

ANALISIS KESTABILAN MODEL DUA MANGSA-SATU PEMANGSA DENGAN PEMANENAN PADA MANGSA

Muhammad Ikbal

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Sipatokkong Mambo, Watampone, Indonesia

Email: muhammadikbal888@gmail.com*

Abstrak

Kestabilan suatu populasi menunjukkan tingkat keberlangsungan hidup populasi makhluk hidup tersebut. Kebijakan hasil penelitian diperlukan untuk memastikan kebermanfaatan terhadap sistem yang diteliti, baik terhadap pemangsa maupun mangsa, sekalipun mangsa itu dianggap lemah dihadapan pemangsa. Peneliti menformulasikan fungsi respon Holling tipe I pada masing-masing mangsa. Dinamika antar mangsa pun terjadi. Untuk mengambil manfaat ekonomi dari sistem, peneliti melakukan usaha pemanenan pada masing-masing mangsa. Peneliti menganalisis solusi positifnya, keeksisan titik kesimbangannya, dan kestabilan pada titik-titik kesimbangannya itu. Kondisi kestabilan lokalnya diperoleh dengan pendekatan kriteria Routh-Hurwitz. Peneliti juga mensimulasikan model tersebut.

Kata Kunci: kestabilan, Holling tipe I, kriteria Routh-Hurwitz

Abstract

The stability of a population indicates the level of survival sustainability of that living population. Research-derived policies are necessary to ensure benefits to the studied system, for both predators and prey, even if the prey is considered weak in the presence of the predator. Researchers formulated the Holling Type I response function for each prey. Dynamics between prey also occur. To gain economic benefits from the system, researchers conduct harvesting efforts on each prey. Researchers analyzed the positive solutions, the existence of equilibrium points, and the stability at those equilibrium points. The local stability conditions were obtained using the Routh-Hurwitz criteria approach. Researchers also simulated the model.

Keywords: stability, Holling type I, Routh-Hurwitz criteria

PENDAHULUAN

Banyak peneliti telah memodelkan interaksi mangsa-pemangsa dengan berbagai pendekatan untuk memahami dinamika ekosistem. Ikbal meneliti model populasi satu mangsa-dua pemangsa dengan melibatkan persaingan intraspesifik. (M Ikbal, 2021). Penelitian mengenai model populasi dua mangsa-satu pemangsa juga telah diteliti (Rebelo & Rosa, 2025). Karena Rebelo meneliti mengenai mangsa yang kuat dan lemah, maka pada mangsa yang lemah menggunakan *Allee Effect*. Hal yang sama dilakukan oleh (Anggriani et al., 2023), hanya saja sebagai unsur tambahan populasi yang berdinamika, peneliti menambahkan faktor kompetisi intraspesifik pada pemangsa. Peneliti lain, dengan dasar penelitian yang sama yakni mengenai model populasi mangsa-pemangsa, telah diteliti dengan menambahkan waktu tunda (R. Yang et al., 2022).

Penelitian model populasi dengan memanfaatkan pemanenan telah banyak diteliti, Panigoro telah

meneliti model populasi mangsa-pemangsa dengan memanfaatkan tipe Michelis Menten sebagai fungsi pemanenan (Panigoro et al., 2022).

Peneliti lain yang menjadi dasar dari penelitian ini adalah (Das, 2011), membahas dinamika model mangsa-pemangsa di mana pemangsa terinfeksi penyakit, mengeksplorasi dampak penyakit pada interaksi. Penelitian dasar mengenai model pemangsa satu mangsa terhadap dua pemangsa telah dilakukan oleh peneliti sebelumnya (Mukhopadhyay & Bhattacharyya, 2016). Ikbal dan Riska juga meneliti hal yang sama dengan menambahkan unsur pemanenan pada pemangsa. (Muhammad Ikbal & Riskawati, 2020). Penelitian terbaru yang melibatkan dinamika populasi nyamuk telah dilakukan oleh Whittaker dan teman-temannya (Whittaker et al., 2022).

Penelitian ini akan membahas model populasi mangsa-pemangsa. Ada dua mangsa yang saling berinteraksi, interaksi ini membuat masing-masing populasi berdinamika. Dua mangsa ini kemudian

akan dimangsa oleh satu pemangsa dengan menggunakan fungsi respon Holling tipe I. Pemangsa juga memiliki kematian alami yang membuat sistem berdinamika. Untuk mengambil manfaat secara ekonomi, dua mangsa dalam sistem diberikan fungsi pemanenan.

