MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika **Volume 13 No 03**
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115 **Tahun 2025**

DEKOMPOSISI DARI GRAF LENGKAP K_n DENGAN $n \geq 1$

Nur Fitriana Maulidah
Program Studi S1 Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
e-mail: nurfitriana.21012@mhs.unesa.ac.id

Budi Rahadjeng
Program Studi S1 Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
e-mail: budirahadjeng@unesa.ac.id*

Abstrak

Graf G adalah graf sederhana. Dekomposisi graf G adalah koleksi subgraf takkosong dari G, yang dinotasikan $\{H_i\}_{i=1}^{t}$, sedemikian hingga $H_i = G[E_i]$ di mana suatu E_i subhimpunan dari $E(G)$ dan $\{E_i\}_{i=1}^{t}$ merupakan partisi dari $E(G)$. Jika $\{H_i\}_{i=1}^{t}$ adalah dekomposisi dari graf G, maka G dapat dituliskan $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_t$ di mana $|\{H_i\}| = t$. Graf lengkap dengan $2k$ titik dengan $k \geq 1$, K_{2k}, dapat didekomposisi menjadi subgraf-subgraf yang masing-masing berupa $K_{1,k}$ atau dapat dikatakan sebagai $K_{1,k}$-dekomposisi. Selain itu, Graf lengkap dengan $2k$ titik dengan $k \geq 1$, K_{2k}, dapat didekomposisi menjadi subgraf lain yakni kK_2 atau dapat dikatakan dengan kK_2-dekomposisi. Graf lengkap dengan $2k+1$ titik dengan $k \geq 1$, K_{2k+1}, dapat didekomposisi menjadi subgraf-subgraf yang masing-masing berupa $K_{1,k}$ atau dapat dikatakan sebagai $K_{1,k}$-dekomposisi. Selain itu graf lengkap K_{2k+1} juga dapat didekomposisi menjadi subgraf yang lain, yakni C_{2k+1} atau dapat dikatakan sebagai C_{2k+1}-dekomposisi.
Kata Kunci: Dekomposisi, Graf Lengkap.

Abstract

Let G be a simple graph. A decomposition of a graph G is a collection of non-empty subgraphs of G, denoted by $\{H_i\}_{i=1}^{t}$, such that each $H_i = G[E_i]$, where E_i subset of $E(G)$, and $\{E_i\}_{i=1}^{t}$ forms a partition of $E(G)$. That is, the edge sets are pairwise disjoint and their union equals $E(G)$. If $\{H_i\}_{i=1}^{t}$ is a decomposition of G, then G can be expressed as $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_t$, where $|\{H_i\}| = t$. Let K_{2k} be the complete graph on $2k$ vertices, where $k \geq 1$. Then K_{2k} admits a $K_{1,k}$-decomposition is a decomposition into subgraphs isomorphic to the star $K_{1,k}$ and it also admits a kK_2-decomposition is a decomposition into k pairwise disjoint edges (a perfect matching). Similarly, the complete graph on $2k+1$ vertices, K_{2k+1}, where $k \geq 1$, admits a $K_{1,k}$-decomposition is a decomposition into subgraphs isomorphic to the star $K_{1,k}$ and a C_{2k+1}-decomposition is decomposition into cycles of length $2k+1$.
Keywords: *Decomposition, Complete Graph.*

PENDAHULUAN

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang seringkali digunakan untuk menyelesaikan sebuah masalah dan juga diterapkan pada kehidupan sehari-hari. Salah satu cabang matematika yang sering diterapkan adalah teori graf. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonard Euler, matematikawan terkenal dari Swiss, pada tahun 1736. Leonard Euler menggunakan teori graph dalam memecahkan permasalahan jembatan konigsberg dengan memodelkannya dalam bentuk graf (Madina, 2024).

Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan titik yang dinotasikan $V(G)$ dan himpunan sisi yang dinotasikan $E(G)$. Himpunan titik adalah himpunan berhingga takkosong dari objek-objek dan himpunan sisi merupakan himpunan berhingga (mungkin kosong) sedemikian hingga setiap elemen pada $E(G)$ merupakan pasangan tak terurut dari titik-titik di $V(G)$ (Budayasa, 2007). Salah topik teori graf yang menarik adalah dekomposisi graf. Dekomposisi graf tidak hanya diterapkan dalam matematika saja tetapi dapat juga diterapkan ke berbagai bidang pengetahuan seperti kimia, fisika, biologi dan pengetahuan lainnya. Penerapan dekomposisi graf juga dapat digunakan dalam menyelesaikan berbagai permasalahan seperti jaringan listrik, siklus suatu makhluk hidup, dan berbagai permasalahan lainnya (Rahmawati, 2014).

Dekomposisi graf G adalah koleksi subgraf takkosong dari G, yang dinotasikan $\{H_i\}_{i=1}^{t}$, sedemikian hingga $H_i = G[E_i]$ di mana suatu E_i subhimpunan dari $E(G)$ dan $\{E_i\}_{i=1}^{t}$ merupakan partisi dari $E(G)$. Jika $\{H_i\}_{i=1}^{t}$ adalah dekomposisi dari graf G, maka G dapat dituliskan $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_t$ di mana $|\{H_i\}| = t$. Artikel pertama yang membahas tentang dekomposisi graf muncul pada tahun 1991 ditulis oleh Jacobson, M.S., Truszczynski, M. and Tuza, Zs., yang berjudul "*Decompositions of regular bipartite graphs*". Artikel tersebut membahas tentang pohon dan hutan yang berasal dari dekomposisi isomorfik graf bipartit biasa.

Penelitian mengenai dekomposisi graf juga telah dibahas dalam artikel "Dekomposisi Graf Sikel, Graf Roda, Graf Gir, dan Graf Persahabatan" pada tahun 2014 oleh Nur Rahmawati. Artikel tersebut membahas tentang dekomposisi dari empat graf tersebut dan membuktikan bahwa graf C_n merupakan K_2–dekomposisi, graf roda W_n dengan $n \geq 3$ merupakan $2K_2$ -dekomposisi, graf gir G_n dengan $n \geq 3$ merupakan $3K_2$ -dekomposisi, dan graf persahabatan F_n dengan $n \geq 2$ merupakan C_3-dekomposisi. Penelitian lain mengenai dekomposisi graf juga dibahas oleh Tay-Woei Shyu pada tahun 2010 yang berjudul "*Decomposition of Complete Graphs into Paths and Stars*" yang membuktikan bahwa graf K_n di mana $n \geq 6$ dan $\binom{n}{2} = 3(p+q)$ dengan p dan q bilangan bulat nonnegatif merupakan pP_4 -dekomposisi dan qS_4-dekomposisi. Artikel lain yang juga membahas tentang dekomposisi graf sebagai berikut. "Dekomposisi Graf Kincir W_2^m" pada tahun 2020 oleh This'atun Na'imah, dan "Dekomposisi Graf Bintang, Graf Bintang Ganda, dan Graf Sapu" pada tahun 2022 oleh Merlynda Marcellina. Artikel-artikel tersebut membahas tentang bagaimana menemukan dekomposisi dari suatu graf dan teorema-teorema yang berlaku.

Pembahasan mengenai dekomposisi graf dapat dilanjutkan pada dekomposisi graf yang lain atau bentuk dekomposisi graf yang lebih beragam. Berdasarkan hal tersebut, maka penulis tertarik untuk mengkaji dekomposisi graf lengkap K_{2k} dan graf lengkap K_{2k+1} dengan $k \geq 1$.

KAJIAN TEORI

Definisi 1

Graf G berisikan dua himpunan, yaitu himpunan titik yang dinotasikan $V(G)$ dan himpunan sisi yang dinotasikan $E(G)$. Himpunan titik adalah himpunan berhingga takkosong dari objek-objek dan himpunan sisi merupakan himpunan berhingga (boleh kosong) sedemikian hingga setiap elemen $E(G)$ merupakan pasangan takterurut dari titik-titik di $V(G)$ (Budayasa, 2007).

