MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 13 No 3
Tahun 2025

PENENTUAN HARGA OPSI SAHAM MENGGUNAKAN MODEL BLACK-SCHOLES FRAKSIONAL

Devi Tri Wahyuni
Program Studi S1 Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: devitri.21016@mhs.unesa.ac.id

Rudianto Artiono
Program Studi S1 Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
Penulis Korespondensi: rudiantoartiono@unesa.ac.id

Abstrak

Model Black-Scholes menjadi salah satu model dalam penentuan harga opsi saham tipe Eropa, dengan asumsi bahwa pergerakan dari harga saham mengikuti gerak Brownian. Namun, dalam kondisi pasar nyata, pergerakan harga saham seringkali acak dan memiliki ketergantungan waktu (memori jangka panjang), sehingga menyebabkan model ini menjadi kurang fleksibel. Untuk mengatasi keterbatasan tersebut, dikembangkan model Black-Scholes Fraksional yang memasukkan parameter Hurst (H) sebagai gambaran dari karakteristik memori jangka panjang pada pergerakan harga saham.

Penelitian ini bertujuan untuk memahami penentuan serta simulasi harga opsi saham jual (*put*) tipe Eropa dengan menggunakan model Black-Scholes Fraksional dan untuk mengetahui hasil simulasi dari penentuan harga opsi saham jual (*put*) tipe Eropa menggunakan dengan model Black-Scholes Fraksional. Data saham yang dikaji dalam penelitian ini berupa harga saham penutupan harian periode Desember 2024 hingga Maret 2025 yang diambil dari https://finance.yahoo.com, dengan harga saham awal (S_0) sebesar Rp 2570, dan tiga tingkat harga kesepakatan yaitu Rp 2400, Rp 2570, dan Rp 2700 serta waktu jatuh tempo selama tiga bulan. Simulasi dilakukan untuk parameter Hurst berkisar antara 0.1 hingga 0.9.

Hasil dari simulasi menunjukkan bahwa harga dari opsi saham yang diperoleh melalui model Black-Scholes Fraksional sangat dipengaruhi oleh variasi pada nilai parameter Hurst. Dengan nilai paramater Hurst (H) yang sama, semakin tinggi harga kesepakatan (K) maka harga opsi saham jual (*put*) pun akan lebih tinggi. Sebaliknya, untuk harga kesepakatan (K) yang sama, terlihat bahwa semakin besar nilai dari parameter Hurst (H), maka harga opsi jual (*put*) akan semakin menurun.

Kata Kunci: Harga Opsi Saham, Model Black-Scholes Fraksional, Parameter Hurst.

Abstract

The Black-Scholes model is one of the models used to determine the price of European-style stock options, assuming that stock price movements follow Brownian motion. However, in real market conditions, stock price movements are often random and have time dependence (long-term memory), making this model less flexible. To address these limitations, the Fractional Black-Scholes model was developed, incorporating the Hurst parameter (H) to represent the long-term memory characteristics of stock price movements.

This study aims to understand the determination and simulation of European-style put option prices using the Fractional Black-Scholes model and to examine the simulation results of European-style put option pricing using the Fractional Black-Scholes model. The stock data analyzed in this study consists of daily closing stock prices from December 2024 to March 2025, obtained from https://finance.yahoo.com, with an initial stock price (S_0) of Rp 2,570, three strike prices of Rp 2,400, Rp 2,570, and Rp 2,700, and a maturity period of three months. Simulations were conducted for Hurst parameters ranging from 0.1 to 0.9.

The simulation results indicate that the price of stock options obtained through the Fractional Black-Scholes model is significantly influenced by variations in the Hurst parameter value. With the same Hurst parameter (H) value, the higher the strike price (K), the higher the put option price. Conversely, for the same strike price (K), it is observed that as the value of the Hurst parameter (H) increases, the price of the put option decreases.

Keywords: *Stock Option Price, Fractional Black-Scholes Model, Hurst Parameter.*

PENDAHULUAN

Investasi adalah sebuah keputusan untuk mengalokasikan sejumlah dana atau sumber daya lain pada saat ini, dengan harapan dapat menghasilkan keuntungan di masa mendatang. Dalam keterangan resmi yang dirilis oleh PT Bursa Efek Indonesia (BEI) pada tanggal 3 Oktober 2024, jumlah investor pasar modal di Indonesia telah melewati angka 14 juta single investor identification (SID), tepatnya mencapai 14.001.651 SID. Single investor identification (SID) adalah nomor identitas unik yang diberikan kepada setiap investor di pasar modal Indonesia, yang mempermudah proses identifikasi setiap investor (KSEI, 2016). Angka ini menunjukkan kenaikan sebesar 1.833.590 SID dibandingkan akhir tahun 2023 yang berjumlah 12.168.061 SID (Nurahmad, 2024). Salah satu alat di pasar modal yang banyak dipilih oleh para investor adalah saham. Saham merupakan dokumen berharga yang menjadi tanda kepemilikan atas suatu perusahaan sebagai bentuk bukti investasi.

