

ANALISIS DINAMIK MODEL MANGSA-PEMANGSA DENGAN PREDASI INTRAGUILD, PEMANENAN, DAN RESPON FUNGSIONAL BEDDINGTON-DEANGELIS

Lubabah Ghonim Umami Hajar

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : lubabahghonim.21028@mhs.unesa.ac.id

Abadi

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : abadi@unesa.ac.id

Abstrak

Penelitian ini membahas model dinamika populasi tiga spesies yang terdiri atas sumber daya, mangsa, dan pemangsa, dengan mempertimbangkan interaksi predasi, pemanenan, dan respon fungsional Beddington-DeAngelis. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menganalisis kestabilan sistem, mengidentifikasi titik kesetimbangan, dan mengevaluasi dampak dari variasi parameter terhadap dinamika populasi. Hasil analisis menunjukkan bahwa ketika $e_1 = 0.8$ dan $e_2 = 0.2$, titik kesetimbangan $E_0 = (0,0,0)$, $E_1 = (1,0,0)$, $E_2 = (x_1, y_1, 0)$, tidak stabil. Sedangkan, titik kesetimbangan $E_3 = (x_2, 0, z_2)$ tidak ada karena terdapat populasi yang negatif. Sementara itu, titik kesetimbangan hidup berdampingan $E^* = (x^*, y^*, z^*)$ adalah stabil asimtotik pada interval nilai parameter tingkat pemanenan terhadap mangsa $h_1 \in (0.13, 0.27)$. Namun, terjadi bifurkasi *Supercritical Hopf* pada $h_1 = 0.13$, yang menyebabkan perubahan dinamika populasi, di mana ketiga populasi, yakni sumber daya, mangsa, dan pemangsa, mengalami fluktuasi. Dengan kata lain, pertumbuhan ketiga populasi mengalami siklus yang berkala.

Kata Kunci: Analisis kestabilan, sistem mangsa-pemangsa, predasi intraguild, Beddington-DeAngelis.

Abstract

This study discusses a three-species population dynamics model consisting of a resource, prey, and predator, taking into account predation interactions, harvesting, and the Beddington-DeAngelis functional response. The aim of this study is to analyze the stability of the system, identify equilibrium points, and evaluate the impact of parameter variations on population dynamics. The results of the analysis show that when $e_1 = 0.8$ and $e_2 = 0.2$, the equilibrium points $E_0 = (0,0,0)$, $E_1 = (1,0,0)$, $E_2 = (x_1, y_1, 0)$, are unstable. Meanwhile, the equilibrium point $E_3 = (x_2, 0, z_2)$ does not exist because there is a negative event. Meanwhile, the equilibrium point of life $E^* = (x^*, y^*, z^*)$ is asymptotically stable in the interval of the parameter values of the level of harvesting against prey $h_1 \in (0.13, 0.27)$. However, a supercritical Hopf bifurcation occurs at $h_1 = 0.13$, leading to a change in population dynamics, where the resource, prey, and predator populations undergo fluctuations. In other words, the growth of all three populations follows a periodic cycle.

Keywords: Stability analysis, predator-prey system, intraguild predation, Beddington-DeAngelis.

PENDAHULUAN

Hubungan antar spesies maupun antar populasi merupakan fenomena yang tidak dapat dihindari dalam ekosistem alami. Salah satu bentuk interaksi antarspesies yang paling umum adalah sistem mangsa-pemangsa, yaitu ketika suatu spesies memangsa spesies lain. Interaksi ini disebut predasi dan menjadi fokus penting dalam studi ekologi (Hasting, 1997).

Model matematika sering digunakan untuk merepresentasikan dinamika interaksi ekologi, termasuk interaksi antara mangsa dan pemangsa.

Dalam lingkungan alami, populasi mangsa cenderung berfluktuasi, dan keberadaannya dapat menarik pemangsa untuk menetap. Respon pemangsa terhadap variasi kepadatan mangsa disebut respon fungsional, yang menggambarkan hubungan antara jumlah mangsa yang dikonsumsi dan kepadatan mangsa itu sendiri (Solomon, 1949). Salah satu bentuk respon fungsional yang lebih kompleks adalah respon Beddington-DeAngelis, yang mempertimbangkan pengaruh populasi pemangsa serta batas perlindungan lingkungan (Haque, 2011).

Selain faktor interaksi langsung, pemanenan merupakan aspek penting dalam studi ekologi karena dapat memengaruhi keseimbangan populasi. Pemanenan yang tidak terkendali berpotensi mengganggu hubungan antara spesies, menurunkan populasi, bahkan mengarah pada kepunahan. Oleh karena itu, upaya pemanenan konstan yang mempertimbangkan kapasitas regenerasi spesies perlu diterapkan untuk menjaga keseimbangan antara pemanfaatan dan konservasi (Blaber dkk., 2000).

Interaksi antara spesies dalam ekosistem sering kali lebih kompleks daripada hubungan predasi langsung. Salah satu bentuk interaksi kompleks tersebut adalah predasi intraguild, yaitu ketika dua spesies yang bersaing memperebutkan sumber daya yang sama, juga terlibat dalam hubungan pemangsa-mangsa (Holt & Polis, 1997). Dalam konteks ini, interaksi yang terjadi mencakup dua jenis sekaligus: kompetisi dan predasi.