Peneliti telah menemukan titik keseimbangan sistem, dimana ketiga populasi eksis. Titik keseimbangan ini kemudian akan dianalisis kestabilannya.

Setelah menganalisis ketabilan titik keseimbangan, peneliti memvisualisasikan sistem dengan mensimulasikan nilai awal ketiga populasi dan menentukan nilai parameter yang tepat.

KAJIAN TEORI

Model populasi satu mangsa-dua pemangsa telah banyak diteliti oleh banyak peneliti. Dengan memasukkan unsur mangsa kuat dan mangsa lemah, juga kompetisi intraspesifik pada pemangsa, Rebelo dkk, (Rebelo & Rosa, 2025) telah meliti model berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - \frac{ax_1 y}{b + x_1} - d_1 x_1 x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) - cx_2 y - d_2 x_1 x_2, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{e a x_1 y}{b + x_1} + f c x_2 y - m y - n y^2, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, y \geq 0\end{aligned}$$

Kedua spesies mangsa diasumsikan mengikuti pertumbuhan logistik, dengan laju pertumbuhan intrinsik dan kapasitas dukung lingkungan masing-masing dilambangkan sebagai r_1 dan K_1 untuk mangsa yang lebih kuat (x_1) serta r_2 dan K_2 untuk mangsa yang lebih lemah (x_2). Mengingat x_1 adalah spesies yang lebih kuat dibandingkan x_2 , pemangsa memangsa x_1 sesuai dengan fungsi respon Holling tipe-II, yang ditandai dengan laju predasi maksimum (a) dan konstanta setengah jenuh (b). Sebaliknya, x_2 adalah spesies yang lebih lemah, dan pemangsa memangsa x_2 dengan fungsi respon Holling tipe-I, dengan laju predasi maksimum (c), karena tidak ada waktu penanganan untuk mangsa ini. Fungsi respon Holling tipe-II memodelkan bagaimana pemangsa mengubah mangsa yang dipanen menjadi biomassa mereka sendiri dan mencerminkan perubahan laju konsumsi mangsa per pemangsa seiring perubahan kepadatan mangsa. Selain itu, diasumsikan bahwa

fraksi (e) dan (f) dari biomassa x_1 dan x_2 masing-masing berkontribusi pada pertumbuhan pemangsa.

Kompetisi untuk sumber daya, seperti makanan, mendorong interaksi intra- dan antar-spesies. Kompetisi terjadi antara mangsa yang lebih kuat dan lebih lemah, dengan laju kematian akibat kompetisi dilambangkan sebagai d_1 dan d_2 . Model ini juga mempertimbangkan kompetisi intra-spesies dalam populasi pemangsa y , dengan laju kematian akibat kompetisi (m) dan laju kematian konstan (n).

Dinamika populasi mangsa-pemangsa telah diteliti oleh (T. K. Kar & Matsuda, 2007) dengan memanfaatkan fungsi respon Holling tipe III. Fungsi pemanenan telah diteliti oleh (Xiao & Cao, 2009) dengan memanfaatkan pemanenan linier. Kar memanfaatkan model *stage-structure* pada populasi pemangsa dalam dinamika populasi mangsa-pemangsa yang mereka teliti (Tapan Kumar Kar & Chattopadhyay, 2010). Peneliti lain telah meneliti model populasi mangsa-pemangsa dengan memodifikasi skema Leslie-Gower dan Holling tipe II pada modelnya (Ji et al., 2011).

Efek pemanenan dalam dinamika populasi mangsa-pemangsa telah banyak dilakukan oleh peneliti. Parameter ini dimasukkan untuk mengambil manfaat ekonomi dalam model (Dumbela & Aldila, 2019; Gupta & Chandra, 2013, 2017; Muhammad Ikbal & Riskawati, 2020; Lv et al., 2019; Panigoro et al., 2022; Purnomo et al., 2017; Tang & Xiao, 2014)

Kajian yang memanfaatkan kriteria Routh-Hurwitz telah dilakukan oleh peneliti sebelumnya (X. Yang, 2002) (Alebraheem & Abu-Hasan, 2012; Das, 2011; Gupta & Chandra, 2017; M Ikbal, 2021; Muhammad Ikbal & Riskawati, 2020; Li et al., 2019; Rebelo & Rosa, 2025)

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian yang berbasis studi pustaka. Model populasi yang terbentuk diambil dari berbagai model populasi yang sudah diteliti sebelumnya.