Tujuan utama setiap orang yang berinvestasi adalah memperoleh keuntungan maksimal dan meminimalkan kerugian. Namun, karena fluktuasi harga saham yang tinggi, investor sering menghadapi risiko kerugian. Untuk mengurasi risiko tersebut, dipilihlah investasi pada instrumen turunan (derivatif) seperti opsi saham.

Menurut Tsay (2005), opsi saham adalah jenis perjanjian atau investasi dalam berupa kontrak yang memberikan hak kepada pemegangnya untuk membeli atau menjual aset tertentu pada harga dan waktu yang sudah ditentukan. Opsi saham dapat dimanfaatkan sebagai alat untuk melindungi nilai (*hedging*) atau untuk tujuan spekulasi. Opsi saham memberikan peluang bagi investor untuk meningkatkan modal investasi, fleksibilitas yang lebih besar dalam membuat keputusan untuk berinvestasi dan memungkinkan investor untuk menyesuaikan risiko sesuai keinginan mereka. Menurut Hull (2012), ada dua jenis kontrak opsi saham yaitu opsi beli (*call*) dan opsi jual (*put*). Opsi *call* merupakan jenis kontrak yang memberikan hak kepada pemegang opsi untuk membeli dari penjual opsi sejumlah lembar saham tertentu dengan harga serta jangka waktu yang telah ditentukan. Opsi *put* adalah opsi yang memberikan hak kepada pemegangnya untuk menjual saham dalam jumlah tertentu pada pembeli opsi pada harga dan periode tertentu. Berdasarkan durasi penggunaan, terdapat dua jenis opsi yaitu opsi tipe Eropa dan opsi tipe Amerika (Luenberger, 1998). Opsi tipe Eropa hanya dapat dilaksanakan pada saat jatuh tempo saja. Sedangkan opsi tipe Amerika dapat dilaksanakan kapan saja mulai dari tanggal penandatangan kontrak sampai waktu jatuh tempo.

Salah satu model yang banyak digunakan untuk menentukan harga opsi saham adalah model Black-Scholes. Model ini pertama kali diperkenalkan oleh Fisher Black dan Myron Scholes pada tahun 1973. Model Black-Scholes dibuat berdasarkan asumsi yang ketat, misalkan pada kasus nilai volatilitas saham yang memiliki efek memori jangka panjang (perubahan harga saat ini dipengaruhi oleh kejadian di masa lalu). Model Black-Scholes mengasumsikan bahwa volatilitas bersifat konstan dan proses stokastiknya mengikuti gerak Brownian. Namun dalam kenyataannya, nilai volatilitas saham memiliki efek memori jangka panjang, sehingga model Black-Scholes kurang sesuai dalam menggambarkan pergerakan harga saham yang sesungguhnya. Untuk mengatasi keterbatasan tersebut, dikembangkan model Black-Scholes Fraksional yang memasukkan efek memori jangka panjang dalam proses stokastiknya melalui gerak Brownian Fraksional.

Model Black-Scholes diperluas menjadi model Black-Scholes Fraksional dengan memanfaatkan parameter Hurst. Untuk model Black-Scholes fraksional dapat ditentukan melalui proses stokastik dengan menetapkan model harga saham yang mengikuti gerak Brownian fraksional (Sabrina et al., 2020). Parameter Hurst dipilih karena parameter ini dapat diterapkan pada data dengan ketergantungan jangka panjang, sehingga sangat sesuai untuk menganalisis data keuangan (Flint & Maré, 2017). Kelebihan dari gerak Brownian fraksional dibandingkan dengan gerak Brownian standar adalah sifatnya tidak saling bebas, artinya harga aset berikutnya bergantung pada harga saat ini dan sebelumnya (Enny Murwaningtyas et al., 2016).

Penelitian terdahulu dilakukan oleh Mehrdoust & Najafi (2018), tentang penetapan harga opsi saham Eropa dengan model Black-Scholes Fraksional dengan fungsi pembayaran lemah menyimpulkan bahwa dengan memvariasikan nilai parameter Hurst (H) maka dapat diperoleh prediksi harga opsi saham tipe Eropa yang lebih akurat. Selanjutnya penelitian yang dilakukan oleh Sabrina et al. (2020), tentang penentuan harga opsi saham tipe Eropa dengan model

Black-Scholes Fraksional, menyimpulkan bahwa dengan variasi parameter Hurst (H), didapatkan hasil bahwa ketika harga kesepakatan (*strike price*) untuk opsi saham *call* meningkat, maka nilai dari opsi saham *call* akan semakin menurun. Sebaliknya, ketika harga kesepakatan (*strike price*) untuk opsi saham *put* meningkat, maka nilai opsi saham *put* juga akan semakin meningkat.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengidentifikasi penentuan dan simulasi harga opsi saham tipe Eropa dengan menggunakan model Black-Scholes Fraksional, serta untuk mengetahui hasil simulasi yang dilakukan untuk menentukan harga opsi saham tipe Eropa menggunakan model tersebut.