Penelitian Ji & Wang (2022), mengkaji model predasi intraguild yang melibatkan tiga spesies: sumber daya, mangsa intraguild, dan pemangsa intraguild. Mereka menunjukkan bahwa model ini memungkinkan terjadinya koeksistensi antara mangsa dan pemangsa intraguild dalam kondisi tertentu, seperti keseimbangan interior yang stabil, siklus batas yang stabil, atau osilasi yang tidak teratur. Temuan ini mengindikasikan bahwa predasi intraguild dapat memperkuat keberlangsungan hidup spesies dan menyeimbangkan ekosistem (Ji & Wang, 2022).

Penelitian lain oleh Putra dkk. (2023) membahas model Lotka-Volterra dengan pemanenan linear pada mangsa dan pemangsa. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pemanenan memengaruhi kelestarian populasi. Jika tingkat pertumbuhan pemangsa lebih kecil daripada laju kematian dan pemanenan, maka kedua spesies berisiko punah. Sebaliknya, populasi akan bertahan jika pemanenan dikelola dengan baik (Putra dkk., 2023).

Penelitian ini mengembangkan model interaksi mangsa-pemangsa dengan predasi intraguild dan respon fungsional Beddington-DeAngelis, mengacu pada model Ji dan Wang (2022), dengan penambahan aspek pemanenan. Tujuan dari penelitian ini adalah mengembangkan model interaksi mangsa-pemangsa yang melibatkan predasi intraguild, respon fungsional Beddington-DeAngelis, dan

pemanenan, untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan serta menyimulasikan model untuk memahami kondisi di mana populasi tetap stabil atau mengalami perubahan.

KAJIAN TEORI

Sistem mangsa-pemangsa merupakan model dasar dalam ekologi matematika yang digunakan untuk menggambarkan interaksi antara populasi mangsa dan pemangsa. Salah satu model klasik yang banyak digunakan adalah model Lotka-Volterra, yang mengasumsikan bahwa populasi mangsa tumbuh secara eksponensial tanpa keberadaan pemangsa, sedangkan populasi pemangsa menurun secara eksponensial tanpa keberadaan mangsa. Interaksi pemangsaan kemudian memengaruhi dinamika kedua spesies tersebut. Model ini selanjutnya dikembangkan dengan menambahkan pertumbuhan logistik pada populasi mangsa (Boyce dkk., 2017).

Predasi intraguild (*intraguild predation*/IGP) merupakan bentuk interaksi ekologis yang menggabungkan predasi dan kompetisi secara simultan. Dalam IGP, pemangsa tidak hanya memangsa mangsanya, tetapi juga bersaing dengan mangsa tersebut dalam memanfaatkan sumber daya yang sama. Interaksi ini melibatkan tiga komponen utama, yaitu IG pemangsa, IG mangsa, dan sumber daya. IG pemangsa memangsa IG mangsa dan sumber daya, sedangkan IG mangsa hanya memanfaatkan sumber daya (Holt & Polis, 1997). Interaksi ini menghasilkan dinamika yang lebih kompleks dibandingkan model mangsa-pemangsa klasik karena adanya kombinasi antara kompetisi dan predasi.

Untuk menggambarkan dinamika yang lebih realistis, model juga mempertimbangkan *respon fungsional*, yaitu laju pemangsaan yang dipengaruhi tidak hanya oleh populasi mangsa, tetapi juga oleh kepadatan pemangsa. Salah satu bentuk respon fungsional tersebut adalah respon Beddington-DeAngelis (Beddington, 1975). Selain itu, faktor pemanenan juga diperhitungkan, khususnya pemanenan dengan upaya konstan, yaitu ketika hasil tangkapan per satuan waktu diasumsikan sebanding dengan ukuran populasi dan intensitas upaya, seperti jumlah kapal, alat, atau durasi penangkapan (Brauer & Castillo-Chavez, 2001).

Model matematika dari interaksi tersebut dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan

diferensial biasa (PDB). Secara umum, PDB berdimensi- n dituliskan dalam bentuk $\dot{x} = f(t, x)$, dengan x sebagai vektor keadaan dan f sebagai fungsi vektor. Jika fungsi-fungsi tersebut bersifat nonlinier, maka sistem disebut nonlinier. Titik kesetimbangan diperoleh dengan menyamakan seluruh turunan terhadap waktu menjadi nol (Boyce dkk., 2017). Untuk menganalisis kestabilannya, sistem dilinearisi di sekitar titik kesetimbangan menggunakan matriks Jacobian, kemudian dianalisis berdasarkan nilai-nilai eigennya. Nilai eigen dari Jacobian menentukan sifat kestabilan lokal, seperti simpul, pelana, atau spiral. Namun, jika nilai eigen sulit diperoleh, dapat digunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz yang mengevaluasi tanda koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung nilai eigen secara langsung (Murray, 2001).

Selain itu, perubahan perilaku sistem akibat variasi parameter dianalisis dengan bifurkasi, seperti bifurkasi *saddle-node*, *transcritical*, *pitchfork*, dan *hopf*. Analisis ini penting untuk memahami transisi dinamis dalam sistem populasi yang dipengaruhi oleh perubahan parameter lingkungan atau interaksi antarspesies (Strogatz, 2018).

HASIL DAN PEMBAHASAN

KONTRUKSI MODEL MANGSA-PEMANGSA DENGAN PREDASI INTRAGUILD, PEMANENAN DAN RESPON FUNGSIONAL BEDDINGTON-DEANGELIS.