Kajian pustaka dilakukan dengan mengkaji referensi yang berkaitan erat dengan model dua mangsa-satu pemangsa, fungsi respon holling, fungsi pemanenan, titik keseimbangan, dan kestabilan lokal sistem populasi.

Setelah model populasi terbentuk, langkah selanjutnya melihat titik keseimbangan sistem. Setelah titik keseimbangan dianalisis, selanjutnya peneliti menganalisis kestabilan titik tersebut. Dengan pertimbangan parameter yang berkelindan dalam sistem, maka dilakukan simulasi numerik untuk melihat secara langsung kestabilan sistem. Analisis dilakukan dengan memanfaatkan perangkat Maple 18.

Untuk memvisualisasikan kestabilan sistem, peneliti memanfaatkan python 3.11.3 dengan modul matplotlib, numpy, scipy.

Sebagai tambahan, peneliti menampilkan data dari sistem untuk menunjukkan dinamika populasi tahun ke tahun. Data ini dibuat juga menggunakan perangkat python.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini merupakan bagian utama artikel hasil penelitian dan biasanya merupakan bagian terpanjang dari suatu artikel. Hasil penelitian yang disajikan dalam bagian ini adalah hasil "bersih". Proses analisis data seperti perhitungan statistik dan proses pengujian hipotesis tidak perlu disajikan. Hanya hasil analisis dan hasil pengujian hipotesis saja yang perlu dilaporkan. Tabel dan grafik dapat digunakan untuk memperjelas penyajian hasil penelitian secara verbal. Tabel dan grafik harus diberi komentar atau dibahas.

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - a_1PQ - b_1PR - q_1E_1P \\ \frac{dQ}{dt} &= sQ \left(1 - \frac{Q}{L}\right) - \alpha_2PQ - b_2QR - q_2E_2Q \\ \frac{dR}{dt} &= n_1\beta_1PR + n_2\beta_2QR - cR\end{aligned}\quad (1)$$

dengan nilai awal

$$P(0) > 0; Q(0) \geq 0; R(0) \geq 0$$

Model di atas terdiri dari tiga variabel, yakni P didefinisikan sebagai pemangsa, Q dan R didefinisikan sebagai mangsa pertama dan mangsa kedua. Ketiga populasi ini kemudian akan diteliti bagaimana keeksisannya dalam sistem, tentu dengan asumsi awal populasi ini ada. Hal-hal lain yang kemudian mempengaruhi kestabilan sistem adalah parameter yang ada disekitar sistem. r dan s masing-masing didefinisikan sebagai laju pertumbuhan

intrinsik mangsa pertama dan mangsa kedua. K dan L masing-masing didefinisikan sebagai daya tampung populasi mangsa pertama dan mangsa kedua. Model populasi di atas memanfaatkan fungsi respon Holling tipe I untuk masing-masing mangsa dimana koefisien pemangsaan untuk masing-masing mangsa ditunjukkan dengan b_1 dan b_2 . Selain fungsi respon pemangsaan, dinamika populasi juga ditentukan oleh persaingan antar mangsa yang kemudian ditunjukkan dengan a_1 dan a_2 .

Untuk mengambil manfaat secara ekonomi pada sistem yang ada, peneliti memasukkan parameter q_1 dan q_2 sebagai koefisien ketertangkapan mangsa pertama dan mangsa kedua. Parameter E_1 dan E_2 masing-masing sebagai usaha pemanenan pada mangsa pertama dan mangsa kedua.

Fungsi pemangsaan pada mangsa membuat kuantitas pada pemangsa berdinamika. Parameter n_1 dan n_2 masing-masing menunjukkan efisiensi perubahan dari pemangsa terhadap mangsa pertama dan mangsa kedua. Pemangsa dianggap memiliki kematian alami dengan parameter c .