KAJIAN TEORI

OPSI SAHAM

Menurut Luenberger (1998), opsi saham adalah suatu hak bukan kewajiban bagi pemiliknya untuk melakukan pembelian atau penjualan aset tertentu pada harga dan waktu yang sudah ditentukan. Berdasarkan waktu pelaksanaan, opsi saham dapat dibedakan menjadi 2 tipe yaitu

1. Opsi saham tipe Eropa yaitu opsi saham yang hanya dapat dilaksanakan pada tanggal jatuh tempo, dan
2. Opsi saham tipe Amerika yaitu opsi saham yang dapat dilaksanakan sebelum atau tepat pada tanggal jatuh tempo.

Berdasarkan fungsinya, opsi saham dapat dibedakan menjadi 2 jenis yaitu:

1. Opsi saham beli (*call option*) yang memberikan hak kepada pemiliknya untuk membeli aset tertentu dengan harga serta waktu yang telah ditetapkan sebelumnya.
2. Opsi saham jual (*put option*) yang memberikan hak kepada pemiliknya untuk menjual aset tertentu dengan harga seta waktu yang telah ditetapkan sebelumnya.

Ada enam variabel yang digunakan dalam penentuan harga opsi saham (Hull, 2012) yaitu harga saham (S), harga kesepakatan (*strike price*) (K), waktu jatuh tempo (T), tingkat suku bunga bebas risiko (r), volatilitas harga saham (σ), dan dividen (q). Nilai intrinsik opsi saham *call* dinyatakan dalam persamaan (Sidarto et al., 2019):

$$C = max(S_T - K, 0). \tag{1}$$

a. Opsi saham *call* dalam keadaan *out of the money* saat harga saham lebih rendah dari harga kesepakatan ($S_T < K$), sehingga opsi saham bernilai nol.
b. Opsi saham *call* dalam keadaan *in the money* saat harga saham melebihi harga kesepakatan ($S_T > K$), sehingga opsi saham bernilai positif.
c. Opsi saham *call* dalam keadaan *at the money* saat harga saham sama dengan harga kesepakatan ($S_T = K$).

Nilai intrinsik dari opsi saham *put* dapat dinyatakan dalam persamaan (Sidarto et al., 2019):

$$P = max(K - S_T, 0). \tag{2}$$

a. Opsi saham *put* dalam keadaan *out of the money* saat harga saham melebihi harga kesepakatan ($S_T > K$), sehingga opsi saham bernilai nol.
b. Opsi saham *put* dalam keadaan *in the money* saat harga saham lebih rendah dari harga kesepakatan ($S_T < K$), sehingga opsi saham bernilai positif.
c. Opsi saham *put* dalam keadaan *at the money* saat harga saham sama dengan harga kesepakatan ($S_T = K$).

RETURN

Return adalah hasil baik keuntungan maupun kerugian yang diperoleh dari suatu investasi saham. Return dapat ditentukan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$R_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right). \tag{3}$$

dimana:

R_t: Return saham pada waktu t
S_t: Harga saham pada saat t
S_{t-1}: Harga saham pada saat t-1

VOLATILITAS

Flutuasi harga saham yang mengalami kenaikan atau penurunan disebut volatilitas harga saham (Brigham & Houston, 2006). Semakin tinggi volatilitas harga saham, maka semakin besar kemungkinan harga saham naik dan turun secara cepat. Nilai volatilitas dapat dihitung dengan mencari simpangan baku dan logaritma natural return saham yaitu

$$\sigma = \sqrt{n \times SR_t}, \tag{4}$$

dengan

$$SR_t = \frac{\sum_{t=1}^{n}(R_t - \bar{R}_t)^2}{n-1},$$

$\bar{R}_t = \frac{\sum_{t=1}^{n} R_t}{n}$,
$R_t = \ln\frac{S_t}{S_{t-1}}$.
dimana:
σ: Volatilitas harga saham
n: Jumlah hari perdagangan dalam setahun (biasanya n = 252 untuk pasar saham)
SR_t : Standar deviasi return hargas saham
R_t: Return saham pada waktu t
$\bar{R}_t$: Rata-rata return saham
S_t: Harga saham pada saat t
S_{t-1}: Harga saham pada saat t-1

GERAK BROWNIAN

Gerak Brownian $(B(t))_{t\geq 0}$ merupakan sebuah proses stokastik berkelanjutan yang memiliki karakteristik sebagai berikut (Hergüner, 2015):

1. $B(0) = 0$
2. $B(t)$ memiliki *increment* yang saling bebas
   $$B(t) - B(s) \sim N(0, t - s),$$
   dengan $N(r, \sigma^2)$ menyatakan distribusi normal dengan nilai harapan r dan varians σ^2.
3. $E[B(t)] = 0$
4. $Var[B(t)] = t$

PERGERAKAN HARGA SAHAM

Model pergerakan harga saham mengikuti proses *Wiener* atau gerak Brown. Model pergerakan harga saham ditunjukkan sebagai berikut (Sidarto et al., 2019):