Penelitian ini mengembangkan model interaksi mangsa-pemangsa dengan predasi intraguild dan respon fungsional Beddington-DeAngelis yang sebelumnya dikaji oleh Ji dan Wang (2022), dengan menambahkan aspek pemanenan seperti pada studi oleh Putra dkk. (2023). Model melibatkan tiga populasi, yaitu sumber daya (R), IG mangsa (N), dan IG pemangsa (P). Populasi sumber daya diasumsikan tumbuh secara logistik dan dimangsa oleh IG mangsa dan IG pemangsa mengikuti respon fungsional Beddington-DeAngelis yang mempertimbangkan faktor penanganan A_1 serta interferensi antar IG mangsa A_2 dan IG pemangsa A_3 . IG mangsa memakan sumber daya dengan laju serangan maksimum c_1 , sementara IG pemangsa memangsa baik sumber daya maupun IG mangsa, masing-masing dengan laju c_2 dan c_3 .

Efisiensi konversi biomassa dinyatakan melalui parameter ε_1 untuk IG mangsa dari sumber daya, ε_2

untuk IG pemangsa dari sumber daya, dan ε_3 untuk IG pemangsa dari IG mangsa. Selain bertumbuh, populasi IG mangsa dan IG pemangsa juga menurun akibat kematian alami dengan laju d_1 dan d_2 , serta akibat pemanenan dengan laju E_1 dan E_2 .

Hasil konstruksi model dalam penelitian ini adalah sistem dinamika tiga dimensi yang merepresentasikan interaksi mangsa-pemangsa dengan predasi intraguild, pemanenan, dan fungsi respon Beddington-DeAngelis, yang dirumuskan ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= r_1 R \left(1 - \frac{R}{K}\right) - \frac{c_1 RN + c_2 RP}{1 + A_1 R + A_2 N + A_3 P} \\ \frac{dN}{dt} &= \frac{\varepsilon_1 c_1 RN - c_3 NP}{1 + A_1 R + A_2 N + A_3 P} - d_1 N - E_1 N \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{\varepsilon_2 c_2 RP + \varepsilon_3 c_3 NP}{1 + A_1 R + A_2 N + A_3 P} - d_2 P - E_2 P\end{aligned}\quad (13)$$

Agar lebih mudah menentukan titik kesetimbangan, jumlah parameter dalam model (13) dapat dikurangi melalui penskalaan berikut:

$$x = \frac{R}{K}, y = \frac{Nc_1}{r_1}, z = \frac{Pc_2}{r_1}, \quad t = r_1 \tau$$

Selain itu, diperkenalkan pula parameter-parameter tak berdimensi baru sebagai berikut:

$$\begin{aligned}a &= A_1 K, b_1 = \frac{A_2 r_1}{c_1}, b_2 = \frac{A_3 r_2}{c_2}, e_1 = \frac{\varepsilon_1 c_1 K}{r_1}, \delta_1 = \frac{d_1}{r_1}, \\ c &= \frac{c_3}{c_2}, h_1 = \frac{E_1}{r_1}, e_2 = \frac{\varepsilon_2 c_2 K}{r_1}, \varepsilon = \frac{\varepsilon_3 c_2}{c_1}, \delta_2 = \frac{d_2}{r_1}, h_2 = \frac{E_2}{r_1}\end{aligned}$$

Diperoleh sistem nondimensional dari model (13) dengan penskalaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= x \left(1 - x - \frac{y + z}{1 + ax + b_1 y + b_2 z}\right) \\ \frac{dy}{d\tau} &= y \left(\frac{e_1 x - cz}{1 + ax + b_1 y + b_2 z} - \delta_1 - h_1\right) \\ \frac{dz}{d\tau} &= z \left(\frac{e_2 x + \varepsilon cy}{1 + ax + b_1 y + b_2 z} - \delta_2 - h_2\right)\end{aligned}\quad (14)$$

TITIK KESETIMBANGAN

Titik kesetimbangan diperoleh dari $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 0$, sehingga diperoleh 5 titik kesetimbangan sebagai berikut:

1. Titik kesetimbangan trivial $E_0 = (0,0,0)$
2. Titik kesetimbangan kepunahan IG mangsa dan IG pemangsa $E_1 = (1,0,0)$
3. Titik kesetimbangan kepunahan IG pemangsa $E_2 = (x_1, y_1, 0)$, di mana

$$x_1 = \frac{a\delta_1 + ah_1 + e_1 b_1 - e_1 + \sqrt{(-a\delta_1 - ah_1 - e_1 b_1 + e_1)^2 + 4(e_1 b_1 \delta_1 + e_1 b_1 h_1)}}{2e_1 b_1}$$

dan

$$y_1 = \frac{x_1(e_1 - a\delta_1 - ah_1) - \delta_1 - h_1}{b_1\delta_1 + b_1h_1}.$$

Titik kesetimbangan kepunahan IG pemangsa eksis ketika $e_1 > \frac{\delta_1 + h_1}{x_1} + a(\delta_1 + h_1)$.

