama, maka sudut orientasi *quadrotor* yaitu ϕ, θ dan ψ semuanya bernilai nol, dan kecepatan rotasi setiap *rotor* konstan serta sama besar. Oleh karena itu, *quadrotor* dianggap berada dalam kondisi tunak (*steady state*), dengan titik kesetimbangannya sebagai berikut (Jirinec, 2011):

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= 0; & \tilde{u} &= 0; & \tilde{p} &= 0; \\ \tilde{\theta} &= 0; & \tilde{v} &= 0; & \tilde{q} &= 0; \\ \tilde{\psi} &= 0; & \tilde{w} &= 0; & \tilde{r} &= 0; \end{aligned} \quad (32)$$

$$\tilde{\Omega}_1 = \tilde{\Omega}_2 = \tilde{\Omega}_3 = \tilde{\Omega}_4 = \tilde{\Omega}_0 = 28500 \text{ rpm}$$

didefinisikan persamaan (33)

$$\begin{aligned} \tilde{x} + \Delta x; & \quad y = \tilde{y} + \Delta y; & \quad z = \tilde{z} + \Delta z; & \quad \Omega_1 = \tilde{\Omega}_1 + \Delta\Omega_1; \\ \tilde{x} + \Delta u; & \quad v = \tilde{v} + \Delta v; & \quad w = \tilde{w} + \Delta w; & \quad \Omega_2 = \tilde{\Omega}_2 + \Delta\Omega_2; \\ \tilde{x} + \Delta p; & \quad q = \tilde{q} + \Delta q; & \quad r = \tilde{r} + \Delta r; & \quad \Omega_3 = \tilde{\Omega}_3 + \Delta\Omega_3; \\ \tilde{x} + \Delta\phi; & \quad \theta = \tilde{\theta} + \Delta\theta; & \quad \psi = \tilde{\psi} + \Delta\psi; & \quad \Omega_4 = \tilde{\Omega}_4 + \Delta\Omega_4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x} + \Delta x; & y &= \tilde{y} + \Delta y; & z &= \tilde{z} + \Delta z; & \Omega_1 &= \tilde{\Omega}_1 + \Delta\Omega_1; \\ u &= \tilde{u} + \Delta u; & v &= \tilde{v} + \Delta v; & w &= \tilde{w} + \Delta w; & \Omega_2 &= \tilde{\Omega}_2 + \Delta\Omega_2; \\ p &= \tilde{p} + \Delta p; & q &= \tilde{q} + \Delta q; & r &= \tilde{r} + \Delta r; & \Omega_3 &= \tilde{\Omega}_3 + \Delta\Omega_3; \\ \phi &= \tilde{\phi} + \Delta\phi; & \theta &= \tilde{\theta} + \Delta\theta; & \psi &= \tilde{\psi} + \Delta\psi; & \Omega_4 &= \tilde{\Omega}_4 + \Delta\Omega_4; \end{aligned}$$

dimana $\tilde{x}, \tilde{y}, \dots, \tilde{\Omega}_4$ adalah *quadrotor* dalam keadaan setimbang dan $\Delta *$ merupakan deviasi saat keadaan setimbang.

Diasumsikan bahwa:

- Perkalian antar geseran $(\Delta *)_1 \times (\Delta *)_2 = 0$,
- $\sin \theta \approx \Delta\theta$ dan $\sin \phi \approx \Delta\phi$,
- $\cos \theta \approx 1$ dan $\cos \phi \approx 1$,
- $\tan \theta \approx \Delta\theta$ dan $\tan \phi \approx \Delta\phi$.