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t, \tag{5}$$

dengan $dB_t = \sqrt{dt}\, Z,\ Z \sim N(0,1)$
Solusi analitik dari model di atas mengikuti gerak Brownian, yang dinyatakan sebagai berikut (Suharyanti, 2014):

$$S_t = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}. \tag{6}$$

dimana:
S_t: harga saham pada saat t
S_0: harga saham awal (saat t = 0)
r: tingkat pengembalian (rate of return) saham
σ: volatilitas harga saham
B_t : gerak Brownian standar

MODEL BLACK-SCHOLES

a. Model Black-Scholes untuk opsi saham *call* tipe Eropa dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$C_{B-S} = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \tag{7}$$

dengan $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$; $d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$

b. Model Black-Scholes untuk opsi saham *put* tipe Eropa dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$P_{B-S} = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \tag{8}$$

dengan $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$; $d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$

dimana :
C_{B-S}: Opsi saham *call* model Black-Scholes
P_{B-S}: Opsi saham *put* model Black-Scholes
S_0: Harga saham awal (pada waktu t = 0)
K: Harga kesepakatan (*strike price*)
r : Tingkat pengembalian (*rate of return*) saham
T: Waktu jatuh tempo
σ: Volatilitas harga saham
N(d): Fungsi distribusi kumulatif normal.
d_1 dan d_2: Parameter yang menentukan probabilitas harga saham di atas atau di bawah harga kesepakatan pada waktu jatuh tempo

LEMA ITO

Misalkan proses S_t memenuhi persamaan $dS_t = u(S_t, t)dt + v(S_t, t)dB_t$ dan fungsi $V_t = f(s_t, t)$ adalah kontinu serta turunan $f_t(S_t, t), f_S(S_t, t), f_{SS}(S_t, t)$ kontinu. Maka $V_t = f(S_t, t)$ memenuhi persamaan (Sabrina et al., 2020):

$$dV_t = f_t(S_t, t)dt + f_S(S_t, t)dS_t + \frac{1}{2} f_{SS}(S_t, t)(ds_t)^2 \tag{9}$$

dengan $f_t = \frac{\partial f}{\partial t}, f_S = \frac{\partial f}{\partial S}, f_{SS} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$
dan $(dt)^2 = dB_t dt = dt dB_t = 0\ (dB_t)^2 = dt$

GERAK BROWNIAN FRAKSIONAL

Gerak Brownian Fraksional adalah proses Gaussian terpusat $(B^H(t))_{t\in\mathbb{R}}$ dengan parameter Hurst H dimana $\text{H} \in (0,1)$ yang memenuhi (Murwaningtyas et al., 2018):

1. $B^H(0) = 0$
2. $E[B^H(t)] = 0$, untuk semua $t \geq 0$
3. $var[B^H(t)] = t^{2H}$
4. Jika $H = \frac{1}{2}$, maka $B^H(t)$ ekuivalen dengan gerak brownian

LEMA ITO FRAKSIONAL

Misalkan $H \in (0,1)$ dan proses S_t memenuhi persamaan $dS_t = rS_t dt + \alpha S_t dB_t^H$ serta $V(S_t, t)$ adalah suatu fungsi yang terdiferensialkan terhadap waktu (t) dan harga saham S_t. Misalkan proses S_t mengikuti proses stokastik yang digerakkan oleh gerak Brownian Fraksional B_t^H.

Maka, perubahan nilai fungsi $V(S_t, t)$ dinyatakan sebagai (Hergüner, 2015):

$$V(S_t,t) = V(S_{0,}0) + \int_0^t \frac{\partial V}{\partial t}(S_u,u)du + \int_0^t \frac{\partial V}{\partial S_u}(S_u,u)dS_u + \frac{1}{2}H\int_0^t \frac{\partial^2 V}{\partial {S_u}^2}(S_u,u)u^{2H-1}du, \quad (10)$$

dengan $u(S_t,t) = rS_t,\ \ v(S_t,t) = \sigma S_t$

MODEL BLACK-SCHOLES FRAKSIONAL

Model Black-Scholes Fraksional dapat diidentifikasi melalui proses stokastik dengan cara mengembangkankan model harga saham yang mengikuti gerak Brownian Fraksional. Model harga saham yang mengikuti gerak Brownian Fraksional ditunjukkan dengan persamaan berikut:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t^H,\ \ 0 < H < 1 \quad (11)$$

Model Black-Scholes Fraksional untuk opsi saham *call* dan opsi saham *put* tipe Eropa dapat dinyatakan dalam persamaan berikut (Hull, 2012):

$$C_{FB-S} = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \quad (12)$$

$$P_{FB-S} = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (13)$$

dengan:

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + r(T^{2H}) + \frac{\sigma^2}{2}T^{2H}}{\sigma\sqrt{T^{2H}}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + r(T^{2H}) - \frac{\sigma^2}{2}T^{2H}}{\sigma\sqrt{T^{2H}}}$$

dimana:

C_{FB-S}: Opsi saham call model Black-Scholes Fraksional

P_{FB-S}: Opsi saham put model Black-Scholes Fraksional

S_0: Harga saham awal (pada waktu t = 0)

K: Harga kesepakatan (strike price)

r : Tingkat suku bunga bebas risiko

T: Waktu jatuh tempo

σ: Volatilitas harga saham

d_1 dan d_2 : Parameter yang menentukan probabilitas harga saham di atas atau di bawah harga kesepakatan pada waktu jatuh tempo

H: parameter Hurst yang digunakan

N(d): Fungsi distribusi kumulatif normal.