Analisis Kasetimbangan

Titik kesetimbangan yang diperoleh dari persamaan (1) adalah

$$\begin{aligned}T_1 &= (0, 0, 0) \\ T_2 &= \left(0, \frac{LG_{10}}{s}, 0\right) \\ T_3 &= \left(0, \frac{c}{n_2b_2}, \frac{G_1}{Ln_2b_2^2}\right) \\ T_4 &= \left(\frac{KG_{11}}{r}, 0, 0\right) \\ T_5 &= \left(\frac{c}{n_1b_1}, 0, \frac{G_2}{Kn_1b_1^2}\right) \\ T_6 &= \left(\frac{KG_3}{G_5}, \frac{LG_4}{G_5}, 0\right) \\ T_7 &= \left(\frac{KG_6}{G_7}, \frac{LG_9}{G_7}, -\frac{G_8}{G_7}\right)\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}G_1 &= Lsb_2n_2 - LE_2b_2n_2q_2 - cs \\ G_2 &= Krb_1n_1 - KE_1b_1n_1q_1 - cr \\ G_3 &= Lsa_1 + sE_1q_1 - LE_2a_1q_2 - rs \\ G_4 &= Kra_2 + rE_2q_2 - KE_1a_2q_1 - rs \\ G_5 &= KLa_1a_2 - rs \\ G_6 &= LE_1b_2^2n_2q_1 + Lsb_1b_2n_2 + Lca_1b_2 \\ &\quad - (LE_2b_1b_2n_2q_2 + Lrb_2^2n_2 + csb_1) \\ G_7 &= KLa_1b_1b_2n_1 + KLa_2b_1b_2n_2 \\ &\quad - (Ksb_1^2n_1 + Lrb_2^2n_2) \\ G_8 &= KLE_1a_2b_2n_2q_1 + KLE_2a_1b_1n_1q_2 + KLca_1a_2 \\ &\quad + Krsb_1n_1 + Lrsb_2n_2 - (KLra_2b_2n_2 + KLSa_1b_1n_1 \\ &\quad + KsE_1b_1n_1q_1 + LrE_2b_2n_2q_2 + crs)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_9 &= KE_2 b_1^2 n_1 q_2 + Kr b_1 b_2 n_1 + Kca_2 b_1 \\ &\quad - (KE_1 b_1 b_2 n_1 q_1 + Ksb_1^2 n_1 + cr b_2) \\ G_{10} &= s - E_2 q_2 \\ G_{11} &= r - E_1 q_1 \end{aligned}$$

Populasi mangsa pertama akan ada jika

$$\begin{aligned} G_6 &> 0, LE_1 b_2^2 n_2 q_1 + Lsb_1 b_2 n_2 + Lca_1 b_2 > \\ LE_2 b_1 b_2 n_2 q_2 + Lrb_2^2 n_2 + csb_1 \text{ dan } G_7 &> \\ 0, KLa_1 b_1 b_2 n_1 + KLa_2 b_1 b_2 n_2 &> Ksb_1^2 n_1 + Lrb_2^2 n_2 \\ \text{atau } G_6 < 0, LE_1 b_2^2 n_2 q_1 + Lsb_1 b_2 n_2 + Lca_1 b_2 < \\ LE_2 b_1 b_2 n_2 q_2 + Lrb_2^2 n_2 + csb_1 \text{ dan } G_7 < \\ 0, KLa_1 b_1 b_2 n_1 + KLa_2 b_1 b_2 n_2 &< Ksb_1^2 n_1 + Lrb_2^2 n_2 \end{aligned}$$

Populasi mangsa kedua akan ada jika

$$\begin{aligned} G_7 > 0, G_9 > 0, KE_2 b_1^2 n_1 q_2 + Kr b_1 b_2 n_1 + Kca_2 b_1 > \\ KE_1 b_1 b_2 n_1 q_1 + Ksb_1^2 n_1 + cr b_2 \text{ atau } G_7 > 0, G_9 < \\ 0, KE_2 b_1^2 n_1 q_2 + Kr b_1 b_2 n_1 + Kca_2 b_1 < KE_1 b_1 b_2 n_1 q_1 + \\ Ksb_1^2 n_1 + cr b_2. \end{aligned}$$

Populasi pemangsa akan ada jika

$$\begin{aligned} G_7 > 0, G_8 < 0, KLE_1 a_2 b_2 n_2 q_1 + KLE_2 a_1 b_1 n_1 q_2 + \\ KLca_1 a_2 + Krsb_1 n_1 + Lrsb_2 n_2 < KLra_2 b_2 n_2 + \\ KLSa_1 b_1 n_1 + KsE_1 b_1 n_1 q_1 + LrE_2 b_2 n_2 q_2 + crs \text{ atau } \\ G_7 < 0, G_8 > 0, KLE_1 a_2 b_2 n_2 q_1 + KLE_2 a_1 b_1 n_1 q_2 + \\ KLca_1 a_2 + Krsb_1 n_1 + Lrsb_2 n_2 > KLra_2 b_2 n_2 + \\ KLSa_1 b_1 n_1 + KsE_1 b_1 n_1 q_1 + LrE_2 b_2 n_2 q_2 + crs \end{aligned}$$

Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Matriks Jacobian dari persamaan (1) adalah sebagai berikut