Dari persamaan (24) dan (26) dapat ditulis:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{u}(\cos \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta}) + \tilde{v}(\sin \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} + \cos \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi}) + \\ &\quad \tilde{w}(\sin \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} + \cos \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi}); \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{u}(\sin \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta}) + \tilde{v}(\cos \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} + \sin \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi}) + \\ &\quad \tilde{w}(\sin \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi} - \cos \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta}); \\ \dot{\tilde{z}} &= -\tilde{u} \sin \tilde{\theta} + \tilde{v}(\cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi}) + \tilde{w}(\cos \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi}); \\ \dot{\tilde{\phi}} &= \tilde{p} + \tilde{q}(\sin \tilde{\phi} \tan \tilde{\theta}) + \tilde{r}(\cos \tilde{\phi} \tan \tilde{\theta}); \\ \dot{\tilde{\theta}} &= \tilde{q} \cos \tilde{\phi} - \tilde{r} \sin \tilde{\phi}; \\ \dot{\tilde{\psi}} &= \tilde{q}(\sin \tilde{\phi} \sec \tilde{\theta}) + \tilde{r}(\cos \tilde{\phi} \sec \tilde{\theta}). \end{aligned} \quad (34)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (33) ke persamaan (24) dan (26), didapat:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} + \Delta \dot{x} &= (\tilde{u} + \Delta u) \cos(\tilde{\psi} + \Delta\psi) \cos(\tilde{\theta} + \Delta\theta) + (\tilde{v} + \Delta v) \sin(\tilde{\psi} + \Delta\psi) \\ &\quad \cos(\tilde{\phi} + \Delta\phi) + \cos(\tilde{\psi} + \Delta\psi) \sin(\tilde{\theta} + \Delta\theta) \sin(\tilde{\phi} + \Delta\phi) + \\ &\quad (\tilde{w} + \Delta w) \sin(\tilde{\psi} + \Delta\psi) \sin(\tilde{\theta} + \Delta\theta) \cos(\tilde{\phi} + \Delta\phi) + \\ &\quad \sin(\tilde{\theta} + \Delta\theta) \cos(\tilde{\phi} + \Delta\phi); \\ \dot{\tilde{y}} + \Delta \dot{y} &= (\tilde{u} + \Delta u) \sin(\tilde{\psi} + \Delta\psi) \cos(\tilde{\theta} + \Delta\theta) + (\tilde{v} + \Delta v) \cos(\tilde{\psi} + \Delta\psi) \\ &\quad \cos(\tilde{\phi} + \Delta\phi) + \sin(\tilde{\psi} + \Delta\psi) \sin(\tilde{\theta} + \Delta\theta) \sin(\tilde{\phi} + \Delta\phi) + \\ &\quad (\tilde{w} + \Delta w) \sin(\tilde{\psi} + \Delta\psi) \sin(\tilde{\theta} + \Delta\theta) \cos(\tilde{\phi} + \Delta\phi) - \\ &\quad \cos(\tilde{\psi} + \Delta\psi) \sin(\tilde{\theta} + \Delta\theta) \sin(\tilde{\phi} + \Delta\phi); \\ \dot{\tilde{z}} + \Delta \dot{z} &= -(\tilde{u} + \Delta u) \sin(\tilde{\theta} + \Delta\theta) + (\tilde{v} + \Delta v) \cos(\tilde{\theta} + \Delta\theta) \\ &\quad \sin(\tilde{\phi} + \Delta\phi) + (\tilde{w} + \Delta w) \cos(\tilde{\theta} + \Delta\theta) \cos(\tilde{\phi} + \Delta\phi); \\ \dot{\tilde{\phi}} + \Delta \dot{\phi} &= (\tilde{p} + \Delta p) + (\tilde{q} + \Delta q) \sin(\tilde{\phi} + \Delta\phi) \left(\frac{\tan \tilde{\theta} + \Delta\theta}{1 - \Delta\theta \tan \tilde{\theta}} \right) \\ &\quad + (\tilde{r} + \Delta r) \cos(\tilde{\phi} + \Delta\phi) \left(\frac{\tan \tilde{\theta} + \Delta\theta}{1 - \Delta\theta \tan \tilde{\theta}} \right); \\ \dot{\tilde{\theta}} + \Delta \dot{\theta} &= (\tilde{q} + \Delta q) \cos(\tilde{\phi} + \Delta\phi) - (\tilde{r} + \Delta r) \sin(\tilde{\phi} + \Delta\phi); \\ \dot{\tilde{\psi}} + \Delta \dot{\psi} &= (\tilde{q} + \Delta q) \sin(\tilde{\phi} + \Delta\phi) \left(\frac{1}{\cos \tilde{\theta} - \Delta\theta \sin \tilde{\theta}} \right) + (\tilde{r} + \Delta r) \\ &\quad \cos(\tilde{\phi} + \Delta\phi) \left(\frac{1}{\cos \tilde{\theta} - \Delta\theta \sin \tilde{\theta}} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Persamaan (35) dapat juga ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} + \Delta \dot{x} &= \tilde{u} \cos \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} - \tilde{u} \Delta\theta \cos \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} - \tilde{u} \Delta\psi \sin \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} \\ &\quad + \Delta u \cos \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} + \tilde{v} \cos \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} + \Delta v \cos \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} \\ &\quad + \tilde{v} \Delta\phi \cos \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi} + \tilde{v} \Delta\theta \cos \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} \\ &\quad - \tilde{v} \Delta\psi \sin \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} - \tilde{v} \sin \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} - \Delta v \sin \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} \\ &\quad + \tilde{v} \Delta\phi \sin \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} - \tilde{v} \Delta\psi \cos \tilde{\psi} \cos \tilde{\phi} + \tilde{w} \cos \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi} \\ &\quad + \Delta w \cos \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} - \tilde{w} \Delta\phi \cos \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} \\ &\quad + \tilde{w} \Delta\theta \cos \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi} - \tilde{w} \Delta\psi \sin \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} \\ &\quad + \tilde{w} \sin \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} + \Delta w \sin \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} + \tilde{w} \Delta\phi \sin \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} \\ &\quad + \tilde{w} \Delta\psi \cos \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta}; \\ \dot{\tilde{y}} + \Delta \dot{y} &= \tilde{u} \sin \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} + \tilde{u} \Delta\theta \sin \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} + \tilde{u} \Delta\psi \cos \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} \\ &\quad + \Delta u \sin \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} + \tilde{v} \sin \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} + \Delta v \sin \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} \\ &\quad + \tilde{v} \Delta\phi \sin \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi} + \tilde{v} \Delta\theta \sin \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} \\ &\quad + \tilde{v} \Delta\psi \cos \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} + \tilde{v} \cos \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} + \Delta v \cos \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} \\ &\quad + \tilde{v} \Delta\phi \cos \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} - \tilde{v} \Delta\psi \sin \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta}; \\ \dot{\tilde{z}} + \Delta \dot{z} &= -\tilde{u} \sin \tilde{\theta} - \tilde{u} \Delta\theta \cos \tilde{\theta} - \Delta u \sin \tilde{\theta} + \tilde{v} \cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} \\ &\quad + \tilde{v} \Delta\phi \cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} - \tilde{v} \Delta\theta \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} + \Delta v \cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} \\ &\quad + \tilde{w} \cos \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi} - \tilde{w} \Delta\phi \cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} - \tilde{w} \Delta\theta \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi} \\ &\quad + \Delta w \cos \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi}; \\ \dot{\tilde{\phi}} + \Delta \dot{\phi} &= (\tilde{p} + \Delta p) + \\ &\quad \frac{\tilde{q} \sin \tilde{\phi} \tan \tilde{\theta} + \tilde{q} \Delta\theta \sin \tilde{\phi} + \tilde{q} \Delta\phi \cos \tilde{\phi} \tan \tilde{\theta} + \Delta q \sin \tilde{\phi} \tan \tilde{\theta} +}{1 - \Delta\theta \tan \tilde{\theta}} + \\ &\quad \frac{\tilde{r} \cos \tilde{\phi} \tan \tilde{\theta} + \tilde{r} \Delta\theta \cos \tilde{\phi} - \tilde{r} \Delta\phi \sin \tilde{\phi} \tan \tilde{\theta} + \Delta r \cos \tilde{\phi} \tan \tilde{\theta}}{1 - \Delta\theta \tan \tilde{\theta}}; \\ \dot{\tilde{\theta}} + \Delta \dot{\theta} &= -\tilde{r} \sin \tilde{\phi} - \tilde{r} \Delta\phi \cos \tilde{\phi} - \Delta r \sin \tilde{\phi} + \tilde{q} \cos \tilde{\phi} - \\ &\quad \tilde{q} \Delta\phi \sin \tilde{\phi} + \Delta q \cos \tilde{\phi}; \\ \dot{\tilde{\psi}} + \Delta \dot{\psi} &= \frac{\tilde{q} \sin \tilde{\phi} + \tilde{q} \Delta\phi \cos \tilde{\phi} + \Delta q \sin \tilde{\phi}}{\cos \tilde{\theta} - \Delta\theta \sin \tilde{\theta}} + \\ &\quad \frac{\tilde{r} \cos \tilde{\phi} - \tilde{r} \Delta\phi \sin \tilde{\phi} + \Delta r \cos \tilde{\phi}}{\cos \tilde{\theta} - \Delta\theta \sin \tilde{\theta}}; \end{aligned} \quad (36)$$

Hasil berikut diperoleh melalui pengurangan persamaan (34) dari persamaan (36), yang selanjutnya disubstitusikan dengan persamaan (32):

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= \Delta u; & \Delta \dot{\phi} &= \Delta p; \\ \Delta \dot{y} &= \Delta v; & \Delta \dot{\theta} &= \Delta q; \end{aligned} \quad (37)$$

$$\Delta \dot{z} = \Delta w; \quad \Delta \dot{\psi} = \Delta r;$$

Kemudian menggunakan persamaan (28) dan (31) untuk linierisasi persamaan percepatan linier dan sudut di sekitar titik kesetimbangan (32).