Definisi 2

Misalkan u dan v dua titik di graf G. Sisi $e = \{u, v\}$ dikatakan menghubungkan (*joining*) titik u dan titik v. Jika $e = \{u, v\}$ adalah sisi graf G, maka u dan v dikatakan berhubungan langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e dikatakan saling terkait (*incident*) (Budayasa, 2007).

Definisi 3

Misalkan v titik graf G. Derajat v adalah banyaknya sisi G yang terkait dengan v dan dinotasikan $d_G(v)$ atau $d(v)$ (Budayasa, 2007).

Definisi 4

Titik terisolasi dalam suatu graf adalah titik yang tidak berhubungan langsung dengan titik lain (Rahmawati, 2014).

Definisi 5

Graf H disebut subgraf dari graf G, ditulis $H \subset G$, jika $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$.

Misalkan $S \subset V(G)$. Subgraf dari G yang dibangun (diinduksi) oleh S, dinotasikan $G[S]$, adalah sebuah subgraf dari G yang himpunan titiknya adalah S dan himpunan sisinya terdiri atas semua sisi di G yang terkait dengan titik di S (Budayasa, 2007).

Misalkan $X \subset E(G)$. Subgraf dari G yang dibangun (diinduksi) oleh X, dinotasikan $G[X]$, adalah sebuah subgraf dari G yang himpunan sisinya adalah X dan himpunan titiknya terdiri atas semua titik yang terkait dengan sisi-sisi di X (Na'imah, 2020).

Definisi 6

Jalan (*walk*) di graf G adalah sebuah barisan berhingga (takkosong) yang suku-sukunya bergantian antara titik dan sisi, dituliskan $W = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i terkait dengan sisi e_i, untuk $1 \leq i \leq k$. Jalan W dari titik v_0 ke titik v_k dituliskan jalan- (v_0, v_k). Banyaknya sisi dalam W disebut panjang jalan W. Titik v_0 dan titik v_k dalam suatu jalan W berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir W. Selain titik awal dan titik akhir disebut titik internal. Sebuah titik di G bisa saja muncul lebih dari satu kali dalam W, begitu juga dengan sisi di G. Sebuah jalan W dengan panjang positif dikatakan tertutup jika titik awal dan titik akhirnya sama atau identik. Jika semua sisi $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ dalam jalan W berbeda, maka W disebut jejak (*trail*). Jalan yang semua titiknya berbeda disebut lintasan (*path*) (Budayasa, 2007).

Definisi 7

Jejak tertutup (*closed trail*) yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda disebut sebuah sikel (*cycle*). Sikel dengan panjang k disebut sikel-k, dinotasikan C_k . Sikel yang memuat semua titik sebuah graf disebut sikel Hamilton (Budayasa, 2007).

Definisi 8

Sebuah graf G dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap dua titik yang berbeda pada G terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. (Chartrand & Lesniak, 2016).

Definisi 9

Graf lengkap (graf komplit) dengan n titik, dinotasikan K_n, merupakan graf sederhana dengan n titik dan setiap dua titik berbeda terkait dengan sebuah sisi (Budayasa, 2007).

Definisi 10

Graf G disebut graf bipartit jika himpunan titik G dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian A dan B sedemikian hingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di A dan sebuah titik di B. Apabila setiap titik di A berhubungan langsung dengan setiap titik di B, maka G disebut graf bipartit komplit, dinotasikan $K_{m,n}$, dengan m merupakan banyaknya titik di himpunan A dan n merupakan banyaknya titik di himpunan B (Budayasa, 2007).

Definisi 11

Graf G yang terdiri atas $k \geq 2$ salinan takterhubung dari graf H , dinotasikan $G = kH$, merupakan gabungan dari k graf H yang saling lepas (Chartrand & Lesniak, 2016).

Definisi 12

Penjodohan (*matching*) graf G , dinotasikan M , adalah sebuah himpunan sisi yang saling lepas (*independent*). Dua sisi dikatakan saling lepas jika tidak memiliki titik akhir persekutuan. Jadi tidak ada sisi-sisi pada M yang memiliki titik-titik akhir persekutuan. Penjodohan yang memiliki n sisi saling lepas dikatakan sebagai penjodohan berukuran n. Penjodohan M di graf G dikatakan penjodohan sempurna (*perfect matching*) jika M memuat semua titik G (Budayasa, 2007).

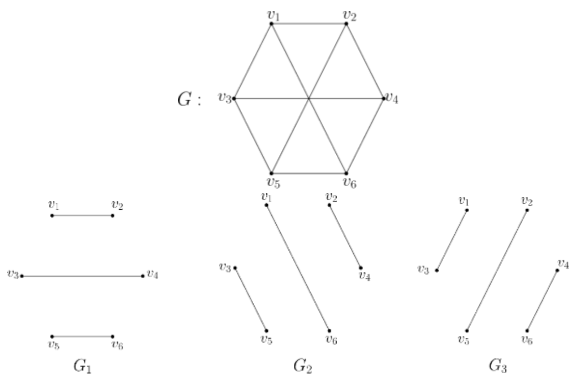
Definisi 13

Graf G dikatakan dapat difaktorkan menjadi faktor-faktor $G_1, G_2, G_3, \dots, G_t$, jika faktor-faktor tersebut terdiri atas sisi-sisi saling lepas dan $\bigcup_{i=1}^{t} E(G_i) = E(G)$. Jika G terfaktorkan menjadi $G_1, G_2, G_3, \dots, G_t$ maka dapat dinyatakan sebagai $G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus \dots \oplus G_t$ yang merupakan faktorisasi dari G (Bangkit, 2022).

Jika terdapat faktorisasi dari graf G sedemikian hingga untuk setiap faktor dari graf G adalah k-faktor (k-faktor adalah subgraf rentang beraturan-k), maka G adalah k-faktor.

Jika G adalah graf k-faktor, maka G adalah graf beraturan- r untuk suatu bilangan bulat r yang merupakan kelipatan k . Jika $G_1, G_2, G_3, \dots, G_t$ merupakan faktor dari graf G di mana setiap $G_i \cong H$ untuk sebuah graf H, maka dapat dikatakan bahwa G adalah terfaktorisasi- H dan G memiliki faktor yang isomorfik dengan H (Chartrand & Lesniak, 2016).

Contoh:



Gambar 1 Graf G dan Faktorisasinya

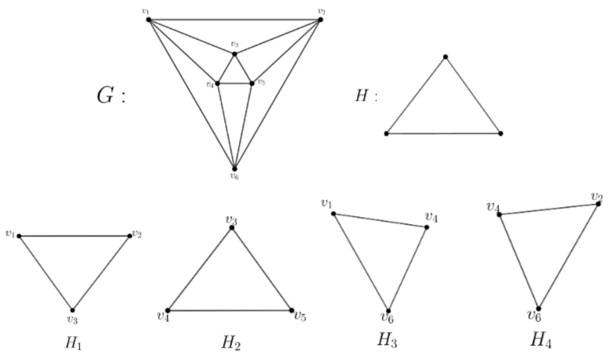
Definisi 14

Dekomposisi graf G adalah koleksi subgraf takkosong dari G , yang dinotasikan $\{H_i\}_{i=1}^{t}$, sedemikian hingga $H_i = G[E_i]$ di mana E_i subhimpunan dari $E(G)$ dan $\{E_i\}_{i=1}^{t}$ merupakan partisi dari $E(G)$. Tidak ada subgraf H_i pada dekomposisi G yang memiliki titik terisolasi. Jika

$\{H_i\}_{i=1}^{t}$ adalah dekomposisi dari graf G, maka G dapat dinotasikan $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_t$ (Bangkit, 2022).

