

ANALISIS KESTABILAN SISTEM TEREKSITASI SENDIRI YANG DIRANGKAI DENGAN EKSITASI PARAMETRIK

Adelia Fernanda Putri

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia

e-mail : adeliafernanda.21007@mhs.unesa.ac.id

Abadi

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia

e-mail : abadi@unesa.ac.id*

Abstrak

Banyak permasalahan-permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang dapat dimodelkan melalui model matematika. Salah satunya adalah permasalahan di bidang mekanika yaitu vibrasi. Vibrasi yang berlebihan dapat menyebabkan kehilangan efisiensi bahkan menyebabkan kerusakan struktural yang dapat membahayakan. Untuk meredam vibrasi atau eksitasi yang tidak diinginkan dapat menggunakan sistem tereksitasi sendiri yang dirangkai dengan eksitasi parametrik dan dimodelkan melalui sistem pegas dua massa. Sehingga, tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui daerah kestabilan di mana eksitasi tersebut dapat teredam. Metode *averaging* digunakan untuk menganalisis kestabilan dari sistem. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa peredaman bergantung pada dua kondisi. Kondisi pertama menyatakan bahwa peredaman bergantung pada parameter peredam θ_{11} dan θ_{22} di mana jumlah kedua parameter tersebut harus positif. Kondisi kedua yaitu terkait kombinasi parametrik anti-resonansi dengan melibatkan frekuensi eksitasi parametrik. Hasil juga menunjukkan bahwa dengan memperbesar nilai amplitudo ε dari eksitasi parametrik dapat memperluas daerah peredaman eksitasi sendiri. Di luar solusi trivial juga dapat muncul solusi non-trivial.

Kata Kunci: Eksitasi sendiri, eksitasi parametrik, metode *averaging*, peredam, kombinasi parametrik anti-resonansi.

Abstract

Many problems in everyday life can be modeled through mathematical models. One of them is a problem in the field of mechanics, namely vibration. Excessive vibration can cause loss of efficiency and even cause structural damage that can be dangerous. To dampen unwanted vibrations or excitations, a self-excited system can be used which is assembled with parametric excitation and modeled through a two-mass spring system. Thus, the purpose of this study is to determine the stability area where the excitation can be damped. The averaging method is used to analyze the stability of the system. The results of this study indicate that the absorber depends on two conditions. The first condition states that the damping depends on the damping parameters θ_{11} and θ_{22} where the sum of two parameters must be positive. The second condition is related to the parametric combination anti-resonance involving the parametric excitation frequency. The results also show that by increasing the amplitude value ε of parametric excitation, the self-excitation damping area can be expanded. Beyond the trivial solution, non-trivial solutions can also emerge.

Keywords: Self-excited, parametric excitation, averaging method, damping, parametric anti-resonance combination.

PENDAHULUAN

Banyak permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang muncul dalam berbagai bidang ilmu. Salah satu contohnya adalah dalam bidang mekanika, di mana perilaku sistem mekanik dapat dimodelkan melalui model matematika. Dalam bidang mekanika, sistem mekanik yang bekerja sering menimbulkan permasalahan seperti vibrasi (getaran) yang berlebihan pada suatu sistem. Vibrasi

yang berlebihan dapat menyebabkan kehilangan efisiensi dan dalam kasus ekstrem akan menyebabkan kerusakan struktural yang dapat membahayakan (Rao, 2018).

Salah satu contoh sistem yang mengalami vibrasi adalah bangunan tinggi. Vibrasi tersebut bisa dipengaruhi oleh beberapa faktor. Bangunan tinggi yang mengalami vibrasi dapat dimodelkan sebagai sistem pegas massa yang disusun berdasarkan prinsip hukum Hooke dan hukum Newton II

(Diyamita, 2017). Massa pada sistem yang bergetar berperan penting dalam menentukan karakteristik osilasi, terutama ketika dua osilator dirangkai.

Ketika dua osilator dirangkai, masing-masing dengan massa dan konstanta pegas yang berbeda, akan berinteraksi satu sama lain melalui gaya pemulih. Interaksi ini menyebabkan energi dapat berpindah dari osilator satu ke osilator lainnya. Jika satu osilator diberi energi melalui getaran, maka dapat mempengaruhi gerakan osilator kedua, sistem ini disebut sebagai sistem osilator gabungan (Holland, 2008).

Penelitian yang telah dilakukan oleh Püst dan Tondl (2008) yaitu membahas analisis sistem dua massa yang terdiri dari sistem utama dengan eksitasi sendiri yang dipasang pada subsistem fondasi berupa massa dan pegas. Kemudian penelitian yang dilakukan oleh Bobryk, dkk (2017) yang membahas mengenai penekanan getaran eksitasi sendiri pada sistem utama dengan getaran eksitasi parametrik acak pada sistem penyerap. Penelitian yang telah dilakukan oleh Fatimah dan Verhulst (2003) yaitu membahas mengenai kemungkinan menekan getaran yang diinduksi aliran (*flow-induced vibrations*) menggunakan eksitasi parametrik secara periodik.

Pada penelitian ini akan mengkaji model matematika pada sistem pegas dua massa yang tereksitasi sendiri yang direndam oleh eksitasi parametrik. Penelitian ini untuk memodifikasi penelitian yang dilakukan oleh Püst dan Tondl (2008) terkait getaran eksitasi sendiri pada sistem utama dengan menambahkan pengaruh lain berupa eksitasi parametrik acak pada subsistem fondasi seperti pada penelitian yang dilakukan Bobryk, dkk (2017). Namun, penelitian ini akan berfokus pada penambahan eksitasi parametrik secara periodik seperti pada penelitian yang dilakukan Fatimah dan Verhulst (2003).

KAJIAN TEORI

VIBRASI

Vibrasi atau getaran adalah gerak osilasi pada sistem mekanik yang terjadi di sekitar titik kesetimbangannya. Terdapat dua kelompok getaran umum, yaitu getaran bebas (*free vibration*) dan getaran yang disebabkan oleh gaya (*forced vibration*). Getaran bebas terjadi ketika sistem bergetar akibat

gangguan awal dan tanpa adanya pengaruh gaya eksternal (Rao, 2018).

Getaran yang disebabkan oleh gaya diklasifikasikan menjadi tiga; yakni getaran tereksitasi sendiri (*self excited vibration*) yang terjadi karena ada medium yang mengalir seperti angin dan air; getaran dengan adanya gaya eksternal (*external excitations vibrations*) yang terjadi akibat gaya eksternal yang diterapkan pada sistem; dan getaran tereksitasi secara periodik (*parametrically excitation vibrations*) yang terjadi ketika parameter sistem berubah secara periodik terhadap waktu (Nayfeh & Mook, 1995).