4. Titik kesetimbangan kepunahan IG mangsa

$E_3 = (x_2, 0, z_2)$, di mana

$$x_2 = \frac{a\delta_2 + ah_2 + e_2b_2 - e_2 + \sqrt{(-a\delta_2 - ah_2 - e_2b_2 + e_2)^2 + 4(e_2b_2\delta_2 + e_2b_2h_2)}}{2e_2b_2}$$

dan

$$z_2 = \frac{x_1(e_2 - a\delta_2 - ah_2) - \delta_2 - h_2}{b_2\delta_2 + b_2h_2}.$$

Titik kesetimbangan kepunahan IG mangsa eksis ketika $e_2 > \frac{\delta_2 + h_2}{x_2} + a(\delta_2 + h_2)$.

5. Titik kesetimbangan hidup berdampingan $E^* = (x^*, y^*, z^*)$, di mana x^* adalah Solusi dari persamaan kuadrat berikut:

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

Dengan koefisien:

$$A = \varepsilon c^2 a - ce_2b_1 - \varepsilon ce_1b_2,$$

$$B = h_1e_2b_1 + \delta_1e_2b_1 - \delta_1e_2b_2 - h_1e_2b_2 + \delta_2e_1b_2 + h_2e_1b_2 + \varepsilon c^2 + \varepsilon ce_1 - ce_2 - \varepsilon c^2a - \varepsilon ca\delta_1 - \varepsilon cah_1 - \varepsilon ce_1b_2 + ac\delta_2 + ach_2 + ce_2b_1 - \delta_2e_1b_1 + h_2e_1b_1,$$

$$C = c\delta_2 + ch_2 - \varepsilon c^2 - \varepsilon c\delta_1 - \varepsilon ch_1,$$

Karena $\frac{C}{A} < 0$, maka hasil kali kedua akar bernilai negatif, sehingga dapat disimpulkan bahwa persamaan kuadrat tersebut memiliki tepat satu akar real positif. Akar real positif ini dinotasikan dengan x^* , yang kemudian digunakan untuk menentukan nilai y^* dan z^* melalui persamaan berikut:

$$y^* = \frac{x^*(\delta_1e_2b_2 + h_1e_2b_2 - ca\delta_1 - cah_1 + ce_2 - h_2e_1b_2 - \delta_2e_1b_2) - c\delta_1 - ch_1}{c(\delta_2b_1 + h_2b_1 - \varepsilon\delta_1b_2 + \varepsilon h_1b_2 - \varepsilon c)},$$

$$z^* = \frac{x^*(\delta_2e_1b_1 + h_2e_1b_1 + \varepsilon ca\delta_1 + \varepsilon cah_1 - \varepsilon ce_1 - h_1e_2b_1 - \delta_1e_2b_1) + \varepsilon c\delta_1 + \varepsilon ch_1}{c(\delta_2b_1 + h_2b_1 - \varepsilon\delta_1b_2 + \varepsilon h_1b_2 - \varepsilon c)}$$

ANALISIS KESTABILAN

Analisis kestabilan titik kesetimbangan dilakukan dengan melakukan linearisasi sistem persamaan .. di sekitar titik kesetimbangan dengan menentukan nilai eigennya. Melalui cara ini, dapat diketahui sifat kestabilan lokal dari masing-masing titik kesetimbangan. Matriks Jacobian yang diperoleh merupakan hasil dari proses linearisasi sistem (13) sebagai berikut:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (15)$$

di mana,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 - 2x - \frac{(1 + b_1y + b_2z)(y + z)}{(1 + ax + b_1y + b_2z)^2} = J_{11},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{x(1 + ax) + xz(b_2 - b_1)}{(1 + ax + b_1y + b_2z)^2} = J_{12},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = -\frac{x(1 + ax) + xy(b_1 - b_2)}{(1 + ax + b_1y + b_2z)^2} = J_{13},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{e_1y(1 + b_1y) + yz(b_2e_1 - ac)}{(1 + ax + b_1y + b_2z)^2} = J_{21},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{(e_1x - cz)(1 + ax + b_2z)}{(1 + ax + b_1y + b_2z)^2} - \delta_1 - h_1 = J_{22},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = -\frac{cy(1 + b_1y) + xy(b_2e_1 + ac)}{(1 + ax + b_1y + b_2z)^2} = J_{23},$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{e_2z(1 + b_1y + b_2z) - a\epsilon cyz}{(1 + ax + b_1y + b_2z)^2} = J_{31},$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\epsilon cz(1 + b_2z) + xz(a\epsilon c - b_1e_2)}{(1 + ax + b_1y + b_2z)^2} = J_{32},$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{(e_2x + \epsilon cy)(1 + ax + b_1y)}{(1 + ax + b_1y + b_2z)^2} - \delta_2 - h_2 = J_{33}.$$

Selanjutnya, dilakukan analisis kestabilan di tiap titik kesetimbangan sistem (13) dengan mensubstitusikan tiap titik kesetimbangan ke dalam matriks Jacobian (15)

1. Kestabilan di titik kesetimbangan trivial E_0
Substitusi matriks Jacobian di titik E_0 , sehingga diperoleh

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_1 - h_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2 - h_2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Dari matriks Jacobian (16) diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\delta_1 - h_1$, $\lambda_3 = -\delta_2 - h_2$ sehingga dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan E_0 tidak stabil dan merupakan titik pelana

2. Kestabilan kepunahan IG mangsa dan IG pemangsa E_1
Substitusi matriks Jacobian di titik E_1 , sehingga diperoleh

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{1+a} & -\frac{1}{1+a} \\ 0 & \frac{e_1}{1+a} - \delta_1 - h_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e_2}{1+a} - \delta_2 - h_2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Dari matriks Jacobian (17) diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{e_1}{1+a} - \delta_1 - h_1$, $\lambda_3 = \frac{e_2}{1+a} - \delta_2 - h_2$ sehingga dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan E_1 merupakan titik simpul dan stabil asimtotik jika $e_1 < (\delta_1 + h_1)(1 + a)$ dan $e_2 < (\delta_2 + h_2)(1 + a)$.

