MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 13 *No* 03
Tahun 2025

BILANGAN DOMINASI DARI BEBERAPA GRAF

Afrah Meigita Maulida
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
email : afrahmeigita.21054@mhs.unesa.ac.id

Budi Rahadjeng
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
email : budirahadjeng@unesa.ac.id

Abstrak

Penelitian ini membahas tentang bilangan dominasi dari beberapa jenis graf, yaitu graf lintasan, graf sikel, graf kipas, graf kembang api, graf ular berlian, graf pohon kelapa, dan graf pohon pisang. Bilangan dominasi dari graf G, dilambangkan dengan $\gamma(G)$, adalah kardinalitas minimum himpunan pendominasi G. Hasil dari penelitian ini adalah bilangan dominasi dari graf lintasan P_m yaitu $\gamma(P_m) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$, bilangan dominasi dari graf sikel C_n yaitu $\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$, selanjutnya diperoleh bilangan dominasi dari graf kipas $F_{p,m}$ yaitu $\gamma(F_{p,m}) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$, bilangan dominasi dari graf kembang api $F_{n,k}$ yaitu $\gamma(F_{n,k}) = n$, selain itu didapatkan juga bilangan dominasi dari graf ular berlian D_m yaitu $\gamma(D_m) \le m$, bilangan dominasi dari graf pohon kelapa $CT(m,n)$ yaitu $\gamma(CT(m,n)) = 1 + \left\lceil \frac{m-2}{3} \right\rceil$, dan yang terakhir adalah bilangan dominasi dari graf pohon pisang $B(m,k)$ yaitu $\gamma(B(m,k)) \le m + 1$.

Kata kunci: Himpunan pendominasi, Bilangan dominasi, Graf lintasan, Graf sikel, Graf kipas, Graf kembang api, Graf ular berlian, Graf pohon kelapa, dan Graf pohon pisang.

Abstract

This research discusses the domination numbers of several types of graphs, namely path graph, cycle graph, fan graph, firework graph, diamond snake graph, coconut tree graph, and banana tree graph. The domination number of a graph G, denoted by $\gamma(G)$, is the minimum cardinality of the dominating set of G. The result of this research is the domination number of the path graph P_m which is $\gamma(P_m) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$, the domination number of the cycle graph C_n which is $\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Furthermore, the domination number of the fan graph $F_{p,m}$ which is $\gamma(F_{p,m}) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$, the domination number of the firework graph $F_{n,k}$ which is $\gamma(F_{n,k}) = n$, in addition, the domination number of the diamond snake graph D_m is $\gamma(D_m) \le m$, the domination number of the coconut tree graph $CT(m,n)$ is $\gamma(CT(m,n)) = 1 + \left\lceil \frac{m-2}{3} \right\rceil$, and the last is the domination number of banana tree graph $B(m,k)$ which is $\gamma(B(m,k)) \le m + 1$.

Keywords: *Dominating set, Dominating number, Path graph, Cycle graph, Fan graph, Fireworks graph, Diamond snake graph, Coconut tree graph, and Banana tree graph.*

PENDAHULUAN

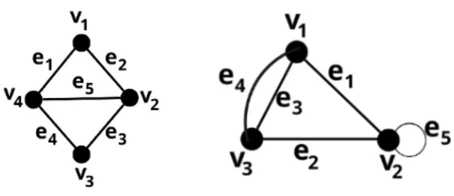
Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 untuk menyelesaikan masalah Jembatan Königsberg. Teori graf digunakan untuk memodelkan berbagai permasalahan kompleks dalam kehidupan sehari-hari, mulai dari jaringan internet hingga sistem pengawasan. Salah satu konsep penting dalam teori graf adalah himpunan pendominasi, yaitu sekelompok titik dalam graf yang mampu mengawasi atau mendominasi titik-titik lainnya. Konsep ini memiliki banyak aplikasi, seperti dalam penempatan CCTV, jaringan sensor nirkabel, dan sistem pemantauan lalu lintas. Beberapa penelitian sebelumnya menunjukkan bahwa penerapan himpunan pendominasi dapat meningkatkan efisiensi sistem, misalnya dalam pengurangan titik kebocoran pipa air atau penempatan alat pemantau ETLE. Bilangan dominasi adalah jumlah minimum titik pendominasi. Fokus dari penelitian ini adalah menentukan bilangan dominasi dari beberapa jenis graf, yaitu graf lintasan, graf sikel, graf kipas, graf kembang api, graf ular berlian, graf pohon kelapa, dan graf pohon pisang. Penelitian ini bertujuan untuk memberikan pemahaman lebih dalam mengenai bilangan dominasi serta memberikan kontribusi bagi pengembangan teori graf secara teoritis.