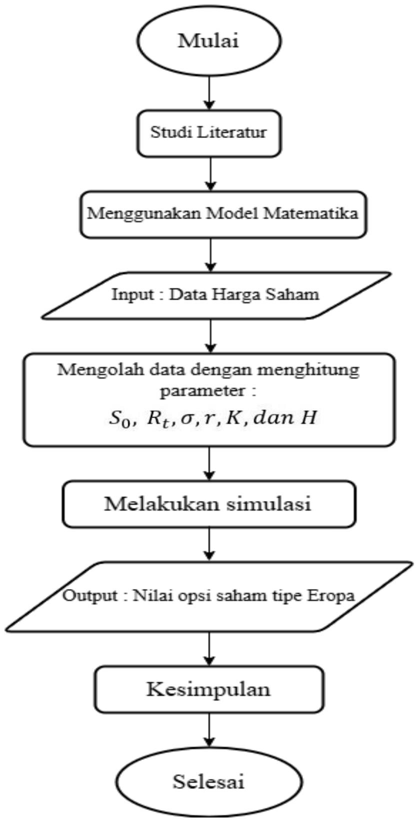
METODE

DATA PENELITIAN

Jenis data yang digunakan adalah data sekunder yang berasal dari situs finance.yahoo.com. Data yang diambil merupakan data historis harga saham dari PT. XYZ selama periode 3 bulan dengan fokus pada data saham penutupan harian.

DIAGRAM ALUR PENELITIAN

Rancangan penelitian disusun dan disajikan dalam diagram alur sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram alur penelitian

HASIL DAN PEMBAHASAN

PENURUNAN MODEL BLACK-SCHOLES

Penurunan model Black-Scholes pada penelitian ini merujuk pada Sidarto et al. (2019). Model pergerakan harga saham yang digunakan dalam penurunan persamaan diferensial parsial Black-Scholes ditunjukkan oleh persamaan (5) yaitu:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

dimana r adalah tingkat pengembalian (*rate of return*) saham, σ adalah volatilitas harga saham, dan B_t adalah gerak Brownian standar. Misalkan $V(S_t,t)$ menyatakan harga opsi saham saat waktu t terhadap harga saham S_t . Dengan deret Taylor, didapatkan nilai perubahan $V(S_t,t)$ terhadap waktu yang dituliskan dalam persamaan berikut:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S_t}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial (S_t)^2}(dS_t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(dt)^2, \quad (14)$$

Dikarenakan perubahan waktu dt sangat kecil nilainya, maka untuk $n > 1$ diasumsikan $(dt)^n$ mendekati 0. Hal ini sejalan dengan sifat diferensial stokastik dan mengikuti Lema Ito. Sehingga didapatkan persamaan

$$\boldsymbol{dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S_t}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial (S_t)^2}(dS_t)^2,} \quad (15)$$

Selanjutnya,

$$(dS_t)^2 = r^2{S_t}^2(dt)^2 + 2r\sigma {S_t}^2 dB_t dt + \sigma^2 {S_t}^2(dB)^2 \approx \sigma^2{S_t}^2(dB)^2 = \sigma^2{S_t}^2(Z^2 dt),$$

Sehingga didapatkan persamaan

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S_t}(rS_t dt + \sigma S_t dB_t) + \frac{1}{2}\sigma^2{S_t}^2 Z^2 dt\frac{\partial^2 V}{\partial (S_t)^2},$$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2{S_t}^2Z^2\frac{\partial^2 V}{\partial (S_t)^2}\right)dt + \sigma S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}dB_t, \quad (16)$$

Karena $E(Z^2) = Var(Z) + (E(Z)^2) = 1 + 0 = 1, maka\ nilai\ Z^2 \approx 1$, sehingga diperoleh

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2{S_t}^2\frac{\partial^2 V}{\partial (S_t)^2}\right)dt + \sigma S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}dB_t, \quad (17)$$

Misalkan disusun suatu portofolio Π yang terdiri dari menjual satu opsi saham seharga V dan membeli Δ lembar saham seharga S, sehingga nilai portofolio tersebut adalah

$$\Pi = -V + \Delta S_t,$$

$$\boldsymbol{\Pi = -V + S_t\frac{\partial V}{\partial S_t},} \quad (18)$$

Dalam selang waktu Δt, nilai portofolio mengalami perubahan sebesar

$$d\Pi = -dV + \Delta dS_t, \quad (19)$$

Diasumsikan Δ tetap pada selang waktu t. Dengan mensubstitusikan persamaan (17) dan (5) ke dalam persamaan (19), maka didapatkan

$$d\Pi = -\left(\left(\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2{S_t}^2\frac{\partial^2 V}{\partial (S_t)^2}\right)dt + \sigma S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}dB_t\right) + \Delta(rS_t dt + \sigma S_t dB_t) \quad (20)$$