SISTEM PEGAS MASSA

Sistem pegas massa merupakan salah satu contoh sederhana yang digunakan untuk memahami prinsip dasar osilasi mekanis dalam konteks getaran. Sistem pegas massa terdiri dari massa yang dirangkai dengan pegas, dapat disusun secara seri maupun paralel. Pada rangkaian seri, gaya yang bekerja pada setiap pegas sama besar. Sedangkan pada rangkaian paralel, gaya yang bekerja pada sistem dibagi antara pegas-pegs yang ada pada sistem (Rao, 2018).

SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Sistem persamaan diferensial biasa merupakan persamaan diferensial biasa yang terdiri dari n persamaan diferensial biasa. Bentuk umum sistem persamaan diferensial orde-1 sebagai berikut:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

di mana $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{t}) = x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)$ dan \mathbf{f} adalah fungsi bernilai real dari $n+1$ variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dan t . Titik \mathbf{x}^* disebut titik kesetimbangan dari sistem jika dan hanya jika memenuhi $\mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{x}^*) = 0$. Sistem persamaan $\mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{x}^*) = 0$ dapat dituliskan dalam bentuk vektor

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{t}) \quad (2)$$

di mana \mathbf{A} adalah matriks jacobian dari \mathbf{f} di \mathbf{x}^* berikut :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3)$$

dan $\mathbf{h}(\mathbf{t})$ merupakan suku berorde tinggi yang lebih cepat menuju 0. Sehingga sistem (1) dapat diaproksimasi dengan sistem linier menjadi

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} \quad (4)$$

yang disebut dengan sistem terlinierisasi.

Nilai eigen matriks jacobian \mathbf{A} berukuran $n \times n$ memiliki n nilai eigen λ . Nilai eigen diperoleh dari persamaan karakteristik matriks \mathbf{A} dapat berupa nilai real berbeda atau kompleks disebut nilai eigen dari matriks \mathbf{A} . Berdasarkan nilai λ maka kestabilan titik kesetimbangan stabil asimtotik jika nilai eigen real atau negatif atau memiliki bagian real yang negatif dan tidak stabil jika terdapat nilai eigen real positif atau bagian real positif (Boyce dkk., 2017).

KRITERIA ROUTH-HURWITZ

Kriteria Routh-Hurwitz merupakan salah satu metode alternatif untuk menentukan kestabilan sistem jika nilai eigen dalam sistem linier sulit untuk ditentukan. Kriteria Routh-Hurwitz menentukan kestabilan suatu sistem melalui koefisien dari persamaan karakteristik saja tanpa harus mengetahui nilai eigen λ .

Misalkan nilai karakteristik matriks \mathbf{A} adalah

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (5)$$

di mana n adalah orde sistem dan a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 adalah koefisien polinomial. Sehingga diperoleh tabel kriteria Routh-Hurwitz berikut :

Tabel 1. Bentuk tabel kriteria Routh-Hurwitz

λ^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
λ^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3	...
...	...			
λ^0	P			

dengan $n = 1, 2, \dots, k$ didefinisikan sebagai berikut :

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1},$$

$$b_n = \frac{a_1 a_{2n} - a_0 a_{2n+1}}{a_1}, \quad c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1},$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \quad c_n = \frac{b_1 a_{2n+1} - a_1 b_{n+1}}{b_1}.$$

Tabel Routh-Hurwitz tersebut dilanjutkan mendatar dan menurun hingga diperoleh elemen-elemen pada kolom pertama nol. Suatu sistem dikatakan stabil jika bagian real dari nilai eigenya adalah negatif, yang ditunjukkan dengan tidak ada perubahan tanda pada tabel Routh-Hurwitz (Olsder & Woude, 1998).

METODE AVERAGING

Prinsip dari metode *averaging* adalah dengan mengasumsikan adanya parameter ε pada sebuah persamaan osilator. Parameter ε merupakan parameter yang sangat kecil atau menuju nol dengan $\varepsilon > 0$. Misalkan diketahui suatu sistem terpertubasi berikut :

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad (6)$$

di mana $\varepsilon f(x, \dot{x})$ adalah suku perturbasi dari sistem (6), f berperiode- T terhadap t . Jika $\varepsilon = 0$, diperoleh

solusi dari persamaan (6) dengan kombinasi linier dari $\cos t$ dan $\sin t$ berikut :

$$x(t) = r_0 \cos(t + \psi_0). \quad (7)$$

Solusi untuk $\varepsilon \neq 0$, Lagrange mengenalkan "variasi parameter". Diasumsikan bahwa $\varepsilon \neq 0$, solusinya dapat dituliskan dalam bentuk di mana amplitudo (r) dan fase (ψ) sebagai fungsi dalam waktu. Sehingga, masukkan solusi dari persamaan (6) sebagai berikut :

$$x(t) = r(t) \cos(t + \psi(t)) \quad (8)$$

$$\dot{x}(t) = -r(t) \sin(t + \psi(t)).$$

Persamaan (8) disubstitusikan ke (6) kemudian ditransformasikan dan diperoleh :

$$\dot{r} = -\varepsilon \sin(t + \psi) f(r \cos(t + \psi), -r \sin(t + \psi)) \quad (9)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\varepsilon}{r} \cos(t + \psi) f(r \cos(t + \psi), -r \sin(t + \psi)).$$

Persamaan (9) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t) + \varepsilon^2 g(x, t, \varepsilon), \quad x(t_0) = x_0. \quad (10)$$

di mana $\varepsilon g(x, t, \varepsilon)$ adalah suku perturbasi dari sistem, f dan g berperiode- T terhadap variabel t . Persamaan *averaged* dari (10) adalah

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y), \quad y(t_0) = x_0 \quad (11)$$

dengan

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt. \quad (12)$$

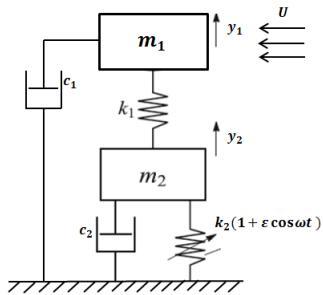
Solusi $y(t)$ dari (12) adalah aproksimasi dari solusi $x(t)$ dari (10), di mana $x(t) - y(t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

METODE

Penelitian ini adalah jenis penelitian studi literatur dan simulasi numerik mengenai analisis kestabilan sistem terekstasi sendiri yang diredam oleh eksitasi parametrik. Tahapan yang dilakukan adalah studi literatur, menyusun batasan masalah, mengonstruksi model matematika sistem, menganalisis kestabilan model matematika sistem, simulasi, serta menarik kesimpulan dan saran.