KAJIAN TEORI

Konsep Graf

Graf G terdiri dari dua himpunan, yaitu himpunan hingga tak kosong $V(G)$ yang berisi titik-titik *(vertex)*, dan himpunan hingga $E(G)$yang berisi sisi-sisi *(edge)*, di mana setiap sisi merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik dalam $V(G)$. Titik-titik yang dihubungkan oleh sisi dikatakan saling berhubungan langsung *(adjacent)*, dan sisi tersebut dikatakan menghubungkan *(joining)* serta terkait *(incident)* dengan titik-titik tersebut. Representasi graf secara visual digambarkan dengan noktah untuk titik dan kurva sederhana (biasanya ruas garis) untuk sisi yang menghubungkan dua titik. Sisi yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri disebut gelung *(loop)*, sedangkan jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik yang sama, maka sisi tersebut disebut sisi rangkap atau sisi ganda (Budayasa, 2007).

Contoh:



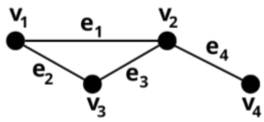
G H

Gambar 2. 1 Graf G dan H

Gambar 2.1. Sisi e_5 di graf H adalah gelung. Sisi e_3 dan e_4 di graf H adalah multi sisi. Graf yang tidak memiliki gelung atau sisi rangkap disebut graf sederhana. Graf G merupakan graf sederhana, dan graf H bukan graf sederhana.

Titik $u \in V(G)$ bertetangga dengan titik $v \in V(G)$ jika ada sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut. Himpunan tetangga dari titik v disebut persekitaran terbuka dari v dinotasikan dengan $N_G(v)$, atau $N(v)$. Himpunan $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ disebut persekitaran tertutup dari v (Chartrand dkk., 2016).

Contoh:



Gambar 2. 1 Graf G

Berdasarkan hubungan tetangga di graf G , didapatkan himpunan $N(v)$ dan $N[v]$dari setiap titik sebagai berikut:

- $N(v_1) = \{v_2, v_3\}$ dan $N[v_1] = N(v_1) \cup \{v_1\} = \{v_1, v_2, v_3\}$
- $N(v_2) = \{v_1, v_3, v_4\}$ dan $N[v_2] = N(v_2) \cup \{v_2\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
- $N(v_3) = \{v_1, v_2\}$ dan $N[v_3] = N(v_3) \cup \{v_3\} = \{v_1, v_2, v_3\}$
- $N(v_4) = \{v_2\}$ dan $N[v_4] = N(v_4) \cup \{v_4\} = \{v_2, v_4\}$

Derajat Titik Graf

Derajat titik v di G, dinotasikan dengan $d_G(v)$ atau $d(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait dengan titik v (dengan catatan setiap gelung dihitung dua kali) (Budayasa, 2007).

Graf Lengkap

Graf lengkap *(complete graf)* dengan p titik dinotasikan dengan K_p , adalah graf sederhana dengan p titik dan setiap dua titik berbeda dihubungkan dengan sisi (Budayasa, 2007).