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= g \sin \bar{\theta} - \tilde{q}\tilde{w} + \tilde{r}\tilde{v}; \\ \ddot{v} &= -g \cos \bar{\theta} \sin \bar{\phi} - \tilde{r}\tilde{u} + \tilde{p}\tilde{w}; \\ \ddot{w} &= \frac{b}{m}(\tilde{\Omega}_1^2 + \tilde{\Omega}_2^2 + \tilde{\Omega}_3^2 + \tilde{\Omega}_4^2) - g \cos \bar{\theta} \cos \bar{\phi} - \tilde{p}\tilde{v} + \tilde{u}\tilde{q}; \\ \ddot{p} &= \frac{l_p b}{I_{xx}}(-\tilde{\Omega}_1^2 + \tilde{\Omega}_2^2 + \tilde{\Omega}_3^2 - \tilde{\Omega}_4^2) - \tilde{q}\tilde{r} \frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}}; \\ \ddot{q} &= \frac{l_p b}{I_{yy}}(-\tilde{\Omega}_1^2 - \tilde{\Omega}_2^2 + \tilde{\Omega}_3^2 + \tilde{\Omega}_4^2) - \tilde{p}\tilde{r} \frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}}; \\ \ddot{r} &= \frac{\mu}{I_{zz}}(\tilde{\Omega}_1^2 - \tilde{\Omega}_2^2 + \tilde{\Omega}_3^2 - \tilde{\Omega}_4^2); \end{aligned} \quad (38)$$

Substitusikan persamaan (33) ke persamaan (28) dan (31) diperoleh:

$$\begin{aligned} \dot{u} + \Delta \dot{u} &= g \sin(\bar{\theta} + \Delta \theta) - (\tilde{q} + \Delta q)(\tilde{w} + \Delta w) + (\tilde{r} + \Delta r)(\tilde{v} + \Delta v); \\ \dot{v} + \Delta \dot{v} &= -g \cos(\bar{\theta} + \Delta \theta) \sin(\bar{\phi} + \Delta \phi) - (\tilde{r} + \Delta r)(\tilde{u} + \Delta u) + (\tilde{p} + \Delta p)(\tilde{w} + \Delta w); \\ \dot{w} + \Delta \dot{w} &= \frac{b}{m}((\tilde{\Omega}_1 + \Delta \Omega_1)^2 + (\tilde{\Omega}_2 + \Delta \Omega_2)^2 + (\tilde{\Omega}_3 + \Delta \Omega_3)^2 + (\tilde{\Omega}_4 + \Delta \Omega_4)^2) - g \cos(\bar{\theta} + \Delta \theta) \cos(\bar{\phi} + \Delta \phi) - (\tilde{p} + \Delta p)(\tilde{v} + \Delta v) + (\tilde{u} + \Delta u)(\tilde{q} + \Delta q); \\ \dot{p} + \Delta \dot{p} &= \frac{l_p b}{I_{xx}}(-(\tilde{\Omega}_1 + \Delta \Omega_1)^2 + (\tilde{\Omega}_2 + \Delta \Omega_2)^2 + (\tilde{\Omega}_3 + \Delta \Omega_3)^2 - (\tilde{\Omega}_4 + \Delta \Omega_4)^2) - (\tilde{q} + \Delta q)(\tilde{r} + \Delta r) \frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}}; \\ \dot{q} + \Delta \dot{q} &= \frac{l_p b}{I_{yy}}(-(\tilde{\Omega}_1 + \Delta \Omega_1)^2 - (\tilde{\Omega}_2 + \Delta \Omega_2)^2 + (\tilde{\Omega}_3 + \Delta \Omega_3)^2 + (\tilde{\Omega}_4 + \Delta \Omega_4)^2) - (\tilde{p} + \Delta p)(\tilde{r} + \Delta r) \frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}}; \\ \dot{r} + \Delta \dot{r} &= \frac{\mu}{I_{zz}}((\tilde{\Omega}_1 + \Delta \Omega_1)^2 - (\tilde{\Omega}_2 + \Delta \Omega_2)^2 + (\tilde{\Omega}_3 + \Delta \Omega_3)^2 - (\tilde{\Omega}_4 + \Delta \Omega_4)^2); \end{aligned} \quad (39)$$

Persamaan (39) dapat ditulis:

$$\begin{aligned} \dot{u} + \Delta \dot{u} &= g(\sin \bar{\theta} + \Delta \theta \cos \bar{\theta}) - (\tilde{q}\tilde{w} + \tilde{q}\Delta w + \tilde{w}\Delta q) + (\tilde{r}\tilde{v} + \tilde{r}\Delta v + \tilde{v}\Delta r); \\ \dot{v} + \Delta \dot{v} &= -g(\cos \bar{\theta} \sin \bar{\phi} + \Delta \phi \cos \bar{\theta} \cos \bar{\phi} - \Delta \theta \sin \bar{\theta} \sin \bar{\phi}) - (\tilde{r}\tilde{u} + \tilde{r}\Delta u + \tilde{u}\Delta r) + (\tilde{p}\tilde{w} + \tilde{p}\Delta w + \tilde{w}\Delta p); \\ \dot{w} + \Delta \dot{w} &= \frac{b}{m}((\tilde{\Omega}_1^2 + 2\tilde{\Omega}_1\Delta\Omega_1) + (\tilde{\Omega}_2^2 + 2\tilde{\Omega}_2\Delta\Omega_2) + (\tilde{\Omega}_3^2 + 2\tilde{\Omega}_3\Delta\Omega_3) + (\tilde{\Omega}_4^2 + 2\tilde{\Omega}_4\Delta\Omega_4)) - g(\cos \bar{\theta} \cos \bar{\phi} - \Delta \theta \sin \bar{\theta} \cos \bar{\phi} + \Delta \phi \cos \bar{\theta} \sin \bar{\phi}) - (\tilde{p}\tilde{v} + \tilde{p}\Delta v + \tilde{v}\Delta p) + (\tilde{q}\tilde{u} + \tilde{q}\Delta u + \tilde{u}\Delta q); \\ \dot{p} + \Delta \dot{p} &= \frac{l_p b}{I_{xx}}(-(\tilde{\Omega}_1^2 + 2\tilde{\Omega}_1\Delta\Omega_1) + (\tilde{\Omega}_2^2 + 2\tilde{\Omega}_2\Delta\Omega_2) + (\tilde{\Omega}_3^2 + 2\tilde{\Omega}_3\Delta\Omega_3) - (\tilde{\Omega}_4^2 + 2\tilde{\Omega}_4\Delta\Omega_4)) - (\tilde{q}\tilde{r} + \tilde{q}\Delta r + \tilde{r}\Delta q) \frac{(I_{zz} - I_{yy})}{I_{xx}}; \\ \dot{q} + \Delta \dot{q} &= \frac{l_p b}{I_{yy}}(-(\tilde{\Omega}_1^2 + 2\tilde{\Omega}_1\Delta\Omega_1) - (\tilde{\Omega}_2^2 + 2\tilde{\Omega}_2\Delta\Omega_2) + (\tilde{\Omega}_3^2 + 2\tilde{\Omega}_3\Delta\Omega_3) + (\tilde{\Omega}_4^2 + 2\tilde{\Omega}_4\Delta\Omega_4)) - (\tilde{p}\tilde{r} + \tilde{p}\Delta r + \tilde{r}\Delta p) \frac{(I_{xx} - I_{zz})}{I_{yy}}; \\ \dot{r} + \Delta \dot{r} &= \frac{\mu}{I_{zz}}((\tilde{\Omega}_1^2 + 2\tilde{\Omega}_1\Delta\Omega_1) - (\tilde{\Omega}_2^2 + 2\tilde{\Omega}_2\Delta\Omega_2) + (\tilde{\Omega}_3^2 + 2\tilde{\Omega}_3\Delta\Omega_3) - (\tilde{\Omega}_4^2 + 2\tilde{\Omega}_4\Delta\Omega_4)); \end{aligned} \quad (40)$$