Jika G didekomposisikan ke dalam subgraf $H_1, H_2, \dots, H_t$ di mana $|\{H_i\}| = t$, maka $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_t$ adalah dekomposisi dari graf G. Jika $\{H_i\}_{i=1}^{t}$ adalah dekomposisi dari graf G dan $H_i \cong H$ untuk setiap i pada $1 \le i \le t$, maka G dikatakan H-dekomposisi. Jika terdapat H-dekomposisi dari G, maka G disebut terdekomposisi-H (Chartrand & Lesniak, 2016).

Contoh:



Gambar 2 Sebuah H-Dekomposisi Graf G

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan diawali dengan pembahasan dekomposisi graf lengkap K_n dengan $n = 2k$ di mana $k \ge 1$. Teorema 3.1 dan Teorema 3.2 adalah hasil dari dekomposisi graf lengkap K_n untuk n bilangan genap.

DEKOMPOSISI GRAF LENGKAP K_{2k} MENJADI $K_{1,k}$

Diberikan graf lengkap K_{2k} dengan $k \ge 1$. Graf lengkap K_{2k} dapat didekomposisi menjadi subgraf $H_i \cong K_{1,k}$. Berdasarkan Definisi 14 dan dekomposisi graf lengkap K_{2k} menjadi subgraf $K_{1,k}$, maka diperoleh dugaan dekomposisi graf lengkap K_{2k} dengan $k \ge 1$ sebagai berikut:

Tabel 1 Dekomposisi Graf Lengkap K_{2k}

Graf Lengkap K_{2k}	Dekomposisi	H-dekomposisi	Banyak Titik dan Sisi
K_2	$K_2 = H_1$ (1 Partisi)	$H_i = K_{1,1}$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
K_4	$K_4 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ (3 Partisi)	$H_i = K_{1,2}$	$\lvert V(H_i)\rvert = 3$ $\lvert E(H_i)\rvert = 2$
K_6	$K_6 = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_5$ (5 Partisi)	$H_i = K_{1,3}$	$\lvert V(H_i)\rvert = 4$ $\lvert E(H_i)\rvert = 3$
K_8	$K_8 = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_7$ (7 Partisi)	$H_i = K_{1,4}$	$\lvert V(H_i)\rvert = 5$ $\lvert E(H_i)\rvert = 4$
K_{10}	$K_{10} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_9$ (9 Partisi)	$H_i = K_{1,5}$	$\lvert V(H_i)\rvert = 6$ $\lvert E(H_i)\rvert = 5$
K_{12}	$K_{12} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_{11}$ (11 Partisi)	$H_i = K_{1,6}$	$\lvert V(H_i)\rvert = 7$ $\lvert E(H_i)\rvert = 6$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
K_{2k}	$K_{2k} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_{2k-1}$ ($2k-1$ Partisi)	$H_i = K_{1,k}$	$\lvert V(H_i)\rvert = k+1$ $\lvert E(H_i)\rvert = k$

Sehingga, berdasarkan Tabel 1, maka diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 3.1

Graf Lengkap K_{2k} dengan $k \ge 1$ merupakan $K_{1,k}-$ dekomposisi.

Bukti:

Ambil sebarang graf lengkap K_{2k} dengan $k \ge 1$, maka akan ditunjukkan bahwa graf lengkap K_{2k} merupakan $K_{1,k}-$ dekomposisi. Misalkan $V(K_{2k}) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2k}\}$ dan $|E(K_{2k})| = k(2k-1)$.

Untuk $k = 1$. Graf K_2 dapat didekomposisi menjadi 1 subgraf $K_{1,1}$ diperoleh subgraf $H_1 = G[\{v_1v_2\}]$. Jadi, graf lengkap K_2 merupakan $K_{1,1}-$ dekomposisi.

Untuk $k = 2$. Graf K_4 dapat didekomposisi menjadi 3 subgraf $K_{1,2}$ diperoleh subgraf $H_1 = G[\{v_1v_2, v_1v_4\}]$, $H_2 = G[\{v_2v_3, v_2v_4\}]$, dan $H_3 = G[\{v_3v_4, v_3v_1\}]$. Jadi, graf lengkap K_4 merupakan $K_{1,2}-$ dekomposisi.

Untuk $k \ge 3$, banyaknya dekomposisi dari K_{2k} dapat dilihat pada Tabel 1. Berdasarkan Tabel 1, dekomposisi graf $G = K_{2k} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus \dots \oplus H_{2k-1}$ dengan $H_i = G[E_i] \cong K_{1,k}$ di mana $E_i = \{v_iv_{i+1}, v_iv_{i+2}, \dots, v_iv_{i+k-1}, v_iv_{2k}\}$ untuk $1 \le i \le k$ dan $E_i = \{v_iv_{i+1}, v_iv_{i+2}, \dots, v_iv_{2k}, v_iv_1, v_iv_2, \dots, v_iv_j\}$ untuk $k+1 \le i \le 2k-1$ dan $j = i \mod k$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ untuk setiap i dan j dengan $i \neq j$ dan $1 \le i, j \le 2k-1$.

Kasus 1: Untuk $1 \le i \le k$ dan $1 \le j \le k$

Andaikan $E(H_i) \cap E(H_j) \neq \emptyset$ untuk suatu $i \neq j$ maka $\exists v_k v_{k+1} \in E(H_i) \cap E(H_j)$. Hal ini berarti bahwa $v_k v_{k+1} \in E(H_i)$ dan $v_k v_{k+1} \in E(H_j)$. Jika $v_k v_{k+1} \in E(H_i)$ maka $v_k v_{k+1} = v_i v_{i+1}$ dan jika $v_k v_{k+1} \in E(H_j)$ maka $v_k v_{k+1} = v_j v_{j+1}$. Akibatnya $v_k v_{k+1} = v_i v_{i+1} = v_j v_{j+1}$, maka $i = j$.

Kasus 2: Untuk $k+1 \le i \le 2k-1$ dan $k+1 \le j \le 2k-1$

Andaikan $E(H_i) \cap E(H_j) \neq \emptyset$ untuk suatu $i \neq j$ maka $\exists v_{k+1} v_{2k} \in E(H_i) \cap E(H_j)$. Hal ini berarti bahwa $v_{k+1} v_{2k} \in E(H_i)$ dan $v_{k+1} v_{2k} \in E(H_j)$. Jika $v_{k+1} v_{2k} \in E(H_i)$ maka $v_{k+1} v_{2k} = v_i v_{2k}$ dan jika $v_{k+1} v_{2k} \in E(H_j)$ maka $v_{k+1} v_{2k} = v_j v_{2k}$. Akibatnya $v_{k+1} v_{2k} = v_i v_{2k} = v_j v_{2k}$, maka $i = j$.

Jadi, terbukti bahwa $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ untuk setiap i dan j dengan $i \neq j$ dan $1 \le i, j \le 2k-1$. … (1)

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\bigcup_{i=1}^{2k-1} E(H_i) = E(K_{2k})$. Diketahui bahwa $|E(K_{2k})| = k(2k-1)$. Karena $H_i \cong K_{1,k}$, maka masing-masing H_i memiliki tepat k sisi. Karena graf lengkap K_{2k} dapat didekomposisi menjadi $2k-1$ subgraf $K_{1,k}$, maka total dari seluruh subgraf hasil dekomposisi adalah $(2k-1) \times k = k(2k-1)$ yang sama dengan banyaknya sisi Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\bigcup_{i=1}^{2k-1} E(H_i) = E(K_{2k})$. Diketahui bahwa $|E(K_{2k})| = k(2k-1)$. Karena $H_i \cong K_{1,k}$, maka masing-masing H_i memiliki tepat k sisi, atau $|E(H_i)| = k$. Karena $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$, untuk setiap i, j dengan $i \neq j$ dan $1 \le i, j \le 2k-1$, maka

$$\left|\bigcup_{i=1}^{2k-1} E(H_i)\right| = \sum_{i=1}^{2k-1} |E(H_i)| = \sum_{i=1}^{2k-1} k = k(2k-1) = |E(K_{2k})|$$

sehingga,

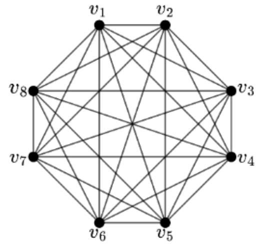
$$\bigcup_{i=1}^{2k-1} E(H_i) = E(K_{2k})$$

……… (2)

Dari (1) dan (2), dapat disimpulkan bahwa graf lengkap K_{2k} dapat didekomposisi menjadi $2k-1$ subgraf $K_{1,k}$. Dengan demikian teorema terbukti.