HASIL DAN PEMBAHASAN

KONSTRUKSI MODEL MATEMATIKA SISTEM TEREKSITASI SENDIRI YANG DIREDAM OLEH EKSITASI PARAMETRIK



Gambar 1. Sistem pegas dua massa yang tereksitasi sendiri dirangkai dengan eksitasi parametrik

Massa utama m_1 dengan defleksi y_1 tidak melekat pada apapun dirangkai secara vertikal melalui sebuah kekakuan pegas k_1 dan dihubungkan dengan massa subsistem fondasi m_2 serta memiliki peredam c_1 pada lantai. Massa utama m_1 mengalami eksitasi sendiri oleh aliran U yang dinyatakan dengan redaman tipe $Raileigh \beta_0 U^2 (1 - \gamma_0 \dot{y}_1^2) \dot{y}_1$, $\beta_0, \gamma_0 > 0$. Massa subsistem fondasi dengan defleksi y_2 terhubung ke massa utama m_1 melalui kekakuan pegas k_1 dan terhubung ke lantai melalui kekakuan pegas yang berubah secara periodik yaitu $k_2(1 + \varepsilon \cos \omega t)$ serta memiliki peredam c_2 pada lantai. Sehingga model matematika yang diperoleh adalah :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + k_1(y_1 - y_2) \\ -\beta_0 U^2 (1 - \gamma_0 \dot{y}_1^2) \dot{y}_1 = 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + c_2 \dot{y}_2 + k_1(y_2 - y_1) \\ + k_2(1 + \varepsilon \cos \omega t) y_2 = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

dengan keterangan berikut :

Tabel 2. Tabel keterangan parameter

Variabel atau Parameter	Keterangan
m_1	Massa utama
m_2	Massa subsistem fondasi
y_1	Defleksi dari sistem utama
y_2	Defleksi dari subsistem fondasi
k_1	Kekakuan pegas massa utama
k_2	Kekakuan pegas subsistem fondasi
c_1	Peredam dari massa utama
c_2	Peredam dari massa subsistem fondasi
U	Kecepatan aliran
β_0	Konstanta aliran
γ_0	Koefisien nonlinieritas aliran
$\varepsilon \cos \omega t$	Eksitasi parametrik dari k_2

\dot{y}_1	Kecepatan dari massa utama
\dot{y}_2	Kecepatan dari massa subsistem fondasi
\ddot{y}_1	Percepatan dari massa utama
\ddot{y}_2	Percepatan dari massa subsistem fondasi

ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA SISTEM TEREKSITASI SENDIRI YANG DIREDAM OLEH EKSITASI PARAMETRIK

Menggunakan transformasi waktu $\omega_1 t \rightarrow \tau$, di mana $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$ yang merupakan frekuensi alami dari m_1 dan dengan menggunakan parameter yang sangat kecil, yaitu ε . Dengan mengskalakan $k_{1,2} = \varepsilon \bar{k}_{1,2}$ dan $\beta = \varepsilon \bar{\beta}$ pada sistem (13) serta mengasumsikan bahwa parameter lainnya adalah $\mathcal{O}(1)$ terhadap ε , maka diperoleh :

$$\begin{aligned} y_1'' + \varepsilon \bar{k}_1 y_1' + y_1 - y_2 \\ -\varepsilon \bar{\beta} V^2 (1 - \gamma y_1^2) y_1' = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$y_2'' + \varepsilon \bar{k}_2 y_2' + M(y_2 - y_1)$$

$$+ q^2 (1 + \varepsilon \cos \eta \tau) y_2 = 0$$

di mana $V^2 = \frac{y^2}{y_0^2}$, $\beta = \frac{\beta_0 U_0^2}{m_1 \omega_1}$, $\gamma = \gamma_0 \omega_1^2$, $\eta = \frac{\omega}{\omega_1}$, $k_1 = \frac{c_1}{m_1 \omega_1}$, $k_2 = \frac{c_2}{m_2 \omega_2}$, $q^2 = \frac{k_2}{m_2 \omega_1^2}$, dan $M = \frac{m_1}{m_2}$ dengan U_0 merupakan nilai yang dipilih untuk kecepatan arus.

Transformasi persamaan (14) menjadi bentuk kuasi-normal menggunakan transformasi linier berikut :

$$y_1 = x_1 + x_2 \text{ dan } y_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2. \quad (15)$$

Substitusi (15) ke (14), diperoleh

$$x_1'' + \Omega_1^2 x_1 = -\varepsilon F_1(x_1, x_1', x_2, x_2', \eta \tau) \quad (16)$$

$$x_2'' + \Omega_2^2 x_2 = -\varepsilon F_2(x_1, x_1', x_2, x_2', \eta \tau),$$

di mana

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_1', x_2, x_2', \eta \tau) &= \theta_{11} x_1' + \theta_{12} x_2' \\ + (Q_{11} x_1 + Q_{12} x_2) \cos \eta \tau - B_1 (x_1' + x_2')^3 \end{aligned} \quad (17)$$

$$F_2(x_1, x_1', x_2, x_2', \eta \tau) = \theta_{21} x_1' + \theta_{22} x_2'$$

$$+ (Q_{21} x_1 + Q_{22} x_2) \cos \eta \tau + B_2 (x_1' + x_2')^3$$

dengan

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (q^2 + M + 1) \mp \sqrt{\frac{1}{4} (q^2 + M + 1)^2 - q^2},$$

$$a_{1,2} = \frac{1}{2} \left((1 - q^2 - M) \pm \sqrt{(q^2 + M - 1)^2 + 4M} \right),$$

$$\theta_{11} = \frac{a_1 k_2 - a_2 (k_1 - \beta V^2)}{a_1 - a_2},$$

$$\theta_{12} = \frac{a_2 (k_2 - k_1 + \beta V^2)}{a_1 - a_2},$$

$$\theta_{21} = \frac{-a_1 (k_2 - k_1 + \beta V^2)}{a_1 - a_2},$$

$$\theta_{22} = \frac{a_1(k_1 - \beta V^2) - a_2 k_2}{a_1 - a_2},$$

$$Q_{11} = \frac{q^2 a_1}{a_1 - a_2}, Q_{12} = \frac{q^2 a_2}{a_1 - a_2}, Q_{21} = \frac{-q^2 a_1}{a_1 - a_2},$$

$$Q_{22} = \frac{-q^2 a_2}{a_1 - a_2}, B_1 = \frac{a_2 \beta V^2 \gamma}{a_1 - a_2}, B_2 = \frac{a_1 \beta V^2 \gamma}{a_1 - a_2}.$$