Didapatkan Π mengikuti random walk. Agar portofolio bebas risiko (tidak mengikuti *random walk*), maka komponen acak dB_t pada persamaan (20) akan dihilangkan yaitu dengan cara memilih

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_t}, \quad (21)$$

Sehingga persamaan menjadi,

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2{S_t}^2\frac{\partial^2 V}{\partial (S_t)^2}\right)dt, \quad (22)$$

Jika dana sebesar Π diinvestasikan pada aset yang tidak beresiko, misalnya disimpan di bank, maka dalam waktu dt nilainya akan bertambar sebesar $d\Pi$.

$$d\Pi = r\Pi\, dt, \quad (23)$$

Substitusi persamaan (18) dan (22) ke (23) lalu disederhanakan, sehingga didapatkan persamaan diferensial parsial Black-Scholes untuk opsi saham sebagai berikut:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2{S_t}^2\frac{\partial^2 V}{\partial (S_t)^2} + rS_t\frac{\partial V}{\partial S_t} - rV = 0. \quad (24)$$

Persamaan diferensial parsial untuk opsi saham *call* tipe Eropa adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2{S_t}^2\frac{\partial^2 C}{\partial (S_t)^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S_t} - rC = 0{,}0 \le t < T, S_t \ge 0 \quad (25)$$

Syarat akhir untuk t dan syarat batas untuk S_t dari persamaan (25) adalah

a. $C(S_t, T) = max\{S_t - K, 0\}$;
b. Jika $S_t = 0$ maka $dS_t = 0$, sehingga $C(0,t) = 0$;
c. Jika $S_t > K$ maka $S_t - K \approx S_t$, sehingga $C(S_t,t) \approx S_t$.

Persamaan diferensial parsial untuk opsi saham *put* tipe Eropa adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2{S_t}^2\frac{\partial^2 P}{\partial (S_t)^2} + rS_t\frac{\partial P}{\partial S_t} - rP = 0{,}0 < t < T, S_t > 0 \quad (26)$$

Syarat akhir untuk t dan syarat batas untuk S_t dari persamaan (26) adalah

a. $P(S_t, T) = max\{K - S_t, 0;$
b. $P(0,t) = Ke^{-r(T-t)}, 0 \le t \le T$;
c. $P(S_t, t) \approx 0$, untuk $S_t > K$.

PENURUNAN MODEL BLACK-SCHOLES FRAKSIONAL

Penurunan model Black-Scholes Fraksional merujuk pada Hergüner (2015). Model pergerakan harga saham yang diterapkan dalam penurunan persamaan diferensial parsial Black-Scholes Fraksional ditunjukkan persamaan (11) yaitu:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t^H$$

Misalkan V(S_t, t) menyatakan harga opsi saham saat waktu t terhadap harga saham S_t,dengan menerapkan lema ito Fraksional, didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$dV(S_t,t) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t\frac{\partial V}{\partial S_t} + H\sigma^2 t^{2H-1}S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right)dt + \sigma S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}dB_t^H \quad (27)$$

Misalkan $\bar{V}$ menyatakan nilai opsi dalam bentuk diskonto terhadap harga aset, sehingga berlaku:

$$\bar{V} = e^{-rt}V$$

Turunan terhadap waktu dari $\bar{V}$ harus bernilai nol secara deterministik. Untuk mendapatkan turunan dari $\bar{V}$ digunakan aturan rantai dan turunan produk, sehingga diperoleh:

$$d\bar{V} = -re^{-rt}Vdt + e^{-rt}dV \quad (28)$$

Transformasi ini dilakukan agar $\bar{V}$ bersifat martingale. Konsep martingale merepresentasikan proses stokastik yang tidak memiliki tren naik atau turun dalam waktu jangka panjang (Shreve, 2004). Dari konsep martingale tersebut, maka ekspektasi dari perubahan nilai $\bar{V}$ terhadap waktu adalah nol, yaitu: $E[d\bar{V}] = 0$, sehingga

$$d\bar{V} = 0$$
$$-re^{-rt}Vdt + e^{-rt}dV = 0$$

Untuk menghilangkan eksponensial, kalikan kedua ruas dengan e^{-rt}, sehingga diperoleh

$$-rVdt + dV = 0 \quad (29)$$

Selanjutnya, substitusi persamaan (29) ke persamaan (27) sehingga diperoleh

$$d\bar{V} = \left(-rV\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t\frac{\partial V}{\partial S_t} + H\sigma^2 t^{2H-1}S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right)dt + \sigma S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}dB_t^H = 0 \quad (30)$$

Agar nilai opsi tidak terjadi arbitrase atau bebas risiko, maka komponen acak dB_t^H harus dihilangkan. Karena dB_t^H adalah proses stokastik dengan mean nol (yaitu ekspektasi dari dB_t^H adalah nol, sehingga

$$E[dB_t^H] = 0$$
$$E\left[\sigma S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}dB_t^H\right] = 0$$