Contoh 3.1:

Graf lengkap K_8 pada Gambar 3 dapat didekomposisi menjadi 7 subgraf $K_{1,4}$.

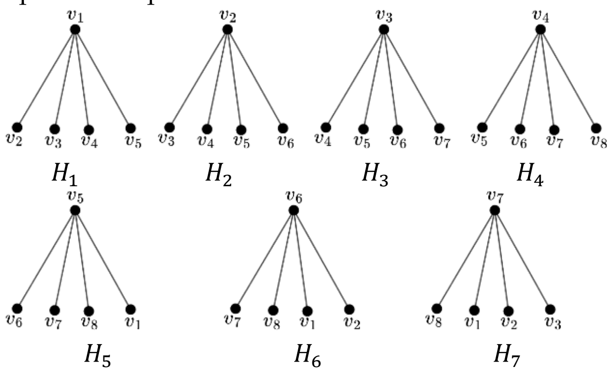


Gambar 3 Graf Lengkap K_8

Misal himpunan titik K_8 adalah $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$. Graf K_8 dapat didekomposisi menjadi 7 subgraf $K_{1,4}$ sebagai berikut.

$H_1 = G[\{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_8\}]$,
$H_2 = G[\{v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_2v_8\}]$,
$H_3 = G[\{v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6, v_3v_8\}]$,
$H_4 = G[\{v_4v_5, v_4v_6, v_4v_7, v_4v_8\}]$,
$H_5 = G[\{v_5v_6, v_5v_7, v_5v_8, v_5v_1\}]$,
$H_6 = G[\{v_6v_7, v_6v_8, v_6v_1, v_6v_2\}]$, dan
$H_7 = G[\{v_7v_8, v_7v_1, v_7v_2, v_7v_3\}]$.

Untuk setiap subgraf $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$, dan H_7 dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4 Subgraf dari Graf K_8 dalam bentuk $K_{1,4}$

DEKOMPOSISI GRAF LENGKAP K_{2k} MENJADI kK_2

Diberikan graf lengkap K_{2k} dengan $k \ge 1$. Graf lengkap K_{2k} dapat didekomposisi menjadi subgraf $H_i \cong kK_2$. Berdasarkan Definisi 2.14 dan dekomposisi graf lengkap K_{2k} menjadi subgraf kK_2, maka diperoleh dugaan dekomposisi graf lengkap K_{2k} dengan $k \ge 1$ sebagai berikut:

Tabel 2 Dekomposisi Graf Lengkap K_{2k}

Graf Lengkap K_{2k}	Dekomposisi	H-dekomposisi	Banyak titik dan sisi
K_2	$K_2 = H_1$ (1 Partisi)	$H_i = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
K_4	$K_4 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ (3 Partisi)	$H_i = 2K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 4$ $\lvert E(H_i)\rvert = 2$

K_6	$K_6 = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_5$ (5 Partisi)	$H_i = 3K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 6$ $\lvert E(H_i)\rvert = 3$
K_8	$K_8 = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_7$ (7 Partisi)	$H_i = 4K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 8$ $\lvert E(H_i)\rvert = 4$
K_{10}	$K_{10} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_9$ (9 Partisi)	$H_i = 5K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 10$ $\lvert E(H_i)\rvert = 5$
K_{12}	$K_{12} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_{11}$ (11 Partisi)	$H_i = 6K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 12$ $\lvert E(H_i)\rvert = 6$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
K_{2k}	$K_{2k} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_{2k-1}$ ($2k-1$ Partisi)	$H_i = kK_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2k$ $\lvert E(H_i)\rvert = k$

Sehingga, berdasarkan Tabel 2, maka diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 3.2

Graf Lengkap K_{2k} dengan $k \geq 1$ merupakan $kK_2 -$ dekomposisi.

Bukti:

Ambil sebarang graf lengkap K_{2k} dengan $k \geq 1$, maka akan ditunjukkan bahwa graf lengkap K_{2k} merupakan $kK_2 -$ dekomposisi. Misalkan $V(K_{2k}) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2k-1}\}$ dan $|E(K_{2k})| = k(2k-1)$.

Untuk $k = 1$. Graf K_2 dapat didekomposisi menjadi 1 subgraf K_2 diperoleh subgraf $H_1 = G[\{v_0v_1\}]$. Jadi, graf lengkap K_2 merupakan $K_2 -$ dekomposisi.

Untuk $k = 2$. Graf K_4 dapat didekomposisi menjadi 3 subgraf $2K_2$ diperoleh subgraf $H_1 = G[\{v_0v_1, v_2v_3\}]$, $H_2 = G[\{v_0v_2, v_3v_1\}]$, dan $H_3 = G[\{v_0v_3, v_1v_2\}]$. Jadi, graf lengkap K_4 merupakan $2K_2 -$ dekomposisi.

Untuk $k \geq 3$, banyaknya dekomposisi dari K_{2k} dapat dilihat pada Tabel 2. Berdasarkan Tabel 2, dekomposisi graf $G = K_{2k} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus \dots \oplus H_{2k-1}$ dengan $H_i = G[E_i] \cong kK_2$ di mana $E_i = \{v_0v_i, v_{i+1}v_{i-1}, v_{i+2}v_{i-2}, v_{i+3}v_{i-3}, \dots, v_{2i}v_{2k-1}, v_{2i+1}v_{2k-2}, \dots, v_{i-k+1}v_{i+k}\}$ untuk $1 \leq i \leq k-1$, $E_i = \{v_0v_i, v_{i+1}v_{i-1}, v_{i+2}v_{i-2}, v_{i+3}v_{i-3}, \dots, v_{2k-1}v_1\}$ untuk $i = k$, $E_i = \{v_0v_i, v_{i+1}v_{i-1}, v_{i+2}v_{i-2}, v_{i+3}v_{i-3}, \dots, v_{2k-1}v_{2i \bmod (2k-1)}, v_1v_{(2i-1) \bmod (2k-1)}, v_2v_{(2i-2) \bmod (2k-1)}, \dots, v_{i-k}v_{(i+k) \bmod (2k-1)}\}$ untuk $k+1 \leq i \leq 2k-2$, dan $E_i = \{v_0v_i,\ v_1v_{2k-2}, v_2v_{2k-3}, v_3v_{2k-4}, \dots, v_{k-1}v_k\}$ untuk $i = 2k-1$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ untuk setiap i dan j dengan $i \neq j$ dan $1 \leq i, j \leq 2k-1$.

Kasus 1: Untuk $1 \leq i \leq k-1$ dan $1 \leq j \leq k-1$

Andaikan $E(H_i) \cap E(H_j) \neq \emptyset$ untuk suatu $i \neq j$ maka $\exists v_0v_{k-1} \in E(H_i) \cap E(H_j)$. Hal ini berarti bahwa $v_0v_{k-1} \in E(H_i)$ dan $v_0v_{k-1} \in E(H_j)$. Jika $v_0v_{k-1} \in E(H_i)$ maka $v_0v_{k-1} = v_0v_i$ dan jika $v_0v_{k-1} \in E(H_j)$ maka $v_0v_{k-1} = v_ov_j$. Akibatnya $v_0v_{k-1} = v_0v_i = v_0v_j$, maka $i = j$.