Meredam getaran eksitasi sendiri dapat dilakukan dengan menggunakan kombinasi resonansi anti-parametrik dengan memunculkan detuning ketika mengambil $\eta = \eta_0 + \varepsilon\sigma$ di mana $\eta_0 = \Omega_2 - \Omega_1$. Dengan menggunakan transformasi waktu $t \rightarrow \eta\tau$, sistem (16) menjadi

$$\bar{x}_1'' + \bar{\omega}_1^2 \bar{x}_1 = -\frac{\varepsilon}{\eta_0^2} \bar{F}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_1', \bar{x}_2, \bar{x}_2', t) \quad (18)$$

$$\bar{x}_2'' + \bar{\omega}_2^2 \bar{x}_2 = -\frac{\varepsilon}{\eta_0^2} \bar{F}_2(\bar{x}_1, \bar{x}_1', \bar{x}_2, \bar{x}_2', t)$$

di mana $\bar{\omega}_i = \frac{\Omega_i}{\eta_0}$, $i = 1, 2$ dan

$$\bar{F}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_1', \bar{x}_2, \bar{x}_2', t) = -2\bar{\omega}_1 \Omega_1 \sigma \bar{x}_1$$

$$+ (\theta_{11} \bar{x}_1' + \theta_{12} \bar{x}_2') \eta_0 + (Q_{11} \bar{x}_1 + Q_{12} \bar{x}_2) \cos t$$

$$- B_1 \eta_0^3 (\bar{x}_1' + \bar{x}_2')^3 \quad (19)$$

$$\bar{F}_2(\bar{x}_1, \bar{x}_1', \bar{x}_2, \bar{x}_2', t) = -2\bar{\omega}_2 \Omega_2 \sigma \bar{x}_2$$

$$+ (\theta_{21} \bar{x}_1' + \theta_{22} \bar{x}_2') \eta_0 + (Q_{21} \bar{x}_1 + Q_{22} \bar{x}_2) \cos t$$

$$+ B_2 \eta_0^3 (\bar{x}_1' + \bar{x}_2')^3.$$

Analisis terhadap kestabilan solusi trivial dilakukan untuk memungkinkan terjadinya peredaman getaran eksitasi sendiri oleh eksitasi parametrik. Dengan menggunakan transformasi :

$$\bar{x}_i = u_i \cos \bar{\omega}_i t + v_i \sin \bar{\omega}_i t, \quad (20)$$

$$\bar{x}_i' = -u_i \bar{\omega}_i \sin \bar{\omega}_i t + v_i \bar{\omega}_i \cos \bar{\omega}_i t,$$

di mana $i = 1, 2$. Substitusi (20) ke (18), dengan menggunakan transformasi (20) akan diperoleh

$$u_i' = \frac{\varepsilon}{\eta_0^2 \bar{\omega}_i} \sin \bar{\omega}_i t \bar{F}_i(\bar{x}_1, \bar{x}_1', \bar{x}_2, \bar{x}_2', t) \quad (21)$$

$$v_i' = -\frac{\varepsilon}{\eta_0^2 \bar{\omega}_i} \cos \bar{\omega}_i t \bar{F}_i(\bar{x}_1, \bar{x}_1', \bar{x}_2, \bar{x}_2', t).$$

Ruas kanan dari (21) di-averaged pada interval $[0, \frac{2\pi}{\bar{\omega}_i}]$, dengan $i = 1, 2$ terhadap t sehingga

$$u_i' = \frac{\bar{\omega}_i}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\bar{\omega}_i}} \left(\frac{\varepsilon}{\eta_0^2 \bar{\omega}_i} \sin \bar{\omega}_i t \bar{F}_i(\bar{x}_1, \bar{x}_1', \bar{x}_2, \bar{x}_2', t) \right) dt \quad (22)$$

$$v_i' = \frac{\bar{\omega}_i}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\bar{\omega}_i}} \left(-\frac{\varepsilon}{\eta_0^2 \bar{\omega}_i} \cos \bar{\omega}_i t \bar{F}_i(\bar{x}_1, \bar{x}_1', \bar{x}_2, \bar{x}_2', t) \right) dt.$$

Setelah di-averaged pada interval $[0, \frac{2\pi}{\bar{\omega}_i}]$ terhadap t dan melakukan faktor penskalaan ulang $\frac{\varepsilon}{\eta_0^2}$, diperoleh :

$$u_1' = -\Omega_1 \sigma v_1 - \frac{1}{2} \theta_{11} u_1 \eta_0 + \frac{1}{4} \frac{Q_{12}}{\bar{\omega}_1} v_2 + \frac{3}{4} B_1$$

$$\eta_0^3 \left(\frac{1}{2} \bar{\omega}_1^2 u_1 (u_1^2 + v_1^2) + \bar{\omega}_2^2 u_1 (u_2^2 + v_2^2) \right),$$

$$v_1' = \Omega_1 \sigma u_1 - \frac{1}{2} \theta_{11} v_1 \eta_0 - \frac{1}{4} \frac{Q_{12}}{\bar{\omega}_1} u_2 + \frac{3}{4} B_1$$

$$\eta_0^3 \left(\frac{1}{2} \bar{\omega}_1^2 v_1 (u_1^2 + v_1^2) + \bar{\omega}_2^2 v_1 (u_2^2 + v_2^2) \right),$$

$$u_2' = -\Omega_2 \sigma v_2 - \frac{1}{2} \theta_{22} u_2 \eta_0 + \frac{1}{4} \frac{Q_{21}}{\bar{\omega}_2} v_1 - \frac{3}{4} B_2$$

$$\eta_0^3 \left(\bar{\omega}_1^2 u_2 (u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{2} \bar{\omega}_2^2 u_2 (u_2^2 + v_2^2) \right),$$

$$v_2' = \Omega_2 \sigma u_2 - \frac{1}{2} \theta_{22} v_2 \eta_0 - \frac{1}{4} \frac{Q_{21}}{\bar{\omega}_2} u_1 - \frac{3}{4} B_2$$

$$\eta_0^3 \left(\bar{\omega}_1^2 v_2 (u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{2} \bar{\omega}_2^2 v_2 (u_2^2 + v_2^2) \right).$$
(23)

Identifikasi titik kesetimbangan dari (23) dengan mengnolkan ruas kanan dari (23) sehingga $u_1' = 0, v_1' = 0, u_2' = 0, v_2' = 0$. Salah satu solusi untuk $u_1' = 0, v_1' = 0, u_2' = 0, v_2' = 0$ adalah ketika $u_1 = 0, v_1 = 0, u_2 = 0, v_2 = 0$. Sehingga diperoleh titik kesetimbangan solusi trivial $(u_1, v_1, u_2, v_2) = (0, 0, 0, 0)$ yang merepresentasikan sistem tersebut diam.