Graf Bipartit

Graf G disebut graf bipartit jika himpunan titiknya dapat dibagi menjadi dua himpunan, A dan B , sehingga setiap sisi graf menghubungkan satu titik di A dengan satu titik di B, dan dinotasikan dengan $K_{m,n}$ (Budayasa, 2007).

Jalan Jejak, Lintasan, Sirkuit, Sikel

Jalan *(walk)* di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong) $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$, suku-sukunya bergantian titik dan sisi. Katakan W adalah jalan dari titik v_0 ke titik v_k, atau jalan – (v_0, v_k). Titik v_0 dan titik v_k berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir W. Sedangkan titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ disebut titik-titik internal W; dan k disebut panjang jalan W. Perhatikan bahwa panjang jalan W adalah banyaknya sisi dalam W. Jika semua sisi $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ dalam jalan W berbeda, maka W disebut jejak *(trail)*. Jika semua titik $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ dalam jalan W juga berbeda, maka W disebut lintasan *(path)*. jalan W dengan panjang positif disebut tertutup, jika titik awal dan titik akhir dari W identik (sama). Jejak tutup disebut sirkuit. sirkuit di graf G yang memuat semua sisi G disebut sirkuit *Euler*. Graf yang memuat sirkuit *Euler* disebut graf *Euler*. Sikel *(cycle)* adalah jejak tertutup *(closed trail)* yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda. Banyaknya sisi dalam suatu sikel disebut panjang dari sikel tersebut. Sikel dengan panjang k disebut sikel$-k$, disimbolkan dengan C_k (Budayasa, 2007).

Penjumlahan Graf

Jumlahan graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1)$ dan $v \in V(G_2)\}$ (Chartrand & Lesniak, 1986).

Komplemen Graf

Komplemen graf yang dinotasikan dengan $\bar{G}$ adalah graf sederhana yang himpunan titiknya sama dengan himpunan titik dari graf G dan dua titik u dan v di $\bar{G}$ berhubungan langsung jika dan hanya jika di graf G titik u dan v tidak berhubungan langsung (Budayasa, 2007).

Graf Kipas

Graf kipas $F_{p,m} = \overline{K_p} + P_m$, di mana $\overline{K_p}$ adalah graf kosong (terdiri dari p titik yang terisolasi tanpa sisi) dan P_m adalah graf lintasan dengan m titik (Sugumaran & Jayachandran, 2018).

Graf Ular Berlian

Graf ular berlian dengan panjang m, dinotasikan dengan D_m, adalah graf yang dibentuk dari lintasan P_m dengan mengganti setiap sisinya menjadi sikel C_4, di mana setiap C_4 saling berbagi satu titik secara berurutan, membentuk rantai menyerupai berlian (Chartrand & Zhang, 2012).

Graf Bintang

Graf bintang S_k adalah graf yang terdiri dari k buah titik, dengan satu titik berderajat $k-1$, yang dinamakan titik pusat, serta $k-1$ titik berderajat satu, dinamakan daun (Saifudin dkk., 2024).

Graf Pohon Pisang

Pohon pisang $B(m,k)$ adalah graf dengan $(mk) + 1$ titik dan mk sisi, dibentuk dengan menghubungkan satu daun dari masing-masing m salinan graf bintang S_k ke titik akar $'v'$. Titik liontin disebut daun-daun pohon (Sugumaran & Jayachandran, 2018).

Graf Pohon Kelapa

Pohon Kelapa $CT(m,n)$ adalah graf yang diperoleh dari lintasan P_m dengan menambahkan $'n'$ titik-titik liontin baru di titik akhir dari P_m (Sugumaran & Jayachandran, 2018).