Kasus 2: Untuk $i = k$ dan $j = k$

Andaikan $E(H_i) \cap E(H_j) \neq \emptyset$ untuk suatu $i \neq j$ maka $\exists v_0v_k \in E(H_i) \cap E(H_j)$. Hal ini berarti bahwa $v_0v_k \in E(H_i)$ dan $v_0v_k \in E(H_j)$. Jika $v_0v_k \in E(H_i)$ maka $v_0v_k = v_0v_i$ dan jika $v_0v_k \in E(H_j)$ maka $v_0v_k = v_ov_j$. Akibatnya $v_0v_k = v_0v_i = v_0v_j$, maka $i = j$.

Kasus 3: Untuk $k+1 \leq i \leq 2k-2$ dan $k+1 \leq j \leq 2k-2$

Andaikan $E(H_i) \cap E(H_j) \neq \emptyset$ untuk suatu $i \neq j$ maka $\exists v_0v_{k+1} \in E(H_i) \cap E(H_j)$. Hal ini berarti bahwa $v_0v_{k+1} \in E(H_i)$ dan $v_0v_{k+1} \in E(H_j)$. Jika $v_0v_{k+1} \in E(H_i)$ maka $v_0v_{k+1} = v_0v_i$ dan jika $v_0v_{k+1} \in E(H_j)$ maka $v_0v_{k+1} = v_ov_j$. Akibatnya $v_0v_{k+1} = v_0v_i = v_0v_j$, maka $i = j$.

Kasus 4: Untuk $i = 2k-1$ dan $j = 2k-1$

Andaikan $E(H_i) \cap E(H_j) \neq \emptyset$ untuk suatu $i \neq j$ maka $\exists v_0v_{2k-1} \in E(H_i) \cap E(H_j)$. Hal ini berarti bahwa $v_0v_{2k-1} \in E(H_i)$ dan $v_0v_{2k-1} \in E(H_j)$. Jika $v_0v_{2k-1} \in E(H_i)$ maka $v_0v_{2k-1} = v_0v_i$ dan jika $v_0v_{2k-1} \in E(H_j)$ maka $v_0v_{2k-1} = v_ov_j$. Akibatnya $v_0v_{2k-1} = v_0v_i = v_0v_j$, maka $i = j$.

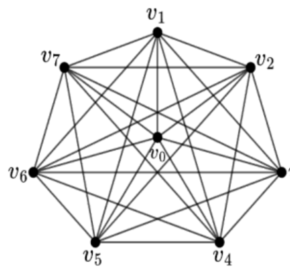
Jadi, terbukti bahwa $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ untuk setiap i dan j dengan $i \neq j$ dan $1 \leq i, j \leq 2k-1$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\bigcup_{i=1}^{2k-1} E(H_i) = E(K_{2k})$. Dengan cara yang serupa dengan pembuktian Teorema 3.1, dapat ditunjukkan bahwa $\bigcup_{i=1}^{2k-1} E(H_i) = E(K_{2k})$.

Dengan demikian terbukti bahwa graf lengkap K_{2k} dapat didekomposisi menjadi $2k-1$ subgraf kK_2.

Contoh 3.2:

Graf lengkap K_8 pada Gambar 5 dapat didekomposisi menjadi 7 subgraf $4K_2$.

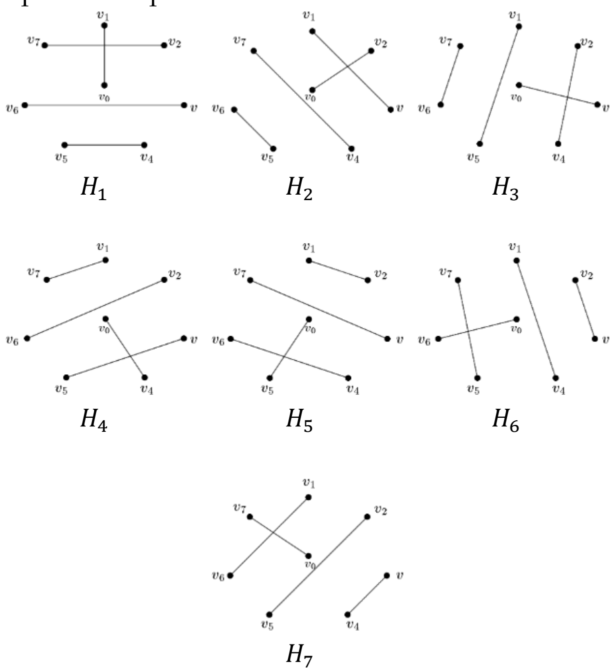


Gambar 5 Graf Lengkap K_8

Misal himpunan titik K_8 adalah $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$. Graf K_8 dapat didekomposisi menjadi 7 subgraf $4K_2$ sebagai berikut.

$H_1 = G[\{v_0v_1, v_2v_7, v_3v_6, v_4v_5\}]$,
$H_2 = G[\{v_0v_2, v_3v_1, v_4v_7, v_5v_6\}]$,
$H_3 = G[\{v_0v_3, v_4v_2, v_5v_1, v_6v_7\}]$,
$H_4 = G[\{v_0v_4, v_5v_3, v_6v_2, v_7v_1\}]$,
$H_5 = G[\{v_0v_5, v_6v_4, v_7v_3, v_1v_2\}]$,
$H_6 = G[\{v_0v_6, v_7v_5, v_1v_4, v_2v_3\}]$, dan
$H_7 = G[\{v_0v_7, v_1v_6, v_2v_5, v_3v_4\}]$.

Untuk setiap subgraf $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$, dan H_7 dapat dilihat pada Gambar 6.



Gambar 6 Subgraf dari Graf K_8 dalam bentuk $4K_2$

Selanjutnya akan membahas tentang dekomposisi graf lengkap K_n dengan $n = 2k + 1$ di mana $k \geq 1$. Teorema 3.3 dan Teorema 3.4 adalah hasil dari dekomposisi graf lengkap K_n untuk n bilangan ganjil.

DEKOMPOSISI GRAF LENGKAP K_{2k+1} MENJADI $K_{1,k}$

Diberikan graf lengkap K_{2k+1} dengan $k \geq 1$. Graf lengkap K_{2k+1} dapat didekomposisi menjadi subgraf $H_i \cong K_{1,k}$. Berdasarkan Definisi 2.14 dan dekomposisi graf lengkap K_{2k+1} menjadi subgraf $K_{1,k}$, maka diperoleh dugaan dekomposisi graf lengkap K_{2k+1} dengan $k \geq 1$ sebagai berikut:

Tabel 3 Dekomposisi Graf Lengkap K_{2k+1}

Graf Lengkap K_{2k+1}	Dekomposisi	H-dekomposisi	Banyak titik dan sisi
K_3	$K_3 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ (3 Partisi)	$H_i = K_{1,1}$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
K_5	$K_5 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5$ (5 Partisi)	$H_i = K_{1,2}$	$\lvert V(H_i)\rvert = 3$ $\lvert E(H_i)\rvert = 2$
K_7	$K_7 = H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_7$ (7 Partisi)	$H_i = K_{1,3}$	$\lvert V(H_i)\rvert = 4$ $\lvert E(H_i)\rvert = 3$
K_9	$K_9 = H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_9$ (9 Partisi)	$H_i = K_{1,4}$	$\lvert V(H_i)\rvert = 5$ $\lvert E(H_i)\rvert = 4$
K_{11}	$K_{11} = H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_{11}$ (11 Partisi)	$H_i = K_{1,5}$	$\lvert V(H_i)\rvert = 6$ $\lvert E(H_i)\rvert = 5$
K_{13}	$K_{13} = H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_{13}$ (13 Partisi)	$H_i = K_{1,6}$	$\lvert V(H_i)\rvert = 7$ $\lvert E(H_i)\rvert = 6$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
K_{2k+1}	$K_{2k+1} = H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_{2k+1}$ ($2k + 1$ Partisi)	$H_i = K_{1,k}$	$\lvert V(H_i)\rvert = k + 1$ $\lvert E(H_i)\rvert = k$

Sehingga, berdasarkan Tabel 3, maka diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 3.3

Graf Lengkap K_{2k+1} dengan $k \geq 1$ merupakan $K_{1,k}$ − dekomposisi.