Linierisasi persamaan (23) sehingga diperoleh matriks Jacobian

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \theta_{11} \eta_0 & -\Omega_1 \sigma & 0 & \frac{1}{4} \frac{Q_{12}}{\bar{\omega}_1} \\ \Omega_1 \sigma & -\frac{1}{2} \theta_{11} \eta_0 & -\frac{1}{4} \frac{Q_{12}}{\bar{\omega}_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \frac{Q_{21}}{\bar{\omega}_2} & -\frac{1}{2} \theta_{22} \eta_0 & -\Omega_2 \sigma \\ -\frac{1}{4} \frac{Q_{21}}{\bar{\omega}_2} & 0 & \Omega_2 \sigma & -\frac{1}{2} \theta_{22} \eta_0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

dengan persamaan karakteristik

$$\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0 \quad (25)$$

di mana $a_i, i = 1..4$, yang bergantung pada parameter q, M, k_1, k_2, V , dan β .

Untuk menentukan interval kestabilan dari solusi trivial, akan diterapkan tabel kriteria Routh-Hurwitz

Tabel 3. Tabel Kriteria Routh - Hurwitz

Baris	Kolom 1	Kolom 2	Kolom 3
λ^4	1	a_2	a_4
λ^3	a_1	a_3	0
λ^2	b_1	b_2	0
λ	c_1	0	
λ^0	d_1		

yang menghasilkan 2 kondisi yakni :

$$\begin{aligned} \text{rh-A. } & \theta_{11} + \theta_{22} > 0, \\ \text{rh-C. } & p_0 \sigma^4 + p_1 \sigma^2 + p_2 > 0, \end{aligned} \quad (26)$$

di mana $p_i, i = 0, 1, 2$ yang bergantung pada parameter q, M, k_1, k_2, V , dan β . Dari rh-C diperoleh solusi untuk σ yaitu

$$\sigma_{1,2} = \pm \frac{1}{4} \frac{(\theta_{11} + \theta_{22})}{\theta_{11} \theta_{22}} \sqrt{-\theta_{11} \theta_{22} \frac{(4\Omega_1 \Omega_2 \theta_{11} \theta_{22} + Q_{12} Q_{21})}{\Omega_1 \Omega_2}} \quad (27)$$

dengan $\sigma_{3,4}$ selalu bernilai imajiner. Dari (27), untuk mendapatkan nilai real dari $\sigma_{1,2}$ harus memenuhi kondisi $4\Omega_1 \Omega_2 \theta_{11} \theta_{22} + Q_{12} Q_{21} > 0$ dan $\theta_{11} \theta_{22} < 0$. Dengan demikian, nilai dari parameter detuning σ berada pada interval berikut :

$$\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 \quad (28)$$

dan interval kestabilan dari solusi trivial di sekitar anti-resonansi kombinasi parametrik berikut :

$$\eta_0 + \varepsilon \sigma_1 < \eta < \eta_0 + \varepsilon \sigma_2. \quad (29)$$

Solusi non-trivial sistem dapat muncul saat berada di luar solusi trivial sistem. Dengan menggunakan transformasi

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= R_i \cos(\bar{\omega}_i t + \psi_i) \\ \bar{x}'_i &= -R_i \bar{\omega}_i \sin(\bar{\omega}_i t + \psi_i), \end{aligned} \quad (30)$$

di mana R_i merupakan amplitudo dan ψ_i merupakan fase dengan $i = 1, 2$. Substitusi (30) ke (18), dengan menggunakan transformasi (30) akan diperoleh

$$\begin{aligned} R'_i &= \frac{\varepsilon}{\eta_0^2 \bar{\omega}_i} \sin(\bar{\omega}_i t + \psi_i) \bar{F}_i(\bar{x}_1, \bar{x}'_1, \bar{x}_2, \bar{x}'_2, t) \\ \psi'_i &= \frac{\varepsilon}{\eta_0^2 \bar{\omega}_i R_i} \cos(\bar{\omega}_i t + \psi_i) \bar{F}_i(\bar{x}_1, \bar{x}'_1, \bar{x}_2, \bar{x}'_2, t). \end{aligned} \quad (31)$$

Ruas kanan dari (31) di-averaged pada interval $[0, \frac{2\pi}{\bar{\omega}_i}]$, dengan $i = 1, 2$ terhadap t sehingga

$$\begin{aligned} R'_i &= \frac{\bar{\omega}_i}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\bar{\omega}_i}} \left(\frac{\varepsilon}{\eta_0^2 \bar{\omega}_i} \sin(\bar{\omega}_i t + \psi_i) \bar{F}_i(\bar{x}_1, \bar{x}'_1, \bar{x}_2, \bar{x}'_2, t) \right. \\ &\quad \left. + \psi'_i \right) \bar{F}_i(\bar{x}_1, \bar{x}'_1, \bar{x}_2, \bar{x}'_2, t) dt \\ \psi'_i &= \frac{\bar{\omega}_i}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\bar{\omega}_i}} \left(\frac{\varepsilon}{\eta_0^2 \bar{\omega}_i R_i} \cos(\bar{\omega}_i t + \psi_i) \bar{F}_i(\bar{x}_1, \bar{x}'_1, \bar{x}_2, \bar{x}'_2, t) \right. \\ &\quad \left. + \psi'_i \right) \bar{F}_i(\bar{x}_1, \bar{x}'_1, \bar{x}_2, \bar{x}'_2, t) dt. \end{aligned} \quad (32)$$

Setelah di-averaged pada interval $[0, \frac{2\pi}{\bar{\omega}_i}]$ terhadap t dan melakukan faktor penskalaan ulang $\frac{\varepsilon}{\eta_0^2}$, diperoleh :

$$\begin{aligned} R'_1 &= -\frac{1}{2} \theta_{11} R_1 \eta_0 + \frac{1}{4} \frac{Q_{12} R_2}{\bar{\omega}_1} \sin(\psi_1 - \psi_2) \\ &+ B_1 \eta_0^3 \left(\frac{3}{8} R_1^3 \bar{\omega}_1^2 + \frac{3}{4} R_1 R_2^2 \omega_2^2 \right), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= -\Omega_1 \sigma + \frac{1}{4} \frac{Q_{12} R_2}{\bar{\omega}_1 R_1} \cos(\psi_1 - \psi_2), \\ R'_2 &= -\frac{1}{2} \theta_{22} R_2 \eta_0 + \frac{1}{4} \frac{Q_{21} R_1}{\omega_2} \sin(\psi_2 - \psi_1) \\ &- B_2 \eta_0^3 \left(\frac{3}{8} R_2^3 \omega_2^2 + \frac{3}{4} R_1^2 R_2 \bar{\omega}_1^2 \right), \\ \psi'_2 &= -\Omega_2 \sigma + \frac{1}{4} \frac{Q_{21} R_1}{\omega_2 R_2} \cos(\psi_2 - \psi_1). \end{aligned}$$