Graf Kembang Api

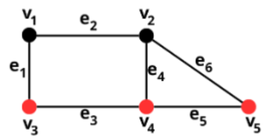
Graf kembang api $F_{n,k}$ adalah graf yang diperolah dari n buah graf bintang S_k dengan cara menghubungkan sebuah daun dari setiap S_k melalui sebuah lintasan (Saifudin dkk., 2024).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 3.1

Himpunan tak $S \subset V(G)$ disebut himpunan pendominasi G jika setiap titik di G didominasi oleh setidaknya satu titik dari S. Bilangan pendominasi G yang dilambangkan dengan $\gamma(G)$, didefinisikan sebagai berikut, $\gamma(G) = minimum\ \{|S| \mid S$ himpunan pendominasi G$\}$(Chartrand dkk., 2016).

Contoh:
Perhatikan Gambar 3.1



Gambar 3. 1 Graf G

Himpunan $S_1 = \{v_1, v_2\}$ adalah himpunan pendominasi graf G, karena setiap titik di G didominasi oleh setidaknya satu titik di S_1. Titik v_1

didominasi oleh titik v_2, titik v_2 didominasi oleh titik v_1, titik v_3 didominasi oleh titik v_1, titik v_4 dan titik v_5 didominasi oleh titik v_2. Selanjutnya himpunan $S_2 = \{v_1, v_2, v_4\}$ juga merupakan himpunan pendominasi graf G, Misalkan himpunan $S_3 = \{v_4\}$ bukan himpunan pendominasi G karena ada titik pada graf G yang tidak didominasi oleh himpunan S_3 yaitu titik v_1.

Teorema 3.1

Jika G adalah graf dengan n titik dan derajat maksimum (Δ), maka

$$\gamma(G) \geq \frac{n}{1+\Delta(G)}$$

Bukti

Karena untuk $\forall\, v \in V(G)$, v mendominasi $N[v]$. Padahal $|N[v]| = d(v) + 1 \leq \Delta + 1$. diketahui bahwa $|V(G)| = n$, maka berdasarkan Definisi 3.1 diperoleh,

$$\gamma(G) \geq \frac{n}{1+\Delta}$$

Karena $\gamma(G) \in Z^+$, maka

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{1+\Delta} \right\rceil$$

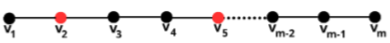
Teorema terbukti ■

Teorema 3.2

Jika P_m adalah lintasan dengan m titik, maka $\gamma(P_m) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$.

Bukti

Perhatikan Gambar 3.2



Gambar 3. 2 Graf Lintasan P_m

Karena $\Delta(P_m) \leq 2$, maka berdasarkan teorema 3.1 diperoleh,

$$\gamma(P_m) \geq \left\lceil \frac{m}{1+2} \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \qquad (1)$$

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa ada himpunan pendominasi S dengan kardinalitas S adalah $\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$. Untuk nilai $m = 1$ atau $m = 2$ jelas bilangan pendominasinya adalah 1, untuk $m \geq 3$ akan ditinjau dengan tiga kasus.

Kasus 1. $m \equiv 0 \ (mod\ 3)$

Karena $m = 3k$ untuk $k \in Z^+$.
Pada kasus ini $V(P_m) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{3k}\}$, misalkan $S = (v_2, v_5, v_8, \dots, v_{3k-1})$. Perhatikan S himpunan pendominasi P_m, dengan $|S| = k = \frac{m}{3} = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$. Berdasarkan Definisi 3.1,

$$\gamma(P_m) \leq \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2) disimpulkan

$$\gamma(P_m) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$$

Kasus 2. $m \equiv 1 \ (mod\ 3)$

Misalkan $m = 3k + 1$ untuk $k \in Z^+$.
Dalam hal ini $V(P_m) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{3k+1}\}$, misalkan himpunan $S = (v_2, v_5, \dots, v_{3k-1}, v_{3k+1})$. Perhatikan bahwa S adalah himpunan pendominasi P_m dengan $|S| = k + 1 = \frac{m-1}{3} + 1 = \frac{m-1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{m+2}{3} = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$. Berdasarkan Definisi 3.1,

$$\gamma(P_m) \leq \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \qquad (3)$$