Karena bagian stokastik dB_t^H sama dengan nol, sehingga persamaan (30) menjadi

$$d\bar{V} = \left(-rV\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t\frac{\partial V}{\partial S_t} + H\sigma^2 t^{2H-1}S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right)dt = 0 \quad (31)$$

Didapatkan persamaan diferensial parsial Black-Scholes Fraksional untuk opsi saham sebagai berikut:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t\frac{\partial V}{\partial S_t} + H\sigma^2 t^{2H-1}S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}dt - rV = 0 \quad (32)$$

Persamaan diferensial parsial untuk opsi saham *call* tipe Eropa adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS_t\frac{\partial C}{\partial S_t} + H\sigma^2 t^{2H-1}S_t^2\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}dt - rC = 0 \quad (33)$$

Syarat akhir untuk t dan syarat batas untuk S_t dari persamaan (33) adalah

d. $C(S_t, T) = max\{S_t - K, 0\}$;
e. Jika $S_t = 0$ maka $dS_t = 0$, sehingga $C(0, t) = 0$;
f. Jika $S_t > K$ maka $S_t - K \approx S_t$, sehingga $C(S_t, t) \approx S_t$.

Persamaan diferensial parsial untuk opsi saham *put* tipe Eropa adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + rS_t\frac{\partial P}{\partial S_t} + H\sigma^2 t^{2H-1}S_t^2\frac{\partial^2 P}{\partial S_t^2}dt - rP = 0 \quad (34)$$

Syarat akhir untuk t dan syarat batas untuk S_t dari persamaan (34) adalah

d. $P(S_t, T) = max\{K - S_t, 0\}$;
e. $P(0, t) = Ke^{-r(T-t)}, 0 \le t \le T$;
f. $P(S_t, t) \approx 0$, untuk $S_t > K$.

SIMULASI PENENTUAN HARGA OPSI SAHAM MENGGUNAKAN MODEL BLACK-SCHOLES FRAKSIONAL

DATA HARGA SAHAM

Penelitian ini menggunakan data harga saham PT. XYZ yang terdiri dari 59 data dengan periode perdagangan selama 3 bulan, dimulai dari 9 Desember 2024 hingga 10 Maret 2025. Data yang digunakan adalah data harga saham penutupan harian yang diperoleh dari situs https://finance.yahoo.com. Data harga saham penutupan ditampilkan pada Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Harga Saham Penutupan Harian

t	Tanggal	Harga Saham Penutupan Harian
0	9 Desember 2024	3010
1	10 Desember 2024	2970
2	11 Desember 2024	2970
⋮	⋮	⋮
56	6 Maret 2025	2610
57	7 Maret 2025	2580
58	10 Maret 2025	2570

PARAMETER MODEL

Tabel 2. Parameter Model

Harga saham awal (S_0)	2570
Return (R_t)	-0.15803
volatilitas harga saham (σ)	0.3585
Suku bunga bebas risiko (r)	0.0583
Harga kesepakatan (*strike price*) (K)	2400; 2570; 2700
Parameter Hurst (H)	$\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}$

Dengan menerapkan parameter model Tabel 2 pada model Black-Scholes Fraksional jual (*put*) persamaan (13), didapatkan hasil simulasinya yaitu ditampilkan pada Tabel 3 dan Tabel 4.

Tabel 3. Hasil Simulasi ($H = 0.1 - H = 0.5$)

K	Parameter Hurst (H)

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
2400	213.01	175.95	143.80	116.09	92.37
2570	296.73	256.84	221.80	191.09	164.22
2700	370.34	329.71	294.07	262.92	235.74

Tabel 4. Hasil Simulasi ($H = 0.6 - H = 0.9$)

K	Parameter Hurst (H)			
	0.6	0.7	0.8	0.9
2400	72.22	55.30	41.26	29.80
2570	140.73	120.22	102.33	86.73
2700	212.10	191.57	173.79	158.46

Berdasarkan hasil simulasi model Black-Scholes Fraksional yang ditampilkan pada Tabel 3 dan Tabel 4, dapat disimpulkan bahwa:

a. Untuk nilai paramater Hurst (H) yang sama, peningkatan harga kesepakatan (K) akan menyebabkan harga opsi saham jual (*put*) juga meningkat. Hal ini sesuai dengan karakteristik dari opsi saham jual (*put)* yang memberikan hak untuk menjual opsi saham pada harga yang lebih tinggi dari harga pasar (*in the money*), dimana jika pemegang dari opsi saham jual (*put)* menggunakan haknya untuk menjual opsi saham, maka akan mendapatkan keuntungan sebesar $K - S_T$.
b. Semakin meningkatnya nilai parameter Hurst (H), semakin harga opsi jual (*put*) menurun. Untuk setiap nilai harga kesepakatan (K), terlihat bahwa semakin besar nilai dari parameter Hurst (H), maka semakin rendah harga opsi jual (*put*).