Melalui operasi pengurangan antara persamaan (40) dan persamaan (38), diperoleh:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{u} &= g(\Delta \theta \cos \bar{\theta}) - (\tilde{q}\Delta w + \tilde{w}\Delta q) + (\tilde{r}\Delta v + \tilde{v}\Delta r); \\ \Delta \dot{v} &= -g(\Delta \phi \cos \bar{\theta} \cos \bar{\phi} - \Delta \theta \sin \bar{\theta} \sin \bar{\phi}) - (\tilde{r}\Delta u + \tilde{u}\Delta r) + (\tilde{p}\Delta w + \tilde{w}\Delta p); \\ \Delta \dot{w} &= \frac{b}{m}((2\tilde{\Omega}_1\Delta\Omega_1) + (2\tilde{\Omega}_2\Delta\Omega_2) + (2\tilde{\Omega}_3\Delta\Omega_3) + (2\tilde{\Omega}_4\Delta\Omega_4)) - g(-\Delta \theta \sin \bar{\theta} \cos \bar{\phi} + \Delta \phi \cos \bar{\theta} \sin \bar{\phi}) - (\tilde{p}\Delta v + \tilde{v}\Delta p) + (\tilde{q}\Delta u + \tilde{u}\Delta q); \\ \Delta \dot{p} &= \frac{l_p b}{I_{xx}}(-(2\tilde{\Omega}_1\Delta\Omega_1) + (2\tilde{\Omega}_2\Delta\Omega_2) + (2\tilde{\Omega}_3\Delta\Omega_3) - (2\tilde{\Omega}_4\Delta\Omega_4)) - (\tilde{q}\Delta r + \tilde{r}\Delta q) \frac{(I_{zz} - I_{yy})}{I_{xx}}; \\ \Delta \dot{q} &= \frac{l_p b}{I_{yy}}(-(2\tilde{\Omega}_1\Delta\Omega_1) - (2\tilde{\Omega}_2\Delta\Omega_2) + (2\tilde{\Omega}_3\Delta\Omega_3) + (2\tilde{\Omega}_4\Delta\Omega_4)) - (\tilde{p}\Delta r + \tilde{r}\Delta p) \frac{(I_{xx} - I_{zz})}{I_{yy}}; \\ \Delta \dot{r} &= \frac{\mu}{I_{zz}}((2\tilde{\Omega}_1\Delta\Omega_1) - (2\tilde{\Omega}_2\Delta\Omega_2) + (2\tilde{\Omega}_3\Delta\Omega_3) - (2\tilde{\Omega}_4\Delta\Omega_4)). \end{aligned} \quad (41)$$

Karena *quadrotor* dalam posisis *hover*, maka $\tilde{\Omega}_1 =$

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_2 = \tilde{\Omega}_3 = \tilde{\Omega}_4 = \tilde{\Omega}_0 \\ \Delta \dot{u} &= g(\Delta \theta \cos \bar{\theta}) - (\tilde{q}\Delta w + \tilde{w}\Delta q) + (\tilde{r}\Delta v + \tilde{v}\Delta r); \\ \Delta \dot{v} &= -g(\Delta \phi \cos \bar{\theta} \cos \bar{\phi} - \Delta \theta \sin \bar{\theta} \sin \bar{\phi}) - (\tilde{r}\Delta u + \tilde{u}\Delta r) + (\tilde{p}\Delta w + \tilde{w}\Delta p); \\ \Delta \dot{w} &= \frac{2\tilde{\Omega}_0 b}{m}((\Delta \Omega_1) + (\Delta \Omega_2) + (\Delta \Omega_3) + (\Delta \Omega_4)) - g(-\Delta \theta \sin \bar{\theta} \cos \bar{\phi} + \Delta \phi \cos \bar{\theta} \sin \bar{\phi}) - (\tilde{p}\Delta v + \tilde{v}\Delta p) + (\tilde{q}\Delta u + \tilde{u}\Delta q); \\ \Delta \dot{p} &= \frac{2\tilde{\Omega}_0 l_p b}{I_{xx}}(-(\Delta \Omega_1) + (\Delta \Omega_2) + (\Delta \Omega_3) - (\Delta \Omega_4)) - (\tilde{q}\Delta r + \tilde{r}\Delta q) \frac{(I_{zz} - I_{yy})}{I_{xx}}; \\ \Delta \dot{q} &= \frac{2\tilde{\Omega}_0 l_p b}{I_{yy}}(-(\Delta \Omega_1) - (\Delta \Omega_2) + (\Delta \Omega_3) + (\Delta \Omega_4)) - (\tilde{p}\Delta r + \tilde{r}\Delta p) \frac{(I_{xx} - I_{zz})}{I_{yy}}; \\ \Delta \dot{r} &= \frac{2\tilde{\Omega}_0 \mu}{I_{zz}}((\Delta \Omega_1) - (\Delta \Omega_2) + (\Delta \Omega_3) - (\Delta \Omega_4)). \end{aligned} \quad (42)$$