Bukti:

Ambil sebarang graf lengkap K_{2k+1} dengan $k \geq 1$, maka akan ditunjukkan bahwa graf lengkap K_{2k+1} merupakan $K_{1,k}$ − dekomposisi . Misalkan

$V(K_{2k+1}) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2k+1}\}$ dan $|E(K_{2k+1})| = k(2k+1)$.

Untuk $k = 1$. Graf K_3 dapat didekomposisi menjadi 3 subgraf $K_{1,1}$ diperoleh subgraf $H_1 = G[\{v_1v_2\}]$, $H_2 = G[\{v_2v_3\}]$, dan $H_3 = G[\{v_3v_1\}]$. Jadi, graf lengkap K_3 merupakan $K_{1,1}-$ dekomposisi.

Untuk $k = 2$. Graf K_5 dapat didekomposisi menjadi 5 subgraf $K_{1,2}$ diperoleh Subgraf $H_1 = G[\{v_1v_2, v_1v_3\}]$, $H_2 = G[\{v_2v_3, v_2v_4\}]$, $H_3 = G[\{v_3v_4, v_3v_5\}]$, $H_4 = G[\{v_4v_5, v_4v_1\}]$, dan $H_5 = G[\{v_5v_1, v_5v_2\}]$. Jadi, graf lengkap K_5 merupakan $K_{1,2}-$ dekomposisi.

Untuk $k \geq 3$, banyaknya dekomposisi dari K_{2k+1} dapat dilihat pada Tabel 3. Berdasarkan Tabel 3, dekomposisi graf $G = K_{2k+1} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_{2k+1}$ dengan $H_i = G[E_i] \cong K_{1,k}$ di mana $E_i = \{v_iv_{i+1}, v_iv_{i+2}, \dots, v_iv_{i+k}\}$ untuk $1 \leq i \leq k+1$, $E_i = \{v_iv_{i+1}, v_iv_{i+2}, \dots, v_iv_{2k+1}, v_iv_1, v_iv_2, \dots, v_iv_j\}$ untuk $k+2 \leq i \leq 2k$ dan $j = (i+k) \bmod (2k+1)$ serta $E_i = \{v_iv_1, v_iv_2, \dots, v_iv_k\}$ untuk $i = 2k+1$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ untuk setiap i dan j dengan $i \neq j$ dan $1 \leq i, j \leq 2k+1$.

Kasus 1: Untuk $1 \leq i \leq k+1$ dan $1 \leq j \leq k+1$

Andaikan $E(H_i) \cap E(H_j) \neq \emptyset$ untuk suatu $i \neq j$ maka $\exists v_kv_{k+1} \in E(H_i) \cap E(H_j)$. Hal ini berarti bahwa $v_kv_{k+1} \in E(H_i)$ dan $v_kv_{k+1} \in E(H_j)$. Jika $v_kv_{k+1} \in E(H_i)$ maka $v_kv_{k+1} = v_iv_{i+1}$ dan jika $v_kv_{k+1} \in E(H_j)$ maka $v_kv_{k+1} = v_jv_{j+1}$. Akibatnya $v_kv_{k+1} = v_iv_{i+1} = v_jv_{j+1}$, maka $i = j$.

Kasus 2: Untuk $k+2 \leq i \leq 2k$ dan $k+2 \leq j \leq 2k$

Andaikan $E(H_i) \cap E(H_j) \neq \emptyset$ untuk suatu $i \neq j$ maka $\exists v_{2k}v_{2k+1} \in E(H_i) \cap E(H_j)$. Hal ini berarti bahwa $v_{2k}v_{2k+1} \in E(H_i)$ dan $v_{2k}v_{2k+1} \in E(H_j)$. Jika $v_{2k}v_{2k+1} \in E(H_i)$ maka $v_{2k}v_{2k+1} = v_iv_{i+1}$ dan jika $v_{2k}v_{2k+1} \in E(H_j)$ maka $v_{2k}v_{2k+1} = v_jv_{j+1}$. Akibatnya $v_{2k}v_{2k+1} = v_iv_{i+1} = v_jv_{j+1}$, maka $i = j$.

Kasus 3: Untuk $i = 2k+1$ dan $j = 2k+1$

Andaikan $E(H_i) \cap E(H_j) \neq \emptyset$ untuk suatu $i \neq j$ maka $\exists v_{2k+1}v_1 \in E(H_i) \cap E(H_j)$. Hal ini berarti bahwa $v_{2k+1}v_1 \in E(H_i)$ dan $v_{2k+1}v_1 \in E(H_j)$. Jika $v_{2k+1}v_1 \in E(H_i)$ maka $v_{2k+1}v_1 = v_iv_1$ dan jika $v_{2k+1}v_1 \in E(H_j)$ maka $v_{2k+1}v_1 = v_jv_1$. Akibatnya $v_{2k+1}v_1 = v_iv_1 = v_jv_1$, maka $i = j$.

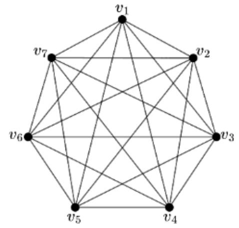
Jadi, terbukti bahwa $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ untuk setiap i dan j dengan $i \neq j$ dan $1 \leq i, j \leq 2k+1$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\bigcup_{i=1}^{2k+1} E(H_i) = E(K_{2k+1})$. Dengan cara yang serupa dengan pembuktian Teorema 3.1, dapat ditunjukkan bahwa $\bigcup_{i=1}^{2k+1} E(H_i) = E(K_{2k+1})$.

Dengan demikian terbukti bahwa graf lengkap K_{2k+1} dapat didekomposisi menjadi $2k+1$ subgraf $K_{1,k}$.

Contoh 3.3:

Graf lengkap K_7 pada Gambar 7 dapat didekomposisi menjadi 7 subgraf $K_{1,3}$.

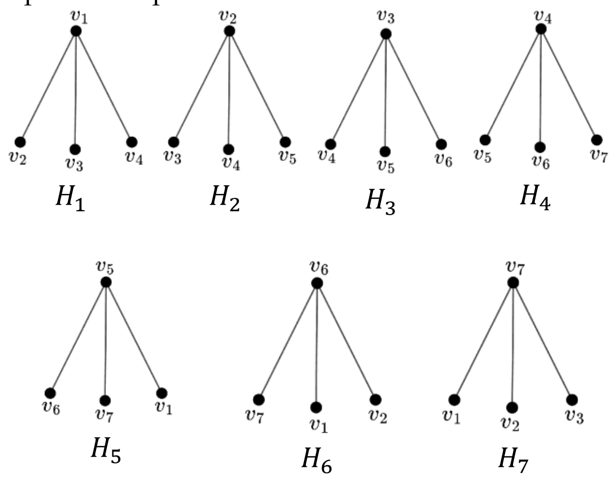


Gambar 7 Graf Lengkap K_7

Misal himpunan titik K_7 adalah $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$. Graf K_7 dapat didekomposisi menjadi 7 subgraf graf $K_{1,4}$ sebagai berikut.