Dimensi dari (33) dapat dikurangi dengan memisalkan variabel fase $\varphi = \psi_2 - \psi_1$ dan (33) menjadi

$$\begin{aligned} R'_1 &= -\frac{1}{2} \theta_{11} R_1 \eta_0 + \frac{1}{4} \frac{Q_{12} R_2}{\bar{\omega}_1} \sin(\psi_1 - \psi_2) \\ &+ B_1 \eta_0^3 \left(\frac{3}{8} R_1^3 \bar{\omega}_1^2 + \frac{3}{4} R_1 R_2^2 \omega_2^2 \right), \\ R'_2 &= -\frac{1}{2} \theta_{22} R_2 \eta_0 + \frac{1}{4} \frac{Q_{21} R_1}{\omega_2} \sin(\psi_2 - \psi_1) \\ &- B_2 \eta_0^3 \left(\frac{3}{8} R_2^3 \omega_2^2 + \frac{3}{4} R_1^2 R_2 \bar{\omega}_1^2 \right), \\ \varphi' &= -\sigma \eta_0 + \frac{1}{4} \left(\frac{Q_{21} R_1}{\bar{\omega}_2 R_2} - \frac{Q_{12} R_2}{\bar{\omega}_1 R_1} \right) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (34)$$

Titik kesetimbangan dari (34) diperoleh dengan mengnolkan ruas kanan dari (34) sehingga $R'_1 = 0, R'_2 = 0$, dan $\varphi' = 0$. Namun, analisis titik kesetimbangan tersebut sulit dilakukan karena mengandung persamaan kubik, sehingga analisis titik kesetimbangan dan kestabilannya dilakukan dengan simulasi numerik.

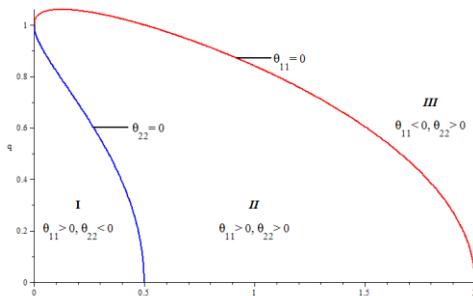
SIMULASI NUMERIK

Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan nilai-nilai pada Tabel 4 berikut :

Tabel 4. Nilai Parameter untuk simulasi numerik

Parameter	Nilai
ε	0.1
k_1	0.8
k_2	0.5
β	0.5
V	$\sqrt{2.1}$
γ	4

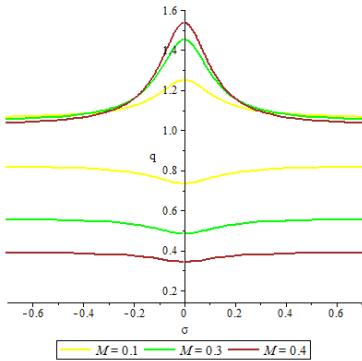
Pada rh-A, diperoleh batas-batas untuk θ_{11} dan θ_{22} pada bidang $M - q$ yang ditunjukkan pada Gambar 2 berikut :



Gambar 2. Batas daerah θ_{11} dan θ_{22}

Gambar 2 menunjukkan bahwa terdapat tiga daerah. Daerah I menunjukkan θ_{11} bernilai positif dan θ_{22} bernilai negatif, jika dijumlahkan akan menghasilkan nilai positif. Daerah II menunjukkan θ_{11} dan θ_{22} bernilai positif, jika dijumlahkan akan menghasilkan nilai positif. Daerah III menunjukkan bahwa θ_{11} bernilai negatif dan θ_{22} bernilai positif, jika dijumlahkan akan menghasilkan nilai positif. Hal ini menunjukkan bahwa nilai-nilai Parameter pada Tabel 4 memungkinkan rh-A terpenuhi. Dalam daerah II pada Gambar 6 menunjukkan getaran eksitasi sendiri dapat diredam sepenuhnya oleh eksitasi parametrik karena θ_{11} dan θ_{22} bernilai positif, jika dijumlahkan akan bernilai positif. Dari rh-A dapat disimpulkan bahwa hanya satu dari θ_{11} dan θ_{22} saja yang bernilai negatif dan nilai absolutnya harus lebih kecil daripada nilai absolut yang positif.

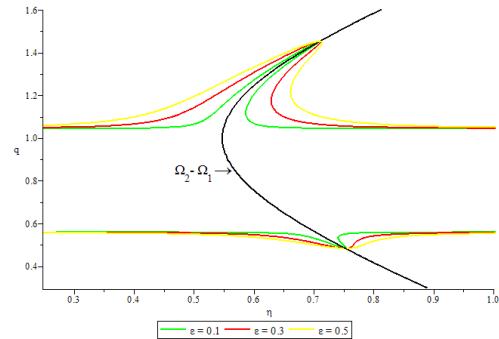
Sedangkan pada rh-C diperoleh batas kestabilan pada bidang $\sigma - q$ yang sesuai kondisi (28). Dengan menggunakan nilai Set I yang memungkinkan syarat rh-A terpenuhi, diperoleh daerah kestabilan solusi trivial berikut :



Gambar 3. Daerah kestabilan dari solusi trivial di bidang $\sigma - q$ dengan nilai $M = 0.1$, $M = 0.3$, dan $M = 0.4$

Gambar 3 menunjukkan bentuk dari daerah peredaman getaran eksitasi sendiri oleh eksitasi parametrik pada bidang $\sigma - q$. Pada daerah di antara dua kurva, getaran eksitasi sendiri dapat diredam sepenuhnya. Sedangkan daerah yang berada di luar kurva merupakan daerah solusi trivial tidak stabil dan menghasilkan solusi non-trivial. Dengan memperbesar nilai rasio massa M , maka daerah kestabilan solusi trivial juga semakin luas.

Terdapat cara lain untuk melihat daerah kestabilan solusi trivial, yaitu dengan mengambil daerah pada bidang $\eta - q$ yang memenuhi kondisi (29), diperoleh daerah kestabilan solusi trivial berikut :



Gambar 4. Daerah kestabilan dari solusi trivial ketika $M = 0.3$ pada bidang $\eta - q$ dengan nilai ϵ bervariasi

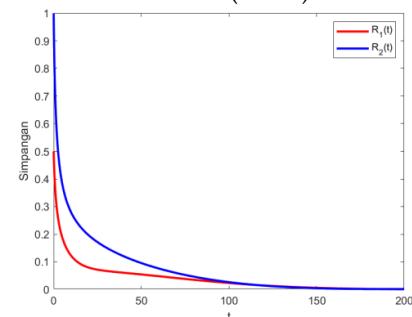
Gambar 4 menunjukkan bentuk dari daerah peredaman getaran eksitasi sendiri oleh eksitasi parametrik pada bidang $\eta - q$. Pada daerah di antara dua kurva, getaran eksitasi sendiri dapat diredam sepenuhnya. Garis kombinasi parametrik anti-resonansi $\eta_0 = \Omega_2 - \Omega_1$ merupakan daerah yang stabil. dengan memperbesar nilai amplitudo ϵ dari eksitasi parametrik maka daerah kestabilan solusi trivial juga semakin luas. Hal ini menunjukkan bahwa ϵ merupakan parameter yang sangat efektif untuk memperbesar daerah peredaman getaran eksitasi sendiri oleh getaran eksitasi parametrik.