Mensubstitusikan persamaan (32) ke persamaan (42), diperoleh:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{u} &= g\Delta \theta; \\ \Delta \dot{v} &= -g\Delta \phi; \\ \Delta \dot{w} &= \frac{2\tilde{\Omega}_0 b}{m}((\Delta \Omega_1) + (\Delta \Omega_2) + (\Delta \Omega_3) + (\Delta \Omega_4)); \\ \Delta \dot{p} &= \frac{2\tilde{\Omega}_0 l_p b}{I_{xx}}(-(\Delta \Omega_1) + (\Delta \Omega_2) + (\Delta \Omega_3) - (\Delta \Omega_4)); \\ \Delta \dot{q} &= \frac{2\tilde{\Omega}_0 l_p b}{I_{yy}}(-(\Delta \Omega_1) - (\Delta \Omega_2) + (\Delta \Omega_3) + (\Delta \Omega_4)); \\ \Delta \dot{r} &= \frac{2\tilde{\Omega}_0 \mu}{I_{zz}}((\Delta \Omega_1) - (\Delta \Omega_2) + (\Delta \Omega_3) - (\Delta \Omega_4)); \end{aligned} \quad (43)$$

Karena persamaan (39) menggunakan bentuk $(\tilde{\Omega}_n + \Delta \Omega_n)^2$ dengan $n = 1, 2, 3, 4$, yang menunjukkan perilaku parabolik, maka laju perubahan kecepatan *rotor* memenuhi (Jirinec, 2011):

$$\dot{\Omega}_n = \alpha \Omega_n + \beta \Delta \Omega_n$$

dengan α dan β berupa parameter yang berdasarkan Jirinec (2011) dipilih $\alpha = -10$, $\beta = 7$, dan didefinisikan $\Delta \Omega_n = \delta_e$ diperoleh:

$$\dot{\Omega}_n = -10\Omega_n + 7\delta_e; n = 1, 2, 3, 4.$$

ANALISIS GERAK QUADROTOR

Berdasarkan model linier pada persamaan (37) dan (43), akan dilakukan analisis gerak vertikal *quadrotor*. Parameter yang digunakan adalah sebagai berikut

Tabel 1. Parameter *quadrotor*

Simbol	Keterangan	Nilai
m	Massa dari <i>quadrotor</i>	0,38 kg
$\tilde{\Omega}_0$	Kecepatan sudut maksimal pada <i>rotor</i>	28.500 rpm
b	Koefisien gaya angkat	$3,13 \times 10^{-5}$ kg m

(Sumber: Koszewnik, 2014)

Gerak naik atau turun sepanjang sumbu Z dalam *e-frame* disebut sebagai gerak vertikal pada *quadrotor*. Dengan mengubah daya dorong total yang dihasilkan oleh keempat *rotor*, gerakan ini dapat

dikontrol. *Quadrotor* naik ketika kecepatan putar semua *rotor* meningkat secara bersamaan, karena dorongan total menjadi lebih besar dari gaya gravitasi. Sebaliknya, *quadrotor* turun jika kecepatan *rotor* dikurangi, sehingga dorongan total lebih kecil dari gaya gravitasi. Sistem dinamik gerak vertikal adalah

$$\begin{aligned}\Delta \dot{z} &= \Delta w; \\ \Delta \dot{w} &= 2\tilde{\Omega}_0 \frac{b}{m} (\Delta \Omega_1 + \Delta \Omega_2 + \Delta \Omega_3 + \Delta \Omega_4); \\ \dot{\Omega}_n &= -10\Omega_n + 7\delta_e; \quad n = \{1,2,3,4\}.\end{aligned}\quad (44)$$

dengan *output* $y = \Delta w$, atau dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (45)$$

dengan *output*

$$y(t) = Cx(t)$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\tilde{\Omega}_0 b}{m} & \frac{2\tilde{\Omega}_0 b}{m} & \frac{2\tilde{\Omega}_0 b}{m} & \frac{2\tilde{\Omega}_0 b}{m} \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix};$$

$$x = \begin{bmatrix} \Delta \dot{z} \\ \Delta w \\ \Delta \dot{\Omega}_1 \\ \Delta \dot{\Omega}_2 \\ \Delta \dot{\Omega}_3 \\ \Delta \dot{\Omega}_4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}; C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; D = 0; u = \delta_e.$$

dengan

$\Delta \dot{z}$: kecepatan linier searah sumbu Z pada *e-frame*

$\Delta \dot{w}$: percepatan linier searah sumbu Z pada *b-frame*

$\Delta \dot{\Omega}_1$: percepatan *rotor* Ω_1

$\Delta \dot{\Omega}_2$: percepatan *rotor* Ω_2

$\Delta \dot{\Omega}_3$: percepatan *rotor* Ω_3

$\Delta \dot{\Omega}_4$: percepatan *rotor* Ω_4

dengan mensubstitusikan parameter pada Tabel 1 diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,695 & 4,695 & 4,695 & 4,695 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, akan diperoleh fungsi transfer gerak vertikal. Dengan kondisi awal nol, dan fungsi transfer adalah perbandingan transformasi Laplace *output* terhadap *input*, diperoleh:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ sX(s) - AX(s) &= BU(s) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}BU(s)\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}y(t) &= Cx(t) \\ Y(s) &= CX(s) \\ Y(s) &= C[(sI - A)^{-1}BU(s)] \\ \frac{Y(s)}{U(s)} &= C(sI - A)^{-1}B\end{aligned}$$

Untuk memperoleh fungsi transfer, unit step respon dan *root locus* sistem (45), digunakan Matlab 2024a dan diperoleh hasil berikut:

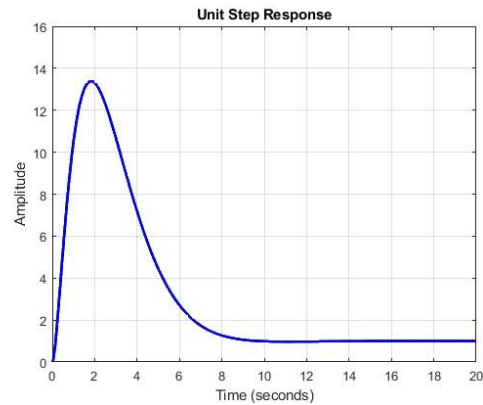
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{131,5s^4 + 3944s^3 + 39438s^2 + 131460s}{s^6 + 40s^5 + 600s^4 + 4000s^3 + 10000s^2} \quad (46)$$

PENERAPAN KONTROL SLIDING PROPORSIONAL-DERIVATIF

Sistem dinamik bersifat tidak stabil karena terdapat *poles* dengan nilai nol, sebagaimana ditunjukkan oleh *root locus* pada Gambar 9. Penerapan kontrol diperlukan untuk menjadikan sistem stabil asimptotik. Untuk menerapkan kontrol PID, nilai *gain* K_p, K_i dan K_d dalam fungsi transfer pada persamaan (46) harus ditentukan terlebih dahulu. Berdasarkan eksperimen, dipilih $K_p = 9000, K_i = 3000$ dan $K_d = 100$ sehingga fungsi transfer dari model dinamik *quadrotor* dengan kontrol PID diperoleh sebagai berikut