$H_1 = G[\{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4\}]$,
$H_2 = G[\{v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5\}]$,
$H_3 = G[\{v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6\}]$,
$H_4 = G[\{v_4v_5, v_4v_6, v_4v_7\}]$,
$H_5 = G[\{v_5v_6, v_5v_7, v_5v_1\}]$,
$H_6 = G[\{v_6v_7, v_6v_1, v_6v_2\}]$, dan
$H_7 = G[\{v_7v_1, v_7v_2, v_7v_3\}]$.

Untuk setiap subgraf $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$, dan H_7 dapat dilihat pada Gambar 8.



Gambar 8 Subgraf dari Graf K_7 dalam bentuk $K_{1,3}$

DEKOMPOSISI GRAF LENGKAP K_{2k+1} MENJADI C_{2k+1}

Diberikan graf lengkap K_{2k+1} dengan $k \geq 1$. Graf lengkap K_{2k+1} dapat didekomposisi menjadi subgraf $H_i \cong C_{2k+1}$. Berdasarkan Definisi 2.16 dan dekomposisi graf lengkap K_{2k+1} menjadi subgraf C_{2k+1}, maka diperoleh dugaan dekomposisi graf lengkap K_{2k+1} dengan $k \geq 1$ sebagai berikut:

Tabel 4 Dekomposisi Graf Lengkap K_{2k+1}

Graf Lengkap K_{2k+1}	Dekomposisi	H-dekomposisi	Banyak titik dan sisi
K_3	$K_3 = H_1$ (1 Partisi)	$H_i = C_3$	$\lvert V(H_i)\rvert = 3$ $\lvert E(H_i)\rvert = 3$
K_5	$K_5 = H_1 \oplus H_2$ (2 Partisi)	$H_i = C_5$	$\lvert V(H_i)\rvert = 5$ $\lvert E(H_i)\rvert = 5$
K_7	$K_7 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ (3 Partisi)	$H_i = C_7$	$\lvert V(H_i)\rvert = 7$ $\lvert E(H_i)\rvert = 7$
K_9	$K_9 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$ (4 Partisi)	$H_i = C_9$	$\lvert V(H_i)\rvert = 9$ $\lvert E(H_i)\rvert = 9$
K_{11}	$K_{11} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5$ (5 Partisi)	$H_i = C_{11}$	$\lvert V(H_i)\rvert = 11$ $\lvert E(H_i)\rvert = 11$
K_{13}	$K_{13} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_6$ (6 Partisi)	$H_i = C_{13}$	$\lvert V(H_i)\rvert = 13$ $\lvert E(H_i)\rvert = 13$
⋮	⋮	⋮	⋮
K_{2k+1}	$K_{2k+1} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k$ (k Partisi)	$H_i = C_{2k+1}$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2k+1$ $\lvert E(H_i)\rvert = 2k+1$

Sehingga, berdasarkan Tabel 4, maka diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 3.4

Graf Lengkap K_{2k+1} dengan $k \geq 1$ merupakan sikel Hamilton C_{2k+1} − dekomposisi.

Bukti:

Ambil sebarang graf lengkap K_{2k+1} dengan $k \geq 1$, maka akan ditunjukkan bahwa graf lengkap K_{2k+1} merupakan sikel Hamilton C_{2k+1} − dekomposisi. Misalkan $V(K_{2k+1}) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2k}\}$ dan $|E(K_{2k+1})| = k(2k+1)$.

Untuk $k = 1$. Graf K_3 dapat didekomposisi menjadi 1 subgraf sikel Hamilton C_3 diperoleh subgraf $H_1 = G[\{v_0v_1, v_1v_2, v_2v_0\}]$. Jadi, graf lengkap K_3 merupakan sikel Hamilton C_3 − dekomposisi.

Untuk $k = 2$. Graf K_5 dapat didekomposisi menjadi 2 subgraf sikel Hamilton C_5 diperoleh subgraf $H_1 = G[\{v_0v_1, v_1v_2, v_2v_4, v_4v_3, v_3v_0\}]$ dan $H_2 = G[\{v_0v_2, v_2v_3, v_3v_1, v_1v_4, v_4v_0\}]$. Jadi, graf lengkap K_5 merupakan sikel Hamilton C_5 − dekomposisi.

Untuk $k \geq 3$, banyaknya dekomposisi dari K_{2k+1} dapat dilihat pada Tabel 4. Berdasarkan Tabel 4, dekomposisi graf $G = K_{2k+1} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus \dots \oplus H_k$ dengan $H_i = G[E_i] \cong C_{2k+1}$ di mana $E_i = \{v_0v_i, v_iv_{i+1}, v_{i+1}v_{(i+2k-1)\bmod(2k)}, v_{(i+2k-1)\bmod(2k)}v_{i+2}, v_{i+2}v_{(i+2k-2)\bmod(2k)}, v_{(i+2k-2)\bmod(2k)}v_{i+3}, v_{i+3}v_{(i+2k-3)\bmod(2k)}, \cdots, v_{i+k+1}v_{i+k}, v_{i+k}v_0\}$ untuk $1 \leq i \leq k$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ untuk setiap i dan j dengan $i \neq j$ dan $1 \leq i, j \leq k$. Andaikan $E(H_i) \cap E(H_j) \neq \emptyset$ untuk suatu $i \neq j$ maka $\exists v_0v_k \in E(H_i) \cap E(H_j)$. Hal ini berarti bahwa $v_0v_k \in E(H_i)$ dan $v_0v_k \in E(H_j)$. Jika $v_0v_k \in E(H_i)$ maka $v_0v_k = v_0v_i$ dan jika $v_0v_k \in E(H_j)$ maka $v_0v_k = v_ov_j$. Akibatnya $v_0v_k = v_0v_i = v_0v_j$, maka $i = j$.

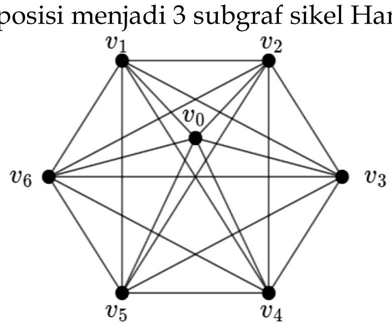
Jadi, terbukti bahwa $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ untuk setiap i dan j dengan $i \neq j$ dan $1 \leq i, j \leq k$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\bigcup_{i=1}^{k} E(H_i) = E(K_{2k+1})$. Dengan cara yang serupa dengan pembuktian Teorema 3.1, dapat ditunjukkan bahwa $\bigcup_{i=1}^{k} E(H_i) = E(K_{2k+1})$.

Dengan demikian terbukti bahwa graf lengkap K_{2k+1} dapat didekomposisi menjadi k subgraph sikel Hamilton C_{2k+1}.

Contoh 3.4:

Graf lengkap K_7 pada Gambar 9 dapat didekomposisi menjadi 3 subgraf sikel Hamilton C_7.

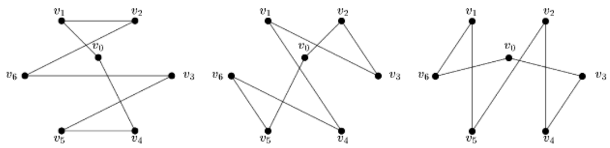


Gambar 9 Graf Lengkap K_7

Misal himpunan titik K_7 adalah $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Graf K_7 dapat didekomposisi menjadi 3 subgraf sikel Hamilton C_7 sebagai berikut.