3. Kestabilan di titik kesetimbangan kepunahan IG pemangsa E_2
Substitusi matriks Jacobian di titik E_2 , sehingga diperoleh

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} J_{11}^1 & J_{12}^1 & J_{13}^1 \\ J_{21}^1 & J_{22}^1 & J_{23}^1 \\ 0 & 0 & J_{33}^1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

di mana,

$$\begin{aligned} J_{11}^1 &= 1 - 2x_1 - \frac{y_1(1 + b_1y_1)}{(1 + ax_1 + b_1y_1)^2}, \\ J_{12}^1 &= -\frac{x_1(1 + ax_1)}{(1 + ax_1 + b_1y_1)^2}, \\ J_{13}^1 &= -\frac{x_1(1 + ax_1) + x_1y_1(b_1 - b_2)}{(1 + ax_1 + b_1y_1)^2}, \\ J_{21}^1 &= \frac{e_1y_1(1 + b_1y_1)}{(1 + ax_1 + b_1y_1)^2}, \\ J_{22}^1 &= \frac{e_1x_1(1 + ax_1)}{(1 + ax_1 + b_1y_1)^2} - \delta_1 - h_1, \\ J_{23}^1 &= -\frac{cy_1(1 + b_1y_1) + x_1y_1(b_2e_1 + ac)}{(1 + ax_1 + b_1y_1)^2}, \\ J_{33}^1 &= \frac{(e_2x_1 + \varepsilon cy_1)(1 + ax_1 + b_1y_1)}{(1 + ax_1 + b_1y_1)^2} - \delta_2 - h_2 \end{aligned}$$

Nilai eigen dari matriks Jacobian (18) merupakan penyelesaian dari persamaan $Det(J(E_2) - \lambda I) = 0$ yang menghasilkan persamaan karakteristik $\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = 0$ di mana,

$$\begin{aligned} p_1 &= -(J_{11}^1 + J_{22}^1 + J_{33}^1) \\ p_2 &= J_{11}^1J_{22}^1 + J_{11}^1J_{33}^1 + J_{22}^1J_{33}^1 - J_{12}^1J_{21}^1 \\ p_3 &= J_{11}^1J_{22}^1J_{33}^1 - J_{33}^1J_{12}^1J_{21}^1 \end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, titik kesetimbangan E_2 stabil asimtotik ketika $p_1 > 0, p_1p_2 - p_3 > 0, p_3 > 0$.

4. Kestabilan di titik kesetimbangan kepunahan IG mangsa E_3
Substitusi matriks Jacobian di titik E_3 , sehingga diperoleh

$$J(E_3) = \begin{pmatrix} J_{11}^2 & J_{12}^2 & J_{13}^2 \\ 0 & J_{22}^2 & 0 \\ J_{31}^2 & J_{32}^2 & J_{33}^2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

di mana,

$$\begin{aligned} J_{11}^2 &= 1 - 2x_2 - \frac{z_2(1 + b_2z_2)}{(1 + ax_2 + b_2z_2)^2}, \\ J_{12}^2 &= -\frac{x_2(1 + ax_2) + x_2z_2(b_2 - b_1)}{(1 + ax_2 + b_2z_2)^2}, \\ J_{13}^2 &= -\frac{x_2(1 + ax_1)}{(1 + ax_2 + b_2z_2)^2}, \\ J_{22}^2 &= \frac{(e_1x_2 - cz_2)(1 + ax_2 + b_2z_2)}{(1 + ax_2 + b_2z_2)^2} - \delta_1 - h_1, \\ J_{31}^2 &= \frac{e_2z_2(1 + b_2z_2)}{(1 + ax_2 + b_2z_2)^2}, \\ J_{32}^2 &= \frac{\varepsilon cz_2(1 + b_2z_2) + x_2z_2(a\varepsilon c - b_1e_2)}{(1 + ax_2 + b_2z_2)^2}, \\ J_{33}^2 &= \frac{e_2x_2(1 + ax_2)}{(1 + ax_2 + b_2z_2)^2} - \delta_2 - h_2 \end{aligned}$$

Nilai eigen dari matriks Jacobian (19) merupakan penyelesaian dari persamaan $Det(J(E_3) - \lambda I) = 0$ yang menghasilkan persamaan karakteristik $\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = 0$ di mana,

$$\begin{aligned} p_1 &= -(J_{11}^2 + J_{22}^2 + J_{33}^2) \\ p_2 &= J_{11}^2J_{22}^2 + J_{11}^2J_{33}^2 + J_{22}^2J_{33}^2 - J_{13}^2J_{31}^2 \\ p_3 &= J_{11}^2J_{22}^2J_{33}^2 - J_{13}^2J_{22}^2J_{31}^2 \end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, titik kesetimbangan E_3 stabil asimtotik ketika $p_1 > 0, p_1p_2 - p_3 > 0, p_3 > 0$.