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{131,5s^4 + 3944s^3 + 39538s^2 + 140460s + 3000}{s^6 + 40s^5 + 600s^4 + 4000s^3 + 10100s^2 + 9000s + 3000} \quad (47)$$

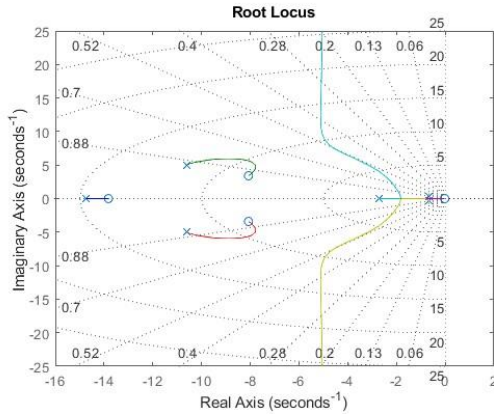
diperoleh unit step respon fungsi transfer (47) sebagai berikut



Gambar 8. Unit step respon dengan kontrol $K_p = 9000, K_i = 3000$ dan $K_d = 100$

Gambar 8 menunjukkan pengaruh kontrol $K_p = 9000$ dan $K_i = 3000$ dengan penambahan $K_d = 100$ menjadikan sistem stasioner setelah 10 detik.

Root locus dari persamaan (47) disajikan sebagai berikut



Gambar 9. Root locus dari persamaan (47)

Berdasarkan Gambar 9 nilai *poles* yang diperoleh adalah $-2,7288$; $-14,7227$; $-0,6522 \pm 0,338i$; dan $-10,6221 \pm 5,0240i$. Sistem pada persamaan (47) dikatakan stabil karena semua *poles* berada di sebelah kiri bidang kompleks.

Berdasarkan persamaan (47), diperoleh model *state-space* untuk gerak vertikal setelah penerapan kontrol PID yang dikonversi menggunakan perintah “tf2ss” pada Matlab R2024a sebagai berikut

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (48)$$

dengan output

$$y(t) = Cx(t)$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} -40 & -600 & -4000 & -10100 & -9000 & -3000 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$x = \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta \dot{w} \\ \Delta \dot{\Omega}_1 \\ \Delta \dot{\Omega}_2 \\ \Delta \dot{\Omega}_3 \\ \Delta \dot{\Omega}_4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 130 \\ 3940 \\ 39540 \\ 140460 \\ 3000 \end{bmatrix}; D = 0; u = \delta_e.$$

Dalam penelitian ini, dilakukan modifikasi terhadap matriks *B* dan *C* untuk menyesuaikan karakteristik sistem agar menghasilkan *single output*. Perubahan ini bertujuan agar sistem hanya merespons satu *input* spesifik dan menghasilkan satu *output* dominan, sehingga model dapat dianalisis sebagai *single-input single-output system* (SISO), yang lebih sesuai dengan pendekatan kontrol yang digunakan dalam studi ini. Berdasarkan eksperimen yang dilakukan oleh penulis dan tetap mempertahankan kestabilan sistem, diperoleh model

state-space hasil modifikasi matriks *B* dan *C* sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (49)$$

dengan output

$$y(t) = Cx(t)$$

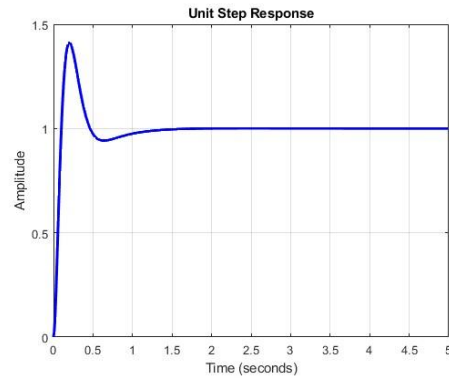
dengan

$$A = \begin{bmatrix} -40 & -600 & -4000 & -10100 & -9000 & -3000 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$x = \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta \dot{w} \\ \Delta \dot{\Omega}_1 \\ \Delta \dot{\Omega}_2 \\ \Delta \dot{\Omega}_3 \\ \Delta \dot{\Omega}_4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; D = 0; u = \delta_e = 50.$$

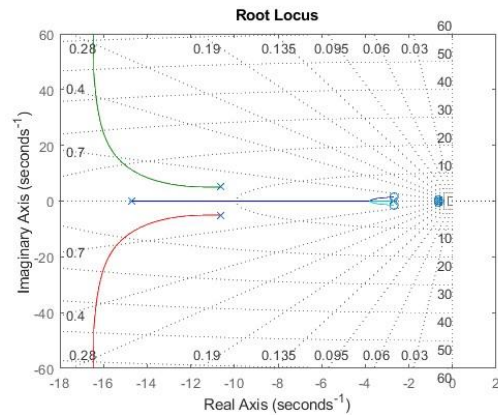
Menggunakan Matlab R2024a diperoleh fungsi transfer dan unit step respon sebagai berikut

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{600s^4 + 4.000s^3 + 10100s^2 + 9000s + 3000}{s^6 + 40s^5 + 600s^4 + 4000s^3 + 10100s^2 + 9000s + 3000} \quad (50)$$



Gambar 10. Unit step respon fungsi transfer (50)

Gambar 10 menunjukkan sistem stasioner setelah $t = 1.5$ detik. Root locus fungsi transfer (50) disajikan sebagai berikut

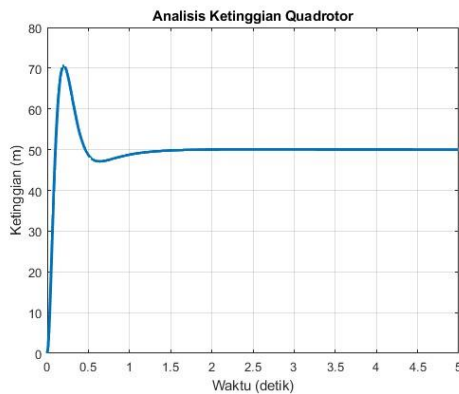


Gambar 11. Root locus dari persamaan (50)

Berdasarkan Gambar 11 nilai *poles* yang diperoleh adalah $-2,7288$; $-14,7227$; $-0,6522 \pm 0,338i$; dan $-10,6221 \pm 5,0240i$. Sistem pada persamaan (49)

dikatakan stabil karena semua *poles* berada di sebelah kiri bidang kompleks.

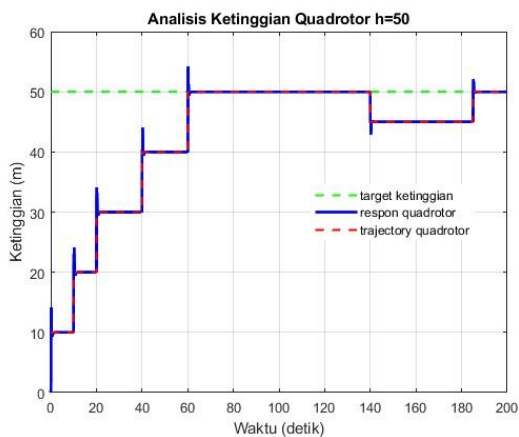
Berikut merupakan respon gerak vertikal dari sistem (49) setelah diterapkan kontrol PID pada ketinggian 50m menggunakan Matlab R2024a.