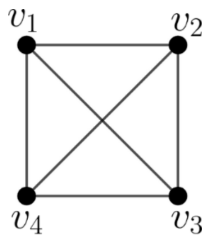
$H_1 = G[\{v_0v_1, v_1v_2, v_2v_6, v_6v_3, v_3v_5, v_5v_4, v_4v_0\}]$,
$H_2 = G[\{v_0v_2, v_2v_3, v_3v_1, v_1v_4, v_4v_6, v_6v_5, v_5v_0\}]$, dan
$H_3 = G[\{v_0v_3, v_3v_4, v_4v_2, v_2v_5, v_5v_1, v_1v_6, v_6v_0\}]$.

Untuk setiap subgraf H_1, H_2, dan H_3 dapat dilihat pada Gambar 10.



Gambar 10 Subgraf dari Graf K_7 dalam bentuk sikel Hamilton C_7

Untuk selanjutnya, diberikan graf K_4 dan graf K_6. Graf K_4 pada Gambar 11 dapat didekomposisi menjadi satu sikel Hamilton C_4 dan satu perfect matching.



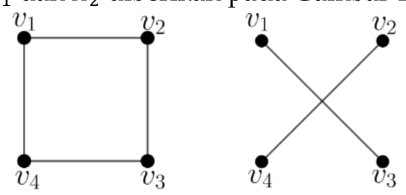
Gambar 11 Graf K_4

Misal himpunan titik K_4 adalah $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Graf K_4 dapat didekomposisi menjadi satu subgraf sikel Hamilton C_4 dan satu *perfect matching* sebagai berikut.

$H_1 = G[\{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\}]$ dan

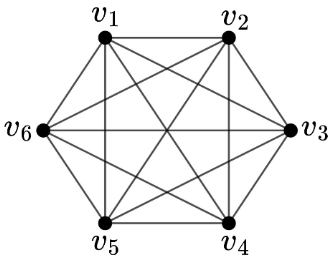
$H_2 = G[\{v_1v_3, v_2v_4\}]$.

Subgraf H_1 dan H_2 diberikan pada Gambar 12.



Gambar 12 Sikel Hamilton C_4 dan *perfect matching* dari graf K_4

Graf K_6 pada Gambar 13 dapat didekomposisi menjadi dua sikel Hamilton C_6 dan satu perfect matching.



Gambar 13 Graf K_6

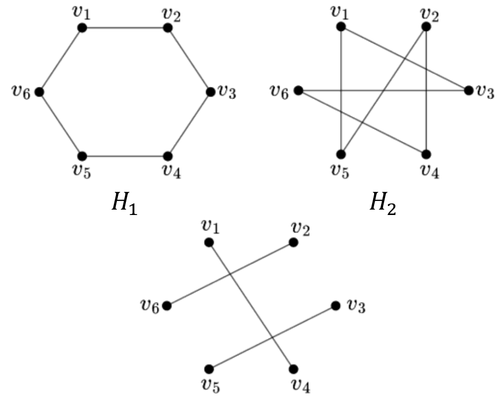
Misal himpunan titik K_6 adalah $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Graf K_4 dapat didekomposisi menjadi dua subgraf sikel Hamilton C_4 dan satu *perfect matching* sebagai berikut.

$H_1 = G[\{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_1\}]$,

$H_2 = G[\{v_1v_3, v_3v_6, v_6v_4, v_4v_2, v_2v_5, v_5v_1\}]$, dan

$H_3 = G[\{v_1v_4, v_2v_6, v_3v_5\}]$.

Subgraf H_1, H_2, dan H_3 diberikan pada Gambar 14.



Gambar 14 Sikel Hamilton C_6 dan *perfect matching* dari graf K_6

PENUTUP

SIMPULAN

Penelitian ini membahas topik dekomposisi graf lengkap K_{2k} dan K_{2k+1}. Berdasarkan hasil dan pembahasan, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Graf lengkap K_{2k} dengan $k \geq 1$ merupakan $K_{1,k} -$ dekomposisi yaitu partisi graf berbentuk subgraf yang terdiri dari graf bipartit lengkap $K_{1,k}$ dan merupakan $kK_2 -$ dekomposisi yaitu partisi graf berupa k subgraf tidak terhubung yang masing-masing isomorfik terhadap graf K_2.
2. Graf lengkap K_{2k+1} dengan $k \geq 1$ merupakan $K_{1,k} -$ dekomposisi yaitu partisi graf berbentuk subgraf yang terdiri dari graf bipartit lengkap $K_{1,k}$ dan merupakan $C_{2k+1} -$ dekomposisi yaitu partisi graf berbentuk subgraf yang terdiri dari graf sikel Hamilton C_{2k+1}.

SARAN

Pada penelitian ini, penulis hanya memfokuskan pembahasan masalah mengenai dekomposisi pada graf lengkap K_{2k} dan K_{2k+1} . Dalam penelitian terdapat teorema serta bukti dan aturan yang dapat digunakan sebagai acuan untuk menentukan dekomposisi graf lengkap K_{2k} dan K_{2k+1} dengan k yang sangat besar.

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menyusun pola umum dari dekomposisi graf lengkap K_n dengan n bilangan genap menjadi $\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$ sikel Hamilton dan satu *perfect matching*. Sehingga, dapat memperluas pemahaman terhadap struktur graf yang serupa dan memungkinkan penerapannya pada kelas graf yang lebih kompleks.

Secara umum, graf tidak hanya terbatas pada jenis graf lengkap saja, melainkan terdapat berbagai macam jenis graf lainnya. Selain itu, dekomposisi suatu graf tidak bersifat unik, sehingga dari satu graf yang saman dapat dihasilkan berbagai bentuk dekomposisi. Oleh karena itu, penulis menyarankan agar pembaca mempertimbangkan dekomposisi dari jenis graf yang berbeda atau mencoba menemukan bentuk dekomposisi lain dari graf yang telah dibahas sebelumnya.

DAFTAR PUSTAKA

Afandi, Y. (2009). *Pewarnaan Minimal Graf Piramida dan Graf Berlian.* Malang: Program Sarjana UIN Malang.

Bangkit, M. M. (2022). *Dekomposis Graf Bintang, Graf Bintang Ganda, dan Graf Sapu* (Vol. 10). Surabaya: MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika.

Budayasa, I. K. (2007). Teori Graph dan Aplikasinya. *Unesa University Press*.

Chartrand, G., & Lesniak, L. (2011). Graphs and Digraphs Fifth Edition. *Taylor and Francis Group, LLC*.

Devi, P. L. (2023). *On Some Topological Indices of the Triangular Snake Graph and Alternate Triangular Snake Graph.* Karnataka, India: International Journal of Scientific Research in Science and Technology, Vol. 10 (4). doi:https://doi.org//10.32628/IJSRST52310419

Eka, S. (2014). *DIMENSI METRIK PADA GRAF LINTASAN, GRAF KOMPLIT, GRAF SIKEL, GRAF BINTANG, DAN GRAF BIPARTIT KOMPLIT.* Surabaya: MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika.

Jacobson, M. T. (1991). *Decompotitions of Reguler Bipartite Graphs.* Discreate Methematics, 89, 17-27.

Low, R. M.-M. (2006). *On the Integer-Magic Spectra of Tesselation Graphs.* USA: Australasian Journal of Combinatorics.

Madina, F. (2024). *Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal pada Beberapa Kelas Graf.* Surabaya: MathUnesa: Jurnal Ilmiah Matematika, 10 (2).

Na'imah, T. (2020). *Dekomposisi Graf Kincir W_2^m.* Malang: Program Sarjana UIN Malang.

Rahmawati, N. (2014). Dekomposisi Graf Sikel, Graf Roda, Graf Gir dan Graf Persahabatan. *MATHunesa, 3*(3). Retrieved Oktober 28, 2024, from https://ejournal.unesa.ac.id/index.php/mathunesa/article/view/9365

Shyu, T.-W. (2010). *Decomposition of Complete Graphs into Paths and Stars.* Department of Mathematics and Science, National Taiwan Normal University, Linkou, Taipei County 24449, Taiwan, ROC.