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Teorema 1 Titik keseimbangan $T_7 = \left(\frac{KG_6}{G_7}, \frac{LG_9}{G_7}, -\frac{G_8}{G_7} \right)$ stabil jika

$$\begin{aligned} J_{11} < 0, J_{22} < 0, J_{33} < 0, J_{11}J_{22} + J_{11}J_{33} + J_{22}J_{33} > \\ J_{12}J_{21} + J_{13}J_{31} + J_{23}J_{32} \\ J_{11}J_{23}J_{32} + J_{12}J_{21}J_{33} + J_{13}J_{31}J_{22} > J_{11}J_{22}J_{33} + \\ J_{12}J_{23}J_{31} + J_{13}J_{32}J_{21}, -(J_{11} + J_{22} + J_{33})(J_{11}J_{22} + \\ J_{11}J_{33} + J_{22}J_{33} - J_{12}J_{21} - J_{13}J_{31} - J_{23}J_{32}) > J_{11}J_{23}J_{32} + \\ J_{12}J_{21}J_{33} + J_{13}J_{31}J_{22} - J_{11}J_{22}J_{33} - J_{12}J_{23}J_{31} - J_{13}J_{32}J_{21}. \end{aligned}$$

Bukti. Hasil substitusi T_7 pada persamaan (2) sebagai berikut

$$J(T_7) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} J_{11} &= r - \frac{2rP}{K} - a_1 Q - b_1 R - q_1 E_1, \\ J_{12} &= -a_1 P, J_{13} = -b_1 P, \\ J_{21} &= -a_2 Q, \\ J_{22} &= s - \frac{2sQ}{L} - a_2 P - b_2 R - q_2 E_2, \\ J_{23} &= -b_2 Q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{31} &= Rb_1 n_1, \\ J_{32} &= Rb_2 n_2, \\ J_{33} &= Pb_1 n_1 + Qb_2 n_2 - c \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J(T_7)$ adalah

$$\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3 = 0 \quad (3)$$

dengan

$$\begin{aligned} A_1 &= -(J_{11} + J_{22} + J_{33}) \\ A_2 &= J_{11}J_{22} + J_{11}J_{33} + J_{22}J_{33} - J_{12}J_{21} - J_{13}J_{31} - J_{23}J_{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= J_{11}J_{23}J_{32} + J_{12}J_{21}J_{33} + J_{13}J_{31}J_{22} - J_{11}J_{22}J_{33} \\ &\quad - J_{12}J_{23}J_{31} - J_{13}J_{32}J_{21}. \end{aligned}$$

Untuk menjamin kestabilan T_7 harus memenuhi kriteria Routh-Hurwitz, yakni $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $A_3 > 0$, dan $A_1 A_2 > A_3$.

1. $A_1 = -(J_{11} + J_{22} + J_{33}) > 0$
 $J_{11} < 0, J_{22} < 0, J_{33} < 0$
2. $A_2 > 0$
 $J_{11}J_{22} + J_{11}J_{33} + J_{22}J_{33} > J_{12}J_{21} + J_{13}J_{31} + J_{23}J_{32}$
3. $A_3 > 0$
 $J_{11}J_{23}J_{32} + J_{12}J_{21}J_{33} + J_{13}J_{31}J_{22} > J_{11}J_{22}J_{33} + J_{12}J_{23}J_{31} + J_{13}J_{32}J_{21}$
4. $A_1 A_2 > A_3$
 $-(J_{11} + J_{22} + J_{33})(J_{11}J_{22} + J_{11}J_{33} + J_{22}J_{33} - J_{12}J_{21} - J_{13}J_{31} - J_{23}J_{32}) > J_{11}J_{23}J_{32} + J_{12}J_{21}J_{33} + J_{13}J_{31}J_{22} - J_{11}J_{22}J_{33} - J_{12}J_{23}J_{31} - J_{13}J_{32}J_{21}.$

Simulasi Numerik

Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi ini yaitu $r = 2.05, s = 1.5, K = 100, L = 100, a_1 = 0.01, a_2 = 0.001, b_1 = 0.05, b_2 = 0.02, q_1 = 0.04, q_2 = 0.05, n_1 = 0.8, n_2 = 0.5, E_1 = 15, E_2 = 20, c = 1$.

Pada bagian simulasi numerik ini, simulasi dilakukan hanya pada kestabilan titik keseimbangan interior karena pada titik keseimbangan itulah semua populasi eksis dan semua komponen (parameter) dalam persamaan (1) dapat diinterpretasikan.