PENUTUP

SIMPULAN

Dari hasil yang diperoleh, maka penentuan harga opsi saham tipe Eropa menggunakan model Black-Scholes Fraksional dilakukan dengan tahapan sebagai berikut:

a. Menentukan parameter model
   Parameter yang dibutuhkan meliputi:
   a. Harga saham saat ini (S_0)
   b. Nilai return saham (R_t)
   c. Harga kesepakatan (*stike price*) (K)
   d. Tingkat suku bunga bebas risiko (r)
   e. Volatilitas (σ)
   f. Waktu jatuh tempo (T)
   g. Parameter Hurst (H) sebagai representasi tingkat memori jangka panjang dalam pergerakan harga saham
b. Penentuan dan simulasi harga opsi saham jual (*put*) menggunakan model Black-Scholes Fraksional
   a. Untuk menentukan harga opsi saham *put* menggunakan model Black-Scholes Fraksional dapat digunakan rumus sebagai berikut:
   $$P_{FB-S} = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1)$$
   dimana:
   $$d_1 = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + r(T^{2H}) + \frac{\sigma^2}{2}T^{2H}}{\sigma\sqrt{T^{2H}}}$$
   $$d_2 = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + r(T^{2H}) - \frac{\sigma^2}{2}T^{2H}}{\sigma\sqrt{T^{2H}}}$$
   b. Simulasi dilakukan dengan mengubah parameter Hurst dari 0.1 sampai 0.9. Simulasi numerik dilakukan untuk menganalisis bagaimana harga opsi saham berubah terhadap variasi parameter H.

Kemudian hasil simulasi menunjukkan bahwa harga opsi saham yang dihasilkan model Black-Scholes Fraksional sangat dipengaruhi oleh variasi nilai parameter Hurst. Untuk nilai paramater Hurst (H) yang sama, peningkatan harga kesepakatan (K) akan menyebabkan harga opsi saham jual (*put*) juga meningkaat. Sebaliknya, untuk harga kesepakatan (K) yang sama, terlihat bahwa semakin besar nilai parameter Hurst (H), maka semakin rendah harga opsi jual (*put*.

SARAN

Untuk penelitian selanjutnya, ada beberapa pertimbangan yang dapat dilakukan untuk penelitian selanjutnya yaitu menerapkan penentuan harga opsi saham menggunakan model Black-Scholes Fraksional pada opsi saham Amerika, dan menggunakan model alternatif lainnya untuk menentukan harga opsi saham, kemudian membandingkan hasilnya dengan hasil pada penelitian ini, sehingga dapat menemukan model yang lebih baik.

DAFTAR PUSTAKA

Brigham, E. F., & Houston, J. F. (2006). *Dasar-dasar manajemen keuangan*.

Enny Murwaningtyas, C., Haryatmi, S., & Pribawanto Suryawan, H. (2016). *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika ISBN*. http://jurnal.fkip.uns.ac.id

Flint, E., & Maré, E. (2017). Fractional Black–Scholes option pricing, volatility calibration and implied Hurst exponents in South African context. *South African Journal of Economic and Management Sciences*, *20*(1), 1–11.

Hergüner, E. (2015). *Investigation of Fractional Black-Scholes Option and Approaches and Their*

Implementations [Master's Thesis]. Middle East Technical University.

Hull, J. (2012). *Options, Futures and Other Derivatives, eigth edn*. Pearson Education Limited, England.

KSEI. (2016). *KSEI as Securities Depository and Settlement Institution*. KSEI Indonesia Central Securities Depository. https://www.ksei.co.id/about?setLocale=en-US

Luenberger, D. (1998). *Investment Science*. Oxford University Press.

Mehrdoust, F., & Najafi, A. R. (2018). Pricing European Options under Fractional Black–Scholes Model with a Weak Payoff Function. *Computational Economics*, *52*(2), 685–706. https://doi.org/10.1007/s10614-017-9715-3

Murwaningtyas, C. E., Kartiko, S. H., Gunardi, & Suryawan, H. P. (2018). European option pricing by using a mixed fractional Brownian motion. *Journal of Physics: Conference Series*, *1097*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1097/1/012081

Nurahmad, K. P. (2024, October 11). *14 Juta Investor Pasar Modal: Sinergi, Inovasi Digital, dan Akses Informasi yang Kian Inklusif*. PT Bursa Efek Indonesia (IDX). https://www.idx.co.id/id/berita/siaran-pers/2234

Sabrina, F., Devianto, D., & Yanuar, F. (2020). PENENTUAN HARGA OPSI TIPE EROPA DENGAN MENGGUNAKAN MODEL BLACK SCHOLES FRAKSIONAL. *Jurnal Matematika UNAND*, *IX*(2), 154–161.

Shreve, E. S. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer.

Sidarto, K. A., Syamsuddin, M., & Sumarti, N. (2019). *Matematika Keuangan* (E. Warsidi, Ed.). ITB Press.

Suharyanti, D. (2014). *Penerapan Model Black Scholes Untuk Penentuan Harga Opsi Beli Tipe Eropa*. Universitas Brawijaya.

Tsay, R. S. (2005). Analysis of financial time series. *John Eiley and Sons*.