Dari (1) dan (3) disimpulkan

$$\gamma(P_m) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$$

Kasus 3. $m \equiv 2 \ (mod\ 3)$

Misalkan $m = 3k + 2$ untuk $k \in Z^+$.
Pada kasus ini $V(P_m) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{3k+2}\}$, misalkan himpunan $S = (v_2, v_5, \dots, v_{3k-1}, v_{3k+1})$. Perhatikan bahwa S adalah himpunan pendominasi P_m, dengan $|S| = k + 1 = \frac{m-2}{3} + 1 = \frac{m-2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{m+1}{3} = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$. Berdasarkan Definisi 3.1,

$$\gamma(P_m) \leq \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \qquad (4)$$

Dari (1) dan (4) disimpulkan

$$\gamma(P_m) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$$

Teorema terbukti ■

Contoh

Perhatikan Gambar 3.3

Gambar 3. 3 Graf Lintasan P_6

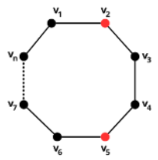
$V(P_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Maka $\gamma(P_6) = \left\lceil \frac{6}{3} \right\rceil = 2$.

Teorema 3.3

Jika C_n adalah sikel dengan n titik, maka $\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

Bukti

Perhatikan Gambar 3.4



Gambar 3.4 Graf Sikel C_n

Diketahui bahwa $\Delta(C_n) \leq 2$, maka berdasarkan teorema 3.1 diperoleh,

$$\gamma(C_n) \geq \left\lceil \frac{n}{1+2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \quad (1)$$

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa ada himpunan pendominasi S dengan kardinalitas S adalah $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Untuk $m \geq 3$ akan ditinjau dengan tiga kasus.

Kasus 1. $n \equiv 0 \ (mod\ 3)$

Karena $n = 3k$ untuk $k \in Z^+$.
Pada kasus ini $V(C_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{3k}\}$, misalkan himpunan $S = (v_2, v_5, v_8, \dots, v_{3k-1})$. Perhatikan bahwa S adalah himpunan pendominasi C_n, dengan $|S| = k = \frac{n}{3} = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Berdasarkan Definisi 3.1,

$$\gamma(C_n) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \quad (2)$$

Dari (1) dan (2) disimpulkan

$$\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

Kasus 2. $n \equiv 1 \ (mod\ 3)$

Misalkan $n = 3k + 1$ untuk $k \in Z^+$.
Himpunan titik-titik C_n adalah $V(C_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{3k+1}\}$,misalkan himpunan pendominasi $S = (v_2, v_5, \dots, v_{3k-1}, v_{3k+1})$. Perhatikan bahwa S adalah himpunan pendominasi C_n dengan $|S| = k + 1 = \frac{n-1}{3} + 1 = \frac{n-1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{n+2}{3} = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.
Berdasarkan 3.1,

$$\gamma(C_n) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \quad (3)$$

Dari (1) dan (3) disimpulkan

$$\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

Kasus 3. $n \equiv 2 \ (mod\ 3)$

Misalkan $n = 3k + 2$ untuk $k \in Z^+$.
Pada kasus ini himpunan titik-titik yang ada pada C_n adalah $V(C_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{3k+2}\}$, selanjutnya misalkan himpunan $S = (v_2, v_5, \dots, sv_{3k-1}, v_{3k+1})$. Perhatikan bahwa S adalah himpunan pendominasi C_n dengan $|S| = k + 1 = \frac{n-2}{3} + 1 = \frac{n-2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{n+1}{3} = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Berdasarkan Definisi 3.1,

$$\gamma(C_n) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \quad (4)$$

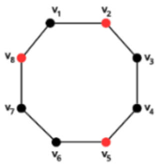
Dari (1) dan (4) disimpulkan

$$\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

Teorema terbukti ■

Contoh

Perhatikan Gambar 3.5



Gambar 3. 5 Graf Sikel C_8

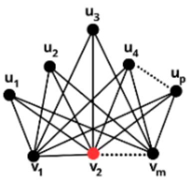
Himpunan titik $V(C_8) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$. Maka, $\gamma(C_8) = \left\lceil \frac{8}{3} \right\rceil = 3$.
Selanjutnya akan dibuktikan bilangan dominasi dari graf kipas. Berdasarkan teorema 3.2 diperoleh $\gamma(P_m) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$.