Gambar 12. Analisis ketinggian *quadrotor* dengan kontrol PID pada ketinggian 50m

Gambar 12 menunjukkan *quadrotor* dapat mencapai stabil asimtotik setelah $t = 1.5$ detik pada ketinggian 50m.

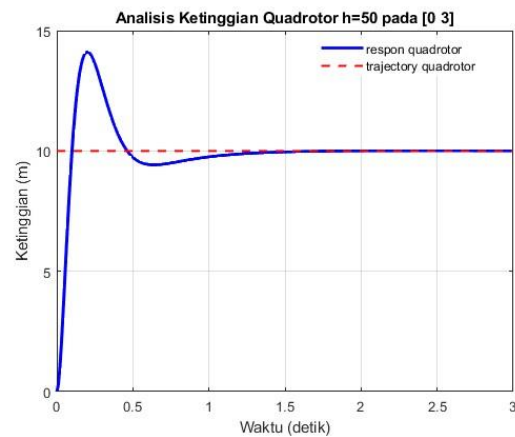
Selanjutnya akan ditambahkan kontrol *sliding* untuk mencapai target sesuai *trajectory* yang ditentukan yaitu $h = 50m$, diperoleh hasil berikut



Gambar 13. Analisis ketinggian *quadrotor* dengan kontrol *Sliding* PID pada ketinggian $h = 50m$

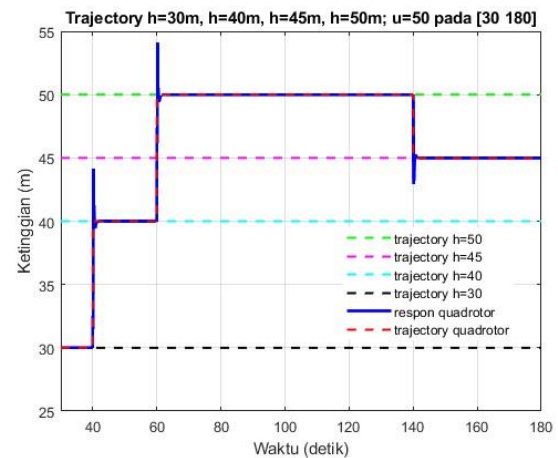
Pada Gambar 13, target *trajectory* ditempuh secara bertahap, dimulai dari ketinggian $h = 10$ meter, kemudian dinaikkan secara bertahap ke ketinggian 20,30,40, hingga mencapai 50 meter. Setelah itu, ketinggian diturunkan ke 45 meter dan kembali dinaikkan ke 50 meter sesuai dengan *trajectory* yang telah dibuat. Hal ini menunjukkan kemampuan sistem dalam mengikuti perubahan ketinggian secara dinamis dan responsif terhadap ketinggian yang bervariasi. Kontrol *sliding* diterapkan pada setiap perubahan ketinggian. Teramati bahwa ada “noise” berupa lonjakan *overshoot* diperkirakan oleh

dorongan baling-baling untuk perubahan ketinggian (*hover*) *quadrotor*. Lonjakan *overshoot* berlangsung tidak lebih dari 1.5 detik dan *quadrotor* segera ke posisi stabil dari target yang diinginkan. Fenomena tersebut diilustrasikan dengan grafik simulasi berikut ini.



Gambar 14. Analisis ketinggian *quadrotor* pada selang waktu [0 3]

Secara lengkap respon dari sistem dinamik disajikan sebagai berikut



Gambar 15. Trajectory $h=30m,40m,45m,50m; u=50$ pada [30 180]

Respon sistem dinamik dengan kontrol *sliding*, yang mengontrol sistem dinamik untuk tetap stabil pada ketinggian yang ditentukan disajikan pada Gambar 15. Model *quadrotor* dengan penerapan kontrol PID tetap stabil asimtotik dan bekerja dengan efektif untuk mencapai permukaan ketinggian yang ditentukan dengan kontrol *sliding*. Perubahan *power* maupun *acceleration* pada baling-baling *quadrotor* untuk naik atau turun dari target ketinggian 50 meter, sedikit menyebabkan *noise* berupa lonjakan *overshoot* di titik perubahan ketinggian *quadrotor*. Akan tetapi *noise* tersebut cenderung berdampak merata dan dalam waktu yang kurang dari 1.5 detik. Dengan

demikian model dinamik *quadrotor* yang dihasilkan cukup efektif valid (asimtotik stabil dan fisibel) dalam mencapai target ketinggian dari posisi manapun.

PENUTUP

SIMPULAN

1. Berikut merupakan model linier sistem *quadrotor* yang diperoleh berdasarkan hasil rekonstruksi

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{z} \\ \Delta \dot{w} \\ \Delta \dot{\Omega}_1 \\ \Delta \dot{\Omega}_2 \\ \Delta \dot{\Omega}_3 \\ \Delta \dot{\Omega}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\tilde{\Omega}_0 b}{m} & \frac{2\tilde{\Omega}_0 b}{m} & \frac{2\tilde{\Omega}_0 b}{m} & \frac{2\tilde{\Omega}_0 b}{m} \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta w \\ \Delta \Omega_1 \\ \Delta \Omega_2 \\ \Delta \Omega_3 \\ \Delta \Omega_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \delta_e$$

dengan output $y = Cx(t)$ dimana $C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$

2. Sistem secara konsisten stabil asimtotik menuju titik kesetimbangan yang merupakan target ketinggian yang ditentukan, sesuai dengan analisis ketinggian model *quadrotor* dengan kontrol proporsional-integral-derivatif. Nilai gain K_p, K_i dan K_d ditambahkan ke model dinamik *quadrotor* untuk menerapkan kontrol PID. Dengan memilih nilai gain $K_p = 9000, K_i = 3000$ dan $K_d = 100$ model dinamis secara konsisten stabil secara asimtotik menurut kriteria Routh-Hurwitz. Ditunjukkan step respon sistem stabil saat 10 detik dan simulasi pada analisis ketinggian mulai stabil pada ketinggian tertentu dengan fungsi transfer sebagai berikut

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{131.5s^4 + 3944s^3 + 39538s^2 + 140460s + 3000}{s^6 + 40s^5 + 600s^4 + 4000s^3 + 10100s^2 + 9000s + 3000}$$

Model *state-space* yang telah diberi kontrol PID adalah

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{z} \\ \Delta \dot{w} \\ \Delta \dot{\Omega}_1 \\ \Delta \dot{\Omega}_2 \\ \Delta \dot{\Omega}_3 \\ \Delta \dot{\Omega}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & -6e2 & -4e3 & -1,01e4 & -9e3 & -3e3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta w \\ \Delta \Omega_1 \\ \Delta \Omega_2 \\ \Delta \Omega_3 \\ \Delta \Omega_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_e$$

dengan output $y = Cx(t)$ dimana $C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$

3. Dengan menambahkan kontrol *sliding*, *quadrotor* dapat dikontrol mengikuti *trajectory* yang dibuat dan lebih *robust* dalam mencapai ketinggian yang ditentukan. Kontrol *sliding* didefinisikan sebagai $\mathcal{K}(\text{sign}(\eta))\delta_s$, dimana

$$\text{sgn}(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta > 0 \\ 0, & \eta = 0 \\ -1, & \eta < 0 \end{cases}$$

dan \mathcal{K} adalah gain dari output.