Nilai-nilai Parameter pada Tabel 4 memungkinkan syarat rh-A dan rh-C terpenuhi, sehingga memiliki solusi trivial stabil. Namun, diluar solusi trivial dapat muncul solusi non-trivial. Berikut adalah simulasi numerik untuk solusi trivial dan solusi non-trivial.

1. Solusi Trivial

Solusi trivial dibagi menjadi dua kasus, yakni pada saat kasus resonansi eksak $\sigma = 0$ dan kasus resonansi non-eksak $\sigma \neq 0$.

a. Kasus resonansi eksak ($\sigma = 0$)

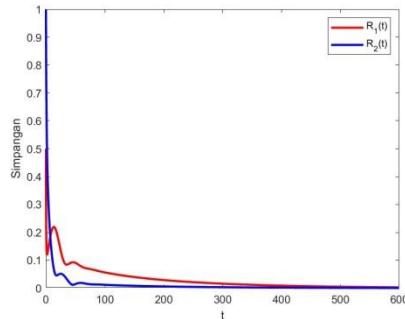


Gambar 5. Plot R_1 dan R_2 di daerah I untuk Parameter Set I ketika $M = 0.1$ dan $q = 0.8$ saat $\sigma = 0$

Gambar 5 menunjukkan pergerakan amplitudo R_1 dan R_2 di daerah I berdasarkan Gambar 2 yang semakin kecil dan konvergen menuju nol. Dari kurva

tersebut menunjukkan bahwa getaran eksitasi sendiri dapat diredam penuh oleh eksitasi parametrik. Hal ini sesuai dengan Gambar 3 di mana pada saat diambil nilai $M = 0.1$ dan $q = 0.8$ pada saat $\sigma = 0$, getaran eksitasi sendiri dapat diredam sepenuhnya oleh eksitasi parametrik yang merepresentasikan bahwa solusi trivial stabil.

b. Kasus resonansi non-eksak ($\sigma \neq 0$)



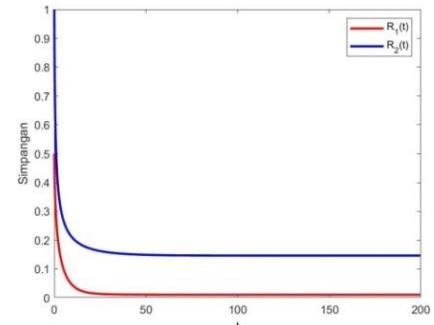
Gambar 6. Plot R_1 dan R_2 di daerah III untuk Parameter Set I ketika $M = 0.4$ dan $q = 1.1$ saat $\sigma = 0.2$

Gambar 6 menunjukkan pergerakan amplitudo R_1 dan R_2 di daerah III berdasarkan Gambar 2 yang semakin kecil dan konvergen menuju nol. Dari kurva tersebut menunjukkan bahwa getaran eksitasi sendiri dapat diredam penuh oleh eksitasi parametrik. Hal ini sesuai dengan Gambar 3 di mana pada saat diambil nilai $M = 0.4$ dan $q = 1.1$ pada saat $\sigma = 0.2$, getaran eksitasi sendiri dapat diredam sepenuhnya oleh eksitasi parametrik yang merepresentasikan bahwa solusi trivial stabil.

2. Solusi Non-trivial

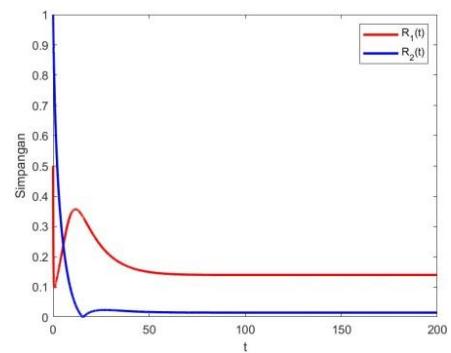
Solusi non-trivial dibagi menjadi dua kasus, yakni pada saat kasus resonansi eksak $\sigma = 0$ dan kasus resonansi non-eksak $\sigma \neq 0$.

a. Kasus resonansi eksak ($\sigma = 0$)



Gambar 7. Plot R_1 dan R_2 di daerah I untuk Parameter Set I ketika $M = 0.3$ dan $q = 0.2$ saat $\sigma = 0$

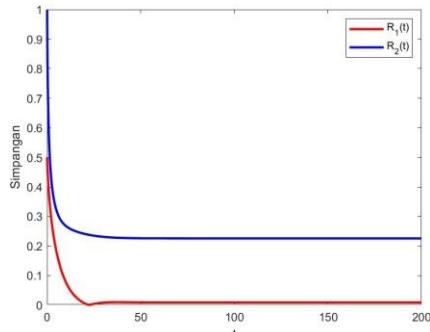
Gambar 7 menunjukkan pergerakan amplitudo R_1 dan R_2 di daerah I berdasarkan Gambar 2 dengan mengambil nilai $M = 0.3$, $q = 0.2$ pada saat $\sigma = 0$. Dari kurva tersebut menunjukkan bahwa getaran eksitasi sendiri dapat teredam sebagian oleh eksitasi parametrik.



Gambar 8. Plot R_1 dan R_2 di daerah III untuk Parameter Set I ketika $M = 0.3$ dan $q = 1.6$ saat $\sigma = 0$

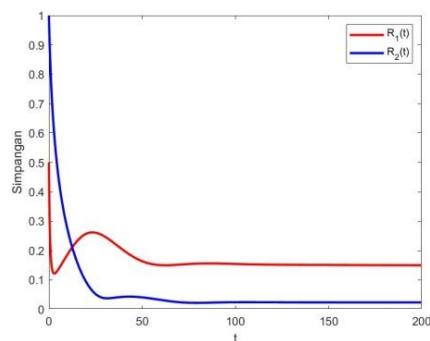
Gambar 8 menunjukkan pergerakan amplitudo R_1 dan R_2 di daerah III berdasarkan Gambar 2 dengan mengambil nilai $M = 0.3$, $q = 1.6$ pada saat $\sigma = 0$. Dari kurva tersebut menunjukkan bahwa nilai R_1 lebih besar dari R_2 yang artinya getaran eksitasi sendiri tidak dapat diredam oleh eksitasi parametrik.

b. Kasus resonansi non-eksak ($\sigma \neq 0$)



Gambar 9. Plot R_1 dan R_2 di daerah I untuk Parameter Set I ketika $M = 0.1$ dan $q = 0.4$ saat $\sigma = 0.2$

Gambar 9 menunjukkan pergerakan amplitudo R_1 dan R_2 di daerah I berdasarkan Gambar 2 dengan mengambil nilai $M = 0.1$, $q = 0.4$ pada saat $\sigma = 0.2$. Dari kurva tersebut menunjukkan bahwa getaran eksitasi sendiri dapat teredam sebagian oleh eksitasi parametrik.