5. Kestabilan di titik kesetimbangan hidup berdampingan E^*
Substitusi matriks Jacobian di titik E^* sehingga diperoleh

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* \end{pmatrix} \quad (20)$$

di mana,

$$\begin{aligned} J_{11}^* &= \frac{ax^*(1 - x^*)}{1 + ax^* + b_1y^* + b_2z^*} - x^*, \\ J_{12}^* &= \frac{b_1x^*(1 - x^*) - x^*}{1 + ax^* + b_1y^* + b_2z^*}, \\ J_{13}^* &= \frac{b_2x^*(1 - x^*) - x^*}{1 + ax^* + b_1y^* + b_2z^*}, \\ J_{21}^* &= \frac{y^*(e_1 - a\delta_1 - ah_1)}{1 + ax^* + b_1y^* + b_2z^*}, \\ J_{22}^* &= -\frac{b_1y^*(\delta_1 + h_1)}{1 + ax^* + b_1y^* + b_2z^*}, \\ J_{23}^* &= \frac{-y^*(c + b_2(\delta_1 + h_1))}{1 + ax^* + b_1y^* + b_2z^*}, \\ J_{31}^* &= \frac{z^*(e_2 - a\delta_2 - ah_2)}{1 + ax^* + b_1y^* + b_2z^*}, \\ J_{32}^* &= \frac{z^*(\varepsilon c - b_1(\delta_2 + h_2))}{1 + ax^* + b_1y^* + b_2z^*}, \\ J_{33}^* &= -\frac{b_2z^*(\delta_2 + h_2)}{1 + ax^* + b_1y^* + b_2z^*} \end{aligned}$$

Nilai eigen dari matriks Jacobian (20) merupakan penyelesaian dari persamaan $Det(J(E^*) - \lambda I) = 0$ yang menghasilkan persamaan karakteristik $\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = 0$ di mana,

$$\begin{aligned} p_1 &= -(J_{11}^* + J_{22}^* + J_{33}^*) \\ p_2 &= J_{11}^*J_{22}^* + J_{11}^*J_{33}^* + J_{22}^*J_{33}^* - J_{12}^*J_{21}^* - J_{13}^*J_{31}^* - J_{23}^*J_{32}^* \\ p_3 &= J_{11}^*J_{22}^*J_{33}^* + J_{12}^*J_{31}^*J_{23}^* + J_{21}^*J_{13}^*J_{32}^* - J_{13}^*J_{22}^*J_{31}^* - \\ &\quad J_{11}^*J_{23}^*J_{32}^* - J_{33}^*J_{12}^*J_{21}^* \end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, titik kesetimbangan E^* stabil asimtotik ketika $p_1 > 0, p_1p_2 - p_3 > 0, p_3 > 0$.

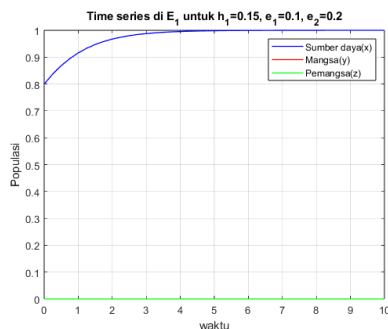
SIMULASI NUMERIK

Untuk mengevaluasi kesesuaian antara hasil analitik dan numerik, dilakukan simulasi numerik. Rincian nilai parameter ditampilkan pada Tabel berikut:

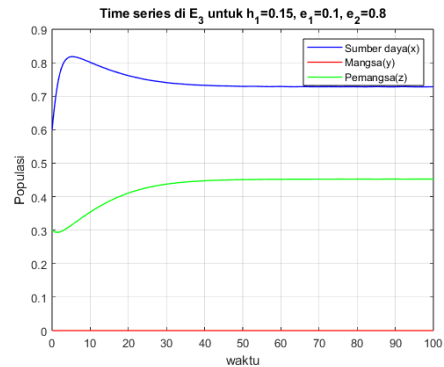
Tabel 1. Nilai Parameter

Parameter	Keterangan	Nilai	Sumber
a	Faktor penanganan	0.9	Asumsi
b_1	Efek interferensi antar IG mangsa	0.45	(Ji & Wang, 2022)
b_2	Efek interferensi antar IG pemangsa	0.02	(Ji & Wang, 2022)
c	Tingkat tekanan predasi	0.2	Asumsi
ε	Efisiensi konversi biomassa IG pemangsa dari IG mangsa	6	Asumsi
d_1	Tingkat kematian IG mangsa	0.05	Asumsi
d_2	Tingkat kematian IG pemangsa	0.3	(Ji & Wang, 2022)
h_2	Tingkat pemanenan IG mangsa	0.15	Asumsi
h_2	Tingkat pemanenan IG pemangsa	0.05	(Putra dkk., 2023)

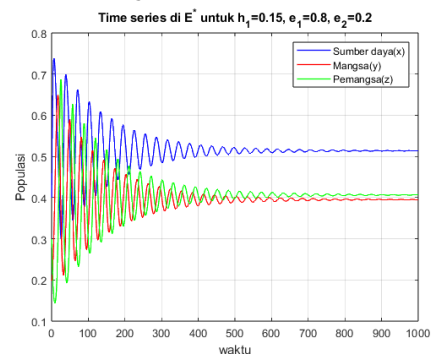
Simulasi dilakukan untuk nilai parameter $h_1 = 0.15$ dengan nilai parameter pada Tabel 2 dan dipilih nilai efisiensi konversi biomassa IG mangsa dan IG pemangsa berbeda sesuai dengan syarat kestabilan $E_1 = (1,0,0)$ yaitu misalkan $e_1 = 0.1$ untuk nilai $e_1 < 0.38$, $e_1 = 0.8$ untuk nilai $e_1 > 0.38$, $e_2 = 0.2$ untuk nilai $e_2 < 0.665$, dan $e_2 = 0.8$ untuk nilai $e_2 > 0.665$.