4. Meskipun ada “noise lonjakan” di perpindahan ketinggian yang membutuhkan waktu 1.5 detik untuk perpindahan, namun rancangan model dinamik *quadrotor* stabil asimtotik, valid dan efektif digunakan.

SARAN

Penelitian selanjutnya dapat dilakukan untuk penyempurnaan desain kontrol untuk meminimalkan lonjakan *overshoot* yang terjadi saat perubahan ketinggian (*hover*). Selain itu, pengembangan kontrol dapat diperluas ke arah gerak lain seperti longitudinal, lateral dan *yawing* untuk memperoleh pengendalian yang lebih menyeluruh terhadap sistem *quadrotor*.

DAFTAR PUSTAKA

- Aisuwarya, R., Yendri, D., Yonas, F. M., & Saputra, I. (2022). *Kontrol PID pada Robot Quadcopter*. Purbalingga. Eureka Media Aksara.
- Ali, K. M., & Jaber, A. A. (2022). *Comparing Dynamic Model and Flight Control of Plus and Cross Quadcopter Configurations*. FME Transactions, VOL. 50, No 4. doi: 10.5937/fme2204683M
- Ali, M. H., & Fuad, Y. (2024). *Penerapan Kontrol Proporsional-Integral-Derivatif pada Analisis Kedalaman Kapal Selam Jenis AUV*. Skripsi. FMIPA Unesa. Surabaya. <https://doi.org/10.26740/mathunesa.v13n1.p1-12>
- Anton, H., & Kaul, A. (2019). *Elementary Linear Algebra, 12nd Edition*. John Wiley & Sons, Inc.
- Baroro, Q., & Fuad, Y. (2016). *Analisis Kestabilan Quadrotor Menggunakan Kontrol Proporsional Derivatif*. Skripsi. FMIPA Unesa. Surabaya. Tidak Diterbitkan.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem, Ninth Edition*. John Wiley & Sons, Inc.
- Dharmawan, A., Simanungkalit, Y. Y., & Megawati, N. Y. (2014). *Pemodelan Sistem Kendali PID pada Quadcopter dengan Metode Euler Lagrange*. Indonesian Journal of Electronics and Instrumental Sistem. Vol 4, No. 1, April 2014, pp.13-24.
- Domingues, J. M. B. (2009). *Quadrotor Prototype*. Thesis. Instituto Superior Tecnico. Portugis. https://scholar.tecnico.ulisboa.pt/records/1sR8YFahzkN4GTAKWZ-mspsK2VfHzr80f_W1
- ElKholy, H. M. N. (2014). *Dynamic Modeling and Control of a Quadrotor Using Linear and Nonlinear Approaches*. Thesis. The American

- University in Cairo.
<https://fount.aucegypt.edu/etds/1292/>
- Franklin, G. F., Powell, J. D., & Emami-Naeini, A. (2010). *Feedback Control of Dynamic Systems Sixth Edition*. Pearson Education, Inc., New Jersey, USA.
- Gaitan, A. T., & Bolea, Y. (2013). *Modeling and Robust attitude Control of a Quadrotor System*. Proceeding of The International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE) Mexico City, Mexico. pp. 7-12. doi: 10.1109/ICEEE.2013.6676024
- Jacewicz, M., Żugaj, M., Głębocki, R., & Bibik, P. (2022). *Quadrotor Model for Energy Consumption Analysis*. *Energies*, 15, 7136. <https://doi.org/10.3390/en15197136>
- Jirinec, T. (2011). *Stabilization and Control of Unmanned Quadcopter*. Thesis. Czech Technical University in Prague. Prague. <https://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:ltu:diva-46877>
- Koszewnik, A. (2014). *The Parrot UAV Controlled by PID Controllers*. *Acta Mechanica et Automatica*, 8(2), 5. doi: 10.2478/ama-2014-0011
- Niemiec, R., Fellow, N., & Gandhi, F. (2016). *A Comparison Between Quadrotor Flight Configurations*. Presented at The European Rotorcraft Forum, Lille, France, September 5-8.
- Noordin, A., Basri, M. A. M., & Mohamed, Z. (2019). *Sliding mode control for altitude and attitude stabilization of quadrotor UAV with external disturbance*. *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Informatics*, 7(2), 203-210. <https://doi.org/10.11591/ijeei.v7i2.1149>
- Ogata, K. (2010). *Modern Control Engineering, Fifth Edition*. Pearson Education, Inc., Publishing as Prentice Hall, New Jersey, USA.
- Olsder, G. J., & Van der Woude, J. W. (1994). *Mathematical Systems Theory third edition*. Faculty Technical Mathematics and Informatics Delf University of Technology, the Netherlands.
- Razi, F. A., & Fuad, Y. (2018). *Penerapan Kontrol Proporsional Derivatif dan Target Tracking pada Kestabilan Drone Tipe 2.0*. Skripsi. FMIPA Unesa. Surabaya. Tidak Diterbitkan.
- Rinaldi, M., Primates, S., & Guglieri, G. (2023). *A Comparative Study for Control of Quadrotor UAVs*. *Applied Sciences (Switzerland)*, 13(6), 3464. <https://doi.org/10.3390/app13063464>
- Sabatino, F. (2015). *Quadrotor control: modeling, nonlinear control design, and simulation*. Masters Degree Project. KTH Electrical Engineering. Stockholm, Sweden. <https://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:kt h:diva-175380>
- Salmaa, & Fuad, Y. (2017). *Analisis Kestabilan Gerak Diagonal pada Quadrotor Menggunakan Kontrol PID*. Skripsi. FMIPA Unesa. Surabaya. Tidak Diterbitkan.
- Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., & Levant, A. (2014). *Control Engineering Sliding Mode Control and Observation*. College Park, USA. Birkhäuser. <http://doi.org/10.1007/978-0-8176-4893-0>