Teorema 3.4

Jika $F_{p,m}$ adalah graf kipas, maka $\gamma(F_{p,m}) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$.

Bukti

Perhatikan Gambar 3.6



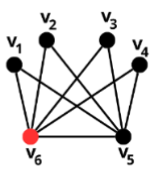
Gambar 3. 6 Graf Kipas $F_{p,m}$

Misalkan $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ adalah himpunan titik-titik pada lintasan dan $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ adalah himpunan titik-titik $\overline{K_p}$ pada $F_{p,m}$. Karena setiap titik pada $\overline{K_p}$ berhubungan langsung dengan setiap titik di P_m, maka untuk mendominasi semua titik di $F_{p,m}$ hanya diperlukan satu titik pada P_m. Berdasarkan teorema 3.2 untuk mendominasi P_m diperlukan tepat $\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$ titik. Sehingga

$$\gamma(F_{p,m}) = \gamma(P_m) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$$

Teorema terbukti ∎

Contoh
Perhatikan Gambar 3.7



Gambar 3. 7 Graf Kipas $F_{4,2}$

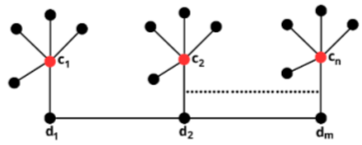
Graf kipas $F_{4,2}$ dengan himpunan pendominasi minimum $S = (v_6)$, maka $\gamma(F_{4,2}) = \left\lceil \frac{2}{3} \right\rceil = 1$.

Teorema 3.5

Jika $F_{n,k}$ adalah graf kembang api dengan, maka $\gamma(F_{n,k}) = n$.

Bukti.

Perhatikan Gambar 3.8



Gambar 3. 8 Graf Kembang Api $F_{n,k}$

Misalkan $S = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ adalah himpunan titik-titik pusat bintang pembentuk graf $F_{n,k}$. Perhatikan bahwa S adalah sebuah himpunan pendominasi $F_{n,k}$ $|S| = n$. Sehingga berdasarkan Definisi 3.1 diperoleh,

$$\gamma(F_{n,k}) \leq n \qquad (1)$$

Misalkan $S \subseteq V(F_{n,k})$, dengan $|S| = n - 1$. Sehingga ada $i, 1 \leq i \leq n, \ni$ bintang S_k ke$-i$ atau ditulis (S_k^i), setiap titik (S_k^i) tidak berhubungan langsung dengan titik-titik di S. Ini berarti S bukan himpunan pendominasi $F_{n,k}$. Sehingga berdasarkan Definisi 3.1

$$\gamma(F_{n,k}) > |S| = n - 1$$

Karena $\gamma(F_{n,k}) \in Z^+$, maka

$$\gamma(F_{n,k}) \geq n \qquad (2)$$

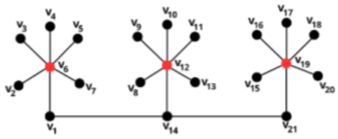
Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa

$$\gamma(F_{n,k}) = n$$

Teorema terbukti ∎

Contoh

Perhatikan Gambar 3.9



Gambar 3. 9 Graf Kembang Api $F_{3,7}$

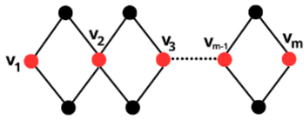
Graf kembang api $F_{3,7}$. $S = \{v_6, v_{12}, v_{19}\}$. Oleh karena itu $\gamma(F_{3,7}) = 3$.