**Gambar 1.** Simulasi numerik sistem (14) dengan $e_1 = 0.1$ dan $e_2 = 0.2$ terhadap waktu t

Gambar 5 menunjukkan bahwa ketika sistem (14) dengan kasus parameter $e_1 = 0.1$ dan $e_2 = 0.2$, titik kesetimbangan kepunahan IG mangsa dan IG pemangsa stabil asimtotik yang ditandai dengan grafik yang konvergen ke $E_1 = (1,0,0)$.

**Gambar 2.** Simulasi numerik sistem (14) dengan $e_1 = 0.1$ dan $e_2 = 0.8$ terhadap waktu t

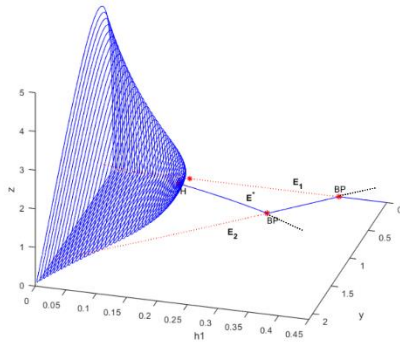
Gambar 6 menunjukkan bahwa ketika sistem (14) dengan kasus parameter $e_1 = 0.1$ dan $e_2 = 0.8$, titik kesetimbangan kepunahan IG mangsa E_3 stabil asimtotik yang ditandai dengan grafik yang konvergen ke titik $E_3 = (0.7,0,0.45)$.

**Gambar 3.** Simulasi numerik sistem (13) dengan $e_1 = 0.8$ dan $e_2 = 0.2$ terhadap waktu t

Gambar 7 menunjukkan bahwa ketika sistem (14) dengan kasus parameter $e_1 = 0.8$ dan $e_2 = 0.2$, titik kesetimbangan hidup berdampingan E^* stabil asimtotik yang ditandai dengan grafik yang konvergen ke titik $E^* = (0.5, 0.3, 0.4)$.

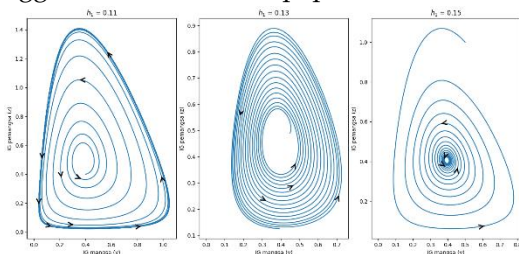
Dari simulasi yang telah dilakukan, terdapat perubahan kestabilan pada sistem yang menunjukkan terjadinya bifurkasi pada parameter h_1 yaitu tingkat pemanenan pada IG mangsa. Garis tegas dan garis terputus-putus masing-masing merepresentasikan kondisi stabil dan tidak stabil. Sementara itu, garis putus-putus berwarna hitam merepresentasikan solusi yang tidak stabil dan memiliki nilai negatif, yang tidak bermakna secara biologis. Titik H menandai terjadinya bifurkasi

Supercritical Hopf, sementara BP (Branch Point) menunjukkan terjadinya bifurkasi Transcritical.



Gambar 4. Bifurkasi dengan parameter h_1

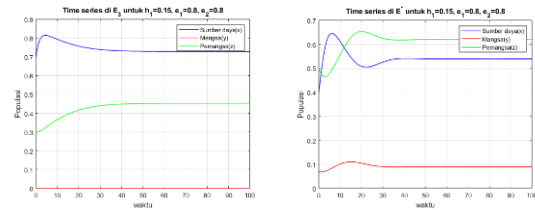
Gambar 8 menunjukkan bahwa perubahan parameter h_1 (tingkat pemanenan IG mangsa) menyebabkan perubahan kestabilan sistem, yang ditandai dengan munculnya bifurkasi. Ditemukan dua titik bifurkasi transkritikal (BP) pada $h_1 = 0.27$ dan $h_1 = 0.37$, serta satu bifurkasi Hopf superkritik pada $h_1 = 0.13$. Sistem mengalami perubahan stabilitas pada titik-titik kesetimbangan tertentu. Titik kepunahan IG mangsa dan pemangsa E_1 menjadi stabil setelah $h_1 > 0.37$, sedangkan titik kepunahan IG pemangsa E_2 stabil pada interval $h_1 = (0.27, 0.37)$. Titik kesetimbangan hidup berdampingan E^* stabil pada interval $h_1 = (0.13, 0.27)$ dan hilang saat $h_1 > 0.27$. Ketika $h_1 < 0.13$ sistem menunjukkan orbit periodik stabil yang menggambarkan fluktuasi populasi.