Gambar 10. Plot R_1 dan R_2 di daerah III untuk Parameter Set I ketika $M = 0.1$ dan $q = 1.2$ saat $\sigma = 0.2$

Gambar 10 menunjukkan pergerakan amplitudo R_1 dan R_2 di daerah III berdasarkan Gambar 2 dengan mengambil nilai $M = 0.3$, $q = 1.2$ pada saat $\sigma = 0$. Dari kurva tersebut menunjukkan bahwa nilai R_1 lebih besar dari R_2 yang artinya getaran eksitasi sendiri tidak dapat diredam oleh eksitasi parametrik.

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis menunjukkan bahwa peredaman bergantung pada dua kondisi. Kondisi pertama menyatakan bahwa peredaman bergantung pada parameter peredam θ_{11} dan θ_{22} di mana jumlah kedua parameter tersebut harus positif. Kondisi kedua yaitu terkait kombinasi parametrik

anti-resonansi dengan melibatkan frekuensi eksitasi parametrik. Hasil juga menunjukkan bahwa dengan memperbesar nilai amplitudo ε dari eksitasi parametrik dapat memperluas daerah peredaman eksitasi sendiri. Selain itu, di luar solusi trivial juga dapat muncul solusi non-trivial.

SARAN

Untuk penelitian selanjutnya, dapat dianalisis bifurkasi dengan menjalankan parameter lain serta dapat memodelkan sistem dengan menambah gaya eksternal pada salah satu elemen atau kedua elemen.

DAFTAR PUSTAKA

- Abadi. (2001). On Self-Excited Auto-Parametric Systems. *Nonlinear Dynamics*, 24, 147-166.
- Abadi. (2003). *Nonlinear dynamics of self-excitation in autoparametric systems*. Faculteit Wiskunde en Informatica, Universiteit Utrecht.
- Aviansyah, A., & Wulandari, D. (2021). Analisa Perbandingan Getaran Pada Alat Mode Shapes Analizer Berdasarkan Data Empiris Dan Simulasi. *Jurnal Teknik Mesin*, 9(01), 27-36.
- Bakri, T., Nabergoj, & Tondl, A. (2007). Multi-frequency oscillations in self-excited systems. *Nonlinear Dynamics*, 48, 115-127.
- Bakri, T., Nabergoj, Tondl, A., & Verhulst, F. (2004). Parametric excitation in non-linear dynamics. *International journal of non-linear mechanics*, 39(2), 311-329.
- Bakri, T., & Verhulst, F. (2023). From A. Tondl's Dutch contacts to Neimark-Sacker-bifurcation. *Applied and Computational Mechanics*, 16(2).
- Bobryk, R. V., Yurchenko, D., & Bratus, A. S. (2017). Suppression of self-excited vibrations by a random parametric excitation. *Nonlinear Dynamics*, 90(3), 1671-1679. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3756-y>
- Boyce, W. E., Diprima, R. C., & Meade, D. B. (2017). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. In *The American Mathematical Monthly* (11th ed.). <https://doi.org/10.2307/2320609>
- Campbell, S. L., & Haberman, R. (2011). *Introduction to differential equations with dynamical systems*.
- Clark, R. N. (1996). *Control System Dynamics*. Cambridge University Press.
- David D. Nolte. (2019). *Introduction to Modern Dynamics*. Second Edition. Nolte, Oxford

- University Press.
- Diyanita, A. (2017). Analisis Respons Vibrasi Bangunan Bertingkat Tinggi Untuk Deteksi Kerusakan. Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- Dohnal, F., & Verhulst, F. (2008). Averaging in vibration suppression by parametric stiffness excitation. *Nonlinear Dynamics*, 54, 231-248.
- Ecker, H. (2003). *Suppression of self-excited vibrations in mechanical systems by parametric stiffness excitation* (Doctoral dissertation).
- Fatimah, S., & Verhulst, F. (2003). Suppressing flow-induced vibrations by parametric excitation. *Nonlinear Dynamics*, 31, 275-298.
- Goode, S. W., & Annin, S. A. (2017). *Differential Equations & Linear Algebra*.
- Grover, G. K. (2009). Mechanical vibrations (8th ed.). Nem Chand & Bros.
- Holland, N. L. (2008). *The Dynamics of Coupled Oscillators*. Victoria University of Wellington.
- Krodkiewski, J. M. (2008). *Mechanical vibration 436-431 Mechanics 4 Unit 2*. 247.
- Kurniawati, E. (2020). Analisis Penyelesaian Sistem Pegas Massa Dengan Eksitasi Parametrik Menggunakan Metode Averaging. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 8(2), 174-182.
- Kuznetsov, Y. A. (2004). *Elements of Applied Bifurcation Theory-Third Edition*. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3978-7>.
- Nayfeh, A. H. (2024). *Introduction to perturbation techniques*. John Wiley & Sons.
- Nayfeh, A. H., & Mook, D. T. (1995). *Nonlinear Oscillations*.
- Olsder, G. J., & van der Woude, J. W. (1998). Mathematical systems theory (2nd ed.). Delft University Press.
- Püst, L., & Tondl, A. (2008). System with a non-linear negative self-excitation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43(6), 497-503. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2007.10.002>
- Ramadhan, A. H., Artiani, G. P., & Triastuti, N. S. (2024). Analisis Kinerja Struktur Bangunan Bertingkat Dengan Metode Respon Spektrum Pada Projek Gedung Koni Jakarta Pusat. *Jurnal Ilmiah Sains Dan Teknologi*, 677-700.
- Rao, S. S. (2018). Mechanical Vibrations Sixth Edition in SI Units. In *Mechanical Vibrations*.
- Rosanto, T., & Susastriwan, A. A. P. (2021). *Getaran Mekanis*. AKPRIND PRESS.
- Scott, R. (2001). In the wake of Tacoma. *Suspension bridges and the quest for aerodynamic stability*. ASCE, Reston.
- Tse, F. S., Morse, I. E., & Hinkle, R. T. (1963). *Mechanical vibrations*. Boston: Allyn and Bacon.
- Verhulst, F. (1989). *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*.
- Wang, Y., Chen, X., & Li, Y. (2020). Nonlinear self-excited forces and aerodynamic damping associated with vortex-induced vibration and flutter of long span bridges. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 204, 104207.