Titik kesetimbangan yang diperoleh dari simulasi dengan parameter di atas adalah

$$T_7 = 23.046875, 7.8125, 17.98828125$$

Matriks Jacobian dari titik kesetimbangan tersebut adalah

$$J(T_7) = \begin{bmatrix} -0.4724609375 & -0.23046875 & -1.15234375 \\ -0.0078125 & -0.1171875 & -0.15625 \\ 0.71953125 & 0.1798828125 & 0. \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik yang diperoleh adalah $\lambda^3 + 0.5896484375\lambda^2 + 0.9108200074\lambda + 0.08291473388$

Nilai eigen yang diperoleh adalah

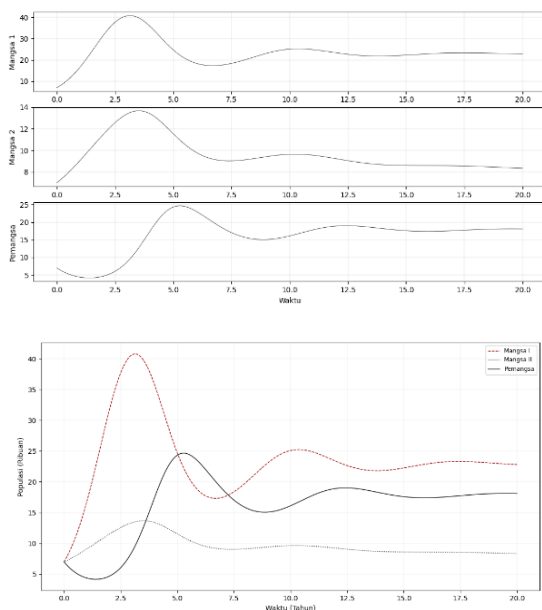
$$\lambda_1 = -0.2468087826391 + 0.9108200074 i$$

$$\lambda_2 = -0.2468087826391 - 0.895825265773833i$$

$$\lambda_3 = -0.0960308722217999$$

Plot Model

Model populasi mangsa-pemangsa pada persamaan (1) dapat digambarkan perubahan populasi yang berdinamika dengan menunjukkan plot dari hasil simulasi numerik sebelumnya. Berikut hasil plot model populasi tersebut ditinjau dari perubahan populasi baik kedua mangsa maupun pemangsa. Dengan menggunakan python versi 3.11.3 dan module matplotlib, berikut hasil plot model persamaan (1) dengan nilai awal (7, 7, 7).



Gambar 1. Trajektori ketiga populasi

Plot di atas menunjukkan secara visual dinamika setiap populasi dalam sistem. Dinamika populasi ditentukan oleh nilai awal populasi dan parameter-parameter yang bekerja disekitarnya. Sebelum mencapai titik stabilnya, masing-masing populasi berosilasi ditunjukkan dengan gambar garis yang bergelombang.

Hal ini ditunjukkan dalam analisis numerik dengan nilai eigen sebagai berikut

$$\lambda_1 = -0.2468087826391 + 0.9108200074 i$$

$$\lambda_2 = -0.2468087826391 - 0.895825265773833i$$

$$\lambda_3 = -0.0960308722217999$$

Tabel 1. Data perubahan populasi

Year	Mangsa1	Mangsa2	Pemangsa
0	7.066596	7.0837	7.084427
1	16.83409	9.156532	4.428679
2	31.72086	11.54633	4.613541
3	40.61288	13.32003	8.500438
4	35.75437	13.54837	17.45148
5	24.68846	11.45416	24.41054
6	18.15079	9.822848	22.99111
7	17.58492	9.172716	18.67576
8	19.93849	9.038179	15.67892
9	23.18745	9.591136	15.12551
10	25.03005	9.650725	16.19961
11	24.83188	9.632818	17.8116
12	23.17384	9.308926	18.94326
13	22.17065	8.764479	18.94859
14	21.6302	8.592131	18.17767
15	22.15101	8.684622	17.64581
16	22.90726	8.497072	17.42755
17	23.43694	8.560976	17.42801
18	23.17509	8.484184	17.82599
19	23.00847	8.297757	18.17085
20	22.84133	8.337167	18.02129

Tabel 1 menunjukkan data yang diambil dari model dengan memanfaatkan python. Data tersebut dimulai dengan nilai awal yang sama dengan gambar 1 dan gambar 2. Data di atas menunjukkan keeksisan masing-masing populasi dari tahun ke tahun, data juga menunjukkan dinamika populasi yang sangat dipengaruhi oleh parameter-parameter yang diberikan.