Teorema 3.6

Jika D_m adalah graf ular berlian, maka $\gamma(D_m) \leq m$.

Bukti.

Perhatikan Gambar 3. 10



Gambar 3. 10 Graf Ular Berlian D_m

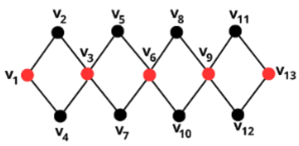
Misalkan $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ adalah himpunan titik pada lintasan P_m pembentuk D_m. Jelas bahwa S sebuah himpunan pendominasi D_m dengan $|S| = m$. Sehingga berdasarkan Definisi 3.1 diperoleh,

$$\gamma(D_m) \leq m$$

Teorema terbukti ■

Contoh

Perhatikan Gambar 3. 11



Gambar 3. 11 Graf Ular Berlian D_5

$V(D_5) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{13}\}$, $S = \{v_1, v_3, v_6, v_9, v_{13}\}$, maka $\gamma(D_5) \leq 5$.

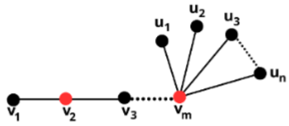
Teorema 3.7

Jika $CT(m,n)$ adalah graf pohon kelapa, maka

$$\gamma(CT(m,n)) = 1 + \left\lceil \frac{m-2}{3} \right\rceil$$

Bukti

Perhatikan Gambar 3. 12



Gambar 3. 12 Graf Pohon Kelapa $CT(m,n)$

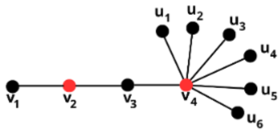
Misalkan titik-titik lintasan yang ada pada $CT(m,n)$ adalah $v_1, v_2, \dots, v_{m-2}, v_{m-1}, v_m$, dan titik-titik liontin pada $CT(m,n)$ adalah $u_1, u_2, \dots, u_n$. Untuk mendominasi $N[v_m]$ hanya diperlukan titik v_m . Selanjutnya untuk mendominasi $v_1, v_2, \dots, v_{m-2}$, berdasarkan teorema 3.2 diperlukan $\left\lceil \frac{m-2}{3} \right\rceil$, sehingga

$$\gamma(CT(m,n)) = 1 + \left\lceil \frac{m-2}{3} \right\rceil$$

Teorema terbukti ■

Contoh

Perhatikan Gambar 3.13



Gambar 3. 13 Graf Pohon Kelapa $CT(4,6)$

Himpunan $S = \{v_2, v_4\}$. $|S| = 1 + \left\lceil \frac{4-2}{3} \right\rceil = 1 + 1 = 2$. Oleh karena itu $\gamma(CT(4,6)) = 2$.

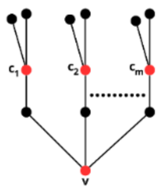
Teorema 3.8

Jika $B(m,k)$ adalah graf pohon pisang, maka

$$\gamma(B(m,k)) \leq m + 1$$

Bukti

Perhatikan Gambar 3.14



Gambar 3. 14 Graf Pohon Pisang $B(m,k)$

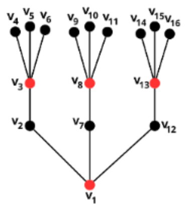
Misalkan $A = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ adalah himpunan titik-titik pusat bintang dalam graf $B(m,k)$, dan v adalah titik akar dari $B(m,k)$. Jelas bahwa $S = A \cup \{v\}$ adalah sebuah himpunan pendominasi $B(m,k)$ dengan $|S| = |A| + |\{v\}| = m + 1$. Berdasarkan Definisi 3.1

$$\gamma(B(m,k)) \leq m + 1$$

Teorema terbukti ■

Contoh

Perhatikan Gambar 3.15



Gambar 3. 15 Graf Pohon Pisang $B(3,5)$

Graf pohon pisang $B(3,5)$ terdiri dari 3 salinan graf bintang S_5, himpunan pendominasi minimum $D = \{v, v_3, v_8, v_{13}\}$, $|D| = m + 1 = 3 + 1 = 4$. Oleh karena itu $\gamma(B(3,5) \leq 4$.