Gambar 5. Potret fase sistem (13) untuk berbagai nilai parameter h_1

Potret fase pada Gambar 9 menunjukkan perubahan dinamika sistem seiring variasi nilai h_1 . Pada $h_1 = 0.11$, sistem membentuk orbit periodik stabil yang mencerminkan fluktuasi populasi akibat rendahnya tingkat pemanenan IG mangsa. Saat h_1 meningkat ke 0.13, terjadi bifurkasi Hopf yang mengubah sistem dari tidak stabil menjadi stabil, menunjukkan tingkat pemanenan IG mangsa mulai

menstabilkan populasi. Pada $h_1 = 0.15$, lintasan spiral masuk ke titik kesetimbangan, menandakan kestabilan asimtotik.



Gambar 6. Simulasi numerik sistem (13) dengan $e_1 = 0.8$ dan $e_2 = 0.8$ terhadap waktu t

Gambar 10 menunjukkan bahwa ketika sistem (14) dengan kasus parameter $e_1 = 0.8$ dan $e_2 = 0.8$, titik kesetimbangan kepunahan IG mangsa, sistem stabil asimtotik yang ditandai dengan grafik yang konvergen ke titik $E_3 = (0.7, 0, 0.45)$. Adapun, titik kesetimbangan hidup berdampingan, sistem stabil asimtotik yang ditandai dengan grafik yang konvergen ke titik $E^* = (0.5, 0.08, 0.6)$.

PENUTUP

SIMPULAN

Penelitian ini mengkonstruksi model matematika sistem mangsa-pemangsa dengan predasi intraguild, respon fungsional Beddington-DeAngelis, dan pemanenan. Model awal yang melibatkan tiga populasi (sumber daya R , IG mangsa N , dan IG pemangsa P) disederhanakan melalui penskalaan menjadi sistem tiga dimensi dengan variabel x, y , dan z . Model hasil penskalaan memiliki lima titik kesetimbangan yang dianalisis kestabilannya menggunakan matriks Jacobian dan kriteria Routh-Hurwitz.

Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa kestabilan titik-titik kesetimbangan sangat dipengaruhi oleh variasi parameter efisiensi konversi energi (e_1 dan e_2) dan tingkat pemanenan (h_1). Hasil simulasi menunjukkan bahwa:

1. Pada kasus nilai parameter $e_1 = 0.1$ dan $e_2 = 0.2$, hanya titik kesetimbangan $E_1 = (1, 0, 0)$ yang stabil, titik lainnya tidak eksis.
2. Pada kasus nilai parameter $e_1 = 0.1$ dan $e_2 = 0.8$, hanya titik kesetimbangan E_3 yang stabil.
3. Pada kasus nilai parameter $e_1 = 0.8$ dan $e_2 = 0.2$, titik hidup berdampingan E^* stabil saat $h_1 \in (0.13, 0.27)$. Selain itu, saat $h_1 \in$

(0,0.13) terjadi osilasi populasi ketiga spesies secara berkala.

4. Pada kasus nilai parameter $e_1 = 0.8$ dan $e_2 = 0.8$, titik kesetimbangan E_3 dan E^* adalah stabil, sedangkan titik lainnya tidak stabil.

Secara umum, model ini menunjukkan bahwa parameter konversi dan pemanenan berperan penting dalam menentukan eksistensi dan stabilitas populasi mangsa dan pemangsa dalam sistem ekologi yang kompleks.

SARAN

Penelitian ini difokuskan pada simulasi pengaruh variasi tingkat pemanenan IG mangsa (h_1) terhadap dinamika sistem. Untuk pengembangan lebih lanjut, disarankan agar dilakukan analisis sensitivitas parameter guna mengidentifikasi parameter-parameter yang paling berpengaruh terhadap kestabilan dan keberlanjutan sistem. Hasil analisis ini akan memberikan landasan yang lebih kuat dalam pengambilan keputusan pengelolaan sumber daya alam secara berkelanjutan.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Elementary Linear Algebra*. www.wiley.com/college/anton.
- Beddington, J. R. (1975). Mutual Interference Between Parasites or Predators and its Effect on Searching Efficiency. *Journal of Animal Ecology*.
- Blaber, S. J. M., Cyrus, D. P., Chong, V. C., & Albaret, J. J. (2000). Effects of fishing on the structure and functioning of estuarine and nearshore ecosystems. *ICES Journal of Marine Science*.
- Boyce, W. E., Di Prima, R. C., & Meade, D. B. (2017). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. www.wileyplus.com
- Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2001). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer New York. <https://books.google.co.id/books?id=ahhhwB72JUgC>
- Haque, M. (2011). A Detailed Study of The Beddington-DeAngelis Predator-Prey Model. *Mathematical Biosciences*.
- Hasting, A. (1997). *Population Biology: Concepts and Models* (1st ed.). Springer.
- Holling, C. S. (1959). Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism. *The Canadian Entomologist*, 91(7).
- Holt, R. D., & Polis, G. A. (1997). A Theoretical Framework for Intraguild Predation. *The American Naturalist*.
- Ji, J., & Wang, L. (2022). Competitive exclusion and coexistence in an intraguild predation model with Beddington-DeAngelis functional response. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*.
- Murray, J. D. (2001). *Mathematical Biology I: an Introduction* (3 ed.). Springer, Berlin.
- Putra, M. A. J. D., Firdaus, E. M., & Findasari. (2023). Analisis Dinamika Model Predator-Prey dengan Pemanenan Linear pada Kedua Populasi. *Jurnal Ilmu Komputer dan Matematika*.
- Solomon, M. E. (1949). The Natural Control of Animal. *Journal of Animal Ecology*.
- Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear Dynamics And Chaos*.