PENUTUP

SIMPULAN

Titik ketabilan model dimana populasinya eksis semua yaitu

$$T_7 = \left(\frac{KG_6}{G_7}, \frac{LG_9}{G_7}, -\frac{G_8}{G_7} \right)$$

Titik ini akan eksis jika memenuhi syarat parameter:

Populasi mangsa pertama akan ada jika $G_6 > 0, LE_1b_2^2n_2q_1 + Lsb_1b_2n_2 + Lca_1b_2 > LE_2b_1b_2n_2q_2 + Lrb_2^2n_2 + csb_1$ dan $G_7 > 0, KLa_1b_1b_2n_1 + KLa_2b_1b_2n_2 > Ksb_1^2n_1 + Lrb_2^2n_2$ atau $G_6 < 0, LE_1b_2^2n_2q_1 + Lsb_1b_2n_2 + Lca_1b_2 < LE_2b_1b_2n_2q_2 + Lrb_2^2n_2 + csb_1$ dan $G_7 < 0, KLa_1b_1b_2n_1 + KLa_2b_1b_2n_2 < Ksb_1^2n_1 + Lrb_2^2n_2$

Populasi mangsa kedua akan ada jika $G_7 > 0, G_9 > 0, KE_2b_1^2n_1q_2 + Krb_1b_2n_1 + Kca_2b_1 > KE_1b_1b_2n_1q_1 + Ksb_1^2n_1 + crb_2$ atau $G_7 > 0, G_9 < 0, KE_2b_1^2n_1q_2 + Krb_1b_2n_1 + Kca_2b_1 < KE_1b_1b_2n_1q_1 + Ksb_1^2n_1 + crb_2$

$$0, KE_2 b_1^2 n_1 q_2 + Krb_1 b_2 n_1 + Kca_2 b_1 < KE_1 b_1 b_2 n_1 q_1 + Ksb_1^2 n_1 + crb_2.$$

Populasi pemangsa akan ada jika

$$G_7 > 0, G_8 < 0, KLE_1 a_2 b_2 n_2 q_1 + KLE_2 a_1 b_1 n_1 q_2 + KLca_1 a_2 + Krsb_1 n_1 + Lrsb_2 n_2 < KLra_2 b_2 n_2 + KLSa_1 b_1 n_1 + KsE_1 b_1 n_1 q_1 + LrE_2 b_2 n_2 q_2 + crs \text{ atau } G_7 < 0, G_8 > 0, KLE_1 a_2 b_2 n_2 q_1 + KLE_2 a_1 b_1 n_1 q_2 + KLca_1 a_2 + Krsb_1 n_1 + Lrsb_2 n_2 > KLra_2 b_2 n_2 + KLSa_1 b_1 n_1 + KsE_1 b_1 n_1 q_1 + LrE_2 b_2 n_2 q_2 + crs$$

Kestabilan titik tersebut ditentukan oleh syarat paramter:

$$-(J_{11} + J_{22} + J_{33})(J_{11}J_{22} + J_{11}J_{33} + J_{22}J_{33} - J_{12}J_{21} - J_{13}J_{31} - J_{23}J_{32}) > J_{11}J_{23}J_{32} + J_{12}J_{21}J_{33} + J_{13}J_{31}J_{22} - J_{11}J_{22}J_{33} - J_{12}J_{23}J_{31} - J_{13}J_{32}J_{21}.$$

SARAN

Saran untuk peneliti selanjutnya, model ini belum menguji parameter koefisien intraspesifik pada mangsa. Peneliti bisa mengkaji lebih lanjut dengan memasukkan parameter kompetisi intraspesifik.