PENUTUP

SIMPULAN

Penelitian ini membahas bilangan dominasi dari beberapa jenis graf, yaitu graf lintasan, graf sikel, graf kipas, graf kembang api, graf ular berlian, graf pohon kelapa, dan graf pohon pisang. Berdasarkan hasil dan pembahasan, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Jika G adalah graf dengan n titik dan derajat maksimum (Δ), maka
$$\gamma(G) \geq \frac{n}{1 + \Delta(G)}$$
2. Jika P_m adalah lintasan dengan m titik, maka
$$\gamma(P_m) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$$
3. Jika C_n adalah sikel dengan n titik, maka
$$\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$
4. Jika $F_{p,m}$ adalah graf kipas, maka
$$\gamma(F_{p,m}) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$$
5. Jika $F_{n,k}$ adalah graf kembang api , maka
$$\gamma(F_{n,k}) = n.$$
6. Jika D_m adalah graf ular berlian, maka
$$\gamma(D_m) \leq m.$$
7. Jika $CT(m,n)$ adalah graf pohon kelapa, maka
$$\gamma(CT(m,n)) = 1 + \left\lceil \frac{m-2}{3} \right\rceil$$
8. Jika $B(m,k)$ adalah graf pohon pisang, maka
$$\gamma(B(m,k)) \leq m + 1$$

SARAN

Penelitian ini terbatas pada penentuan nilai bilangan dominasi dari beberapa jenis graf secara teoritis, tanpa membahas penerapan langsung dalam kehidupan nyata. Oleh karena itu, disarankan agar penelitian selanjutnya dapat mengkaji lebih lanjut penerapan konsep bilangan dominasi pada permasalahan nyata, seperti penempatan sensor, pengawasan jaringan, distribusi fasilitas, pengoptimalan pengawasan area, dll.

DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya*. Unesa University Press.

Chartrand, G., & Lesniak, L. (1986). *Graph & Digraph* (2 ed.). Wadsworth Publ. Co.

Chartrand, G., Lesniak, L., Zhang, P., & Zhang, C. L. (2016). *S I X T H E D I T I O N Textbooks In Mathematics Textbooks In Mathematics*. CRC Press.

Chartrand, G., & Zhang, P. (2012). *A First Course In Graph Theory*. Dover Publications, INC.

Maro, L., & Yoplib, O. H. (2022). Penerapan Konsep Himpunan Dominasi pada Teori Graf untuk Optimalisasi Jumlah Kebocoran Pipa Air Minum di Desa Mausamang, Kabupaten Alor. *Jurnal Saintek Lahan Kering*, *4*(2), 16–18. https://doi.org/10.32938/slk.v4i2.1481

Prihandini, R. M., Rahmadani, M. R., & Dafik, D. (2024). Analysis Of Resolving Efficient Dominating Set And Its Application Scheme In Solving Etle Problems. *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, *18*(3), 1615–1628. https://doi.org/10.30598/barekengvol18iss3pp1615-1628

Saifudin, I., Widiyaningtyas, T., Rhomdani, R. W., & Dasuki, Moh. (2024). Domination Numbers in Graphs Resulting from Shackle Operations with Linkage of any Graph. *JTAM (Jurnal Teori dan*

Aplikasi Matematika), *8*(2), 336. https://doi.org/10.31764/jtam.v8i2.19675

Sugumaran, D. A., & Jayachandran, E. (2018). *Domination number of some graphs*.

Yuvita, S. (2021). *Aplikasi Graf Dalam Jaringan Internet*.