DAFTAR PUSTAKA

- Alebraheem, J., & Abu-Hasan, Y. (2012). Persistence of predators in a two predators-one prey model with non-periodic solution. *Applied Mathematical Sciences*, 6(17-20).
- Anggriani, N., Panigoro, H. S., Rahmi, E., Peter, O. J., & Jose, S. A. (2023). A predator-prey model with additive Allee effect and intraspecific competition on predator involving Atangana-Baleanu-Caputo derivative. *Results in Physics*, 49. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2023.106489>
- Das, K. pada. (2011). A Mathematical Study of a Predator-Prey Dynamics with Disease in Predator. *ISRN Applied Mathematics*, 2011. <https://doi.org/10.5402/2011/807486>
- Dumbela, P. A., & Aldila, D. (2019). Dynamical analysis in predator-prey-scavenger model with harvesting intervention on prey population. *AIP Conference Proceedings*. <https://doi.org/10.1063/1.5139151>
- Gupta, R. P., & Chandra, P. (2013). Bifurcation analysis of modified Leslie-Gower predator-prey model with Michaelis-Menten type prey harvesting. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.08.057>
- Gupta, R. P., & Chandra, P. (2017). Dynamical properties of a prey-predator-scavenger model with quadratic harvesting. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 49. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.01.026>
- Ikbal, M. (2021). Dynamics of Predator-Prey Model Interaction with Intraspecific Competition. *Journal of Physics: Conference Series*, 1940(1), 012006. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1940/1/012006>
- Ikbal, Muhammad, & Riskawati. (2020). Dynamics of Predator-Prey Model Interaction with Harvesting Effort. *Jurnal Matematika MANTIK*, 6(2), 93-103. <https://doi.org/10.15642/mantik.2020.6.2.93-103>
- Ji, C., Jiang, D., & Shi, N. (2011). A note on a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes with stochastic perturbation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 377(1). <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.11.008>
- Kar, T. K., & Matsuda, H. (2007). Global dynamics and controllability of a harvested prey-predator system with Holling type III functional response. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 1(1). <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2006.03.002>
- Kar, Tapan Kumar, & Chattopadhyay, S. K. (2010). A dynamic reaction model of a prey-predator system with stage-structure for predator. *Modern Applied Science*, 4(5). <https://doi.org/10.5539/mas.v4n5p183>
- Li, C., Zhang, Y., Xu, J., & Zhou, Y. (2019). Global Dynamics of a Prey-Predator Model with Antipredator Behavior and Two Predators. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2019. <https://doi.org/10.1155/2019/3586508>
- Lv, Y., Pei, Y., & Wang, Y. (2019). Bifurcations and simulations of two predator-prey models with nonlinear harvesting. *Chaos, Solitons and Fractals*. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.12.038>
- Mukhopadhyay, B., & Bhattacharyya, R. (2016). Effects of harvesting and predator interference in a model of two-predators competing for a single prey. *Applied Mathematical Modelling*, 40(4), 3264-3274. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.10.018>
- Panigoro, H. S., Rahmi, E., Suryanto, A., & Darti, I. (2022). A Fractional Order Predator-Prey Model with Strong Allee Effect and Michaelis-Menten Type of Predator Harvesting. *AIP Conference Proceedings*, 2498. <https://doi.org/10.1063/5.0082684>
- Purnomo, A. S., Darti, I., & Suryanto, A. (2017). Dynamics of eco-epidemiological model with harvesting. *AIP Conference Proceedings*, 1913. <https://doi.org/10.1063/1.5016652>
- Rebelo, P., & Rosa, S. (2025). An optimal control problem for a predator-prey model with strong and weak preys. *Chaos, Solitons and Fractals*,

- 191(December 2024), 115838.
<https://doi.org/10.1016/j.chaos.2024.115838>
- Tang, Y., & Xiao, D. (2014). Periodic solutions for a predator-prey model with periodic harvesting rate. *International Journal of Bifurcation and Chaos*.
<https://doi.org/10.1142/S0218127414500965>
- Whittaker, C., Winskill, P., Sinka, M., Pironon, S., Massey, C., Weiss, D. J., Nguyen, M., Gething, P. W., Kumar, A., Ghani, A., & Bhatt, S. (2022). A novel statistical framework for exploring the population dynamics and seasonality of mosquito populations. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, 289(1972).
<https://doi.org/10.1098/rspb.2022.0089>
- Xiao, M., & Cao, J. (2009). Hopf bifurcation and non-hyperbolic equilibrium in a ratio-dependent predator-prey model with linear harvesting rate: Analysis and computation. *Mathematical and Computer Modelling*.
<https://doi.org/10.1016/j.mcm.2009.04.018>
- Yang, R., Zhao, X., & An, Y. (2022). Dynamical Analysis of a Delayed Diffusive Predator-Prey Model with Additional Food Provided and Anti-Predator Behavior. *Mathematics*, 10(3), 1–18. <https://doi.org/10.3390/math10030469>
- Yang, X. (2002). Generalized form of Hurwitz-Routh criterion and Hopf bifurcation of higher order. *Applied Mathematics Letters*, 15(5), 615–621.
[https://doi.org/10.1016/S0893-9659\(02\)80014-3](https://doi.org/10.1016/S0893-9659(02)80014-3)