MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 13 No 03
Tahun 2025

# RUANG METRIK EUCLIDEAN DALAM ANALISIS SIFAT KONVERGENSI BARISAN DAN ASPEK KELENGKAPANNYA

**Rabbiatul Adawiah**
Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mulawarman, Samarinda, Indonesia
adawiahrabbiatul4@gmail.com

**Sri Wigantono**
Laboratorium Pemodelan Matematika dan *Machine Learning*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mulawarman, Samarinda, Indonesia
*sriwigantono@fmipa.unmul.ac.id

**Qonita Qurrota A'yun**
Laboratorium Matematika Dasar, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mulawarman, Samarinda, Indonesia
qonitaqurrota@fmipa.unmul.ac.id

**Abstrak**

Penelitian ini merupakan studi teoretis dalam bidang matematika murni yang mengkaji sifat konvergensi barisan dan kelengkapan pada ruang metrik Euclidean. Fokus utama terletak pada ruang Euclidean berdimensi hingga $\mathbb{R}^n$ yang dilengkapi dengan metrik Euclidean standar $d_e: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka dengan mengumpulkan dan mempelajari berbagai sumber pustaka. Pada penelitian ini akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{R}^n, d_e)$ merupakan ruang metrik. Selain itu, akan disajikan sifat-sifat dari ruang Euclidean dan ruang metrik yang akan digunakan untuk membuktikan konvergensi barisan pada ruang metrik Euclidean. Lebih lanjut, dengan menggunakan sifat-sifat dari barisan Cauchy, akan ditunjukkan $(\mathbb{R}^n, d_e)$ merupakan ruang metrik lengkap. Penelitian ini menunjukkan bahwa konvergensi barisan dalam ruang metrik Euclidean ekuivalen dengan konvergensi barisan di $\mathbb{R}$. Konvergensi barisan di $\mathbb{R}^n$ dilengkapi dengan norma Euclidean, yaitu norma yang berasal dari hasil kali dalam standar (*dot product*). Lebih lanjut, ruang metrik Euclidean dikategorikan sebagai ruang metrik lengkap, karena kelengkapannya berkaitan dengan sifat konvergensi barisan dan keberadaan barisan Cauchy yang konvergen di dalamnya.

**Kata Kunci:** *barisan Cauchy, konvergensi barisan, kelengkapan, ruang Euclidean, ruang metrik*.

**Abstract**

*This research is a theoretical study in pure mathematics that examines the convergence properties of sequences and completeness in Euclidean metric spaces. The main focus is on Euclidean spaces of finite dimension $\mathbb{R}^n$ equipped with the standard Euclidean metric $d_e: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. The method used in this research is a literature review, which involves collecting and studying various sources. In this study, it will be shown that $(\mathbb{R}^n, d_e)$ is a metric space. Additionally, the properties of Euclidean spaces and metric spaces will be presented, which will be used to prove the convergence of sequences in Euclidean metric spaces. Furthermore, using the properties of Cauchy sequences, it will be shown that $(\mathbb{R}^n, d_e)$ is a complete metric space. This research shows that the convergence of sequences in Euclidean metric spaces is equivalent to the convergence of sequences in $\mathbb{R}$. The convergence of sequences in $\mathbb{R}^n$ is equipped with the Euclidean norm, which is the norm derived from the standard inner product (dot product). Furthermore, Euclidean metric spaces are categorized as complete metric spaces because their completeness is related to the convergence properties of sequences and the existence of convergent Cauchy sequences within them.*

***Keywords:*** *Cauchy sequence, sequence convergence, completeness, Euclidean space, metric space.*

## PENDAHULUAN

Ruang metrik merupakan konsep dasar dalam analisis matematika yang membahas jarak, limit, dan kontinuitas. Ruang metrik didefinisikan sebagai himpunan yang dilengkapi fungsi jarak (metrik) yang memenuhi sifat non-negatif, simetri, dan ketaksamaan segitiga (Rudin, 1953). Salah satu contoh ruang metrik adalah ruang Euclidean berdimensi- $n$ ($\mathbb{R}^n$) dengan norma Euclidean yang berasal dari hasil kali dalam standar (Lay, dkk., 2016). Ruang Euclidean tidak hanya menjadi dasar dalam analisis real dan geometri, tetapi juga memiliki struktur yang kaya untuk dikaji secara teoretis.

Dua konsep penting dalam ruang metrik adalah konvergensi barisan dan kelengkapan. Konvergensi berkaitan dengan limit barisan, sedangkan kelengkapan berkaitan dengan limit dari barisan Cauchy (Kreyszig, 1978). Menurut Soejono dan Sumarno (2004), barisan adalah susunan bilangan yang teratur dan berpola. Ruang metrik Euclidean diketahui lengkap (Rosenlicht, 1986), namun kajian mendalam mengenai hubungan antara konvergensi barisan dan kelengkapan masih relevan untuk dikaji.

Kajian sebelumnya seperti oleh Rudin (1953) lebih menekankan ruang metrik dengan $\mathbb{R}^n$ sebagai contoh, sementara literatur lanjutan seperti Conway (1994) berfokus pada ruang Banach dan Hilbert, sehingga kajian mengenai ruang metrik Euclidean berdimensi hingga kerap terlewatkan. Studi oleh Nachbar (2017), Alzubaidi (2024), dan León-Saavedra, dkk. (2019) turut membahas aspek kelengkapan dan konvergensi barisan dari berbagai sudut pandang. Rogers (2019) menyoroti hubungan ruang Euclidean dan ruang metrik, tetapi tidak secara langsung mengkaji aspek konvergensi barisan dan kelengkapan dalam ruang metrik Euclidean. Kesenjangan ini menunjukkan perlunya kajian yang membahas lebih dalam sifat konvergensi barisan dan kelengkapan pada ruang metrik Euclidean, khususnya berdimensi satu. Penelitian ini bertujuan menganalisis hal tersebut dengan merujuk pada literatur Shirali dan L (2006) serta pendekatan metrik dari buku Nachbar (2017).

## KAJIAN TEORI

Bagian ini memuat teori dan konsep dasar yang dibutuhkan untuk menyelidiki konvergensi barisan dan kelengkapan pada ruang metrik Euclidean.

**Definisi 1**

Jika $n$ merupakan suatu bilangan bulat positif, maka tupel n berurutan adalah barisan dari n bilangan real $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Himpunan semua tupel $n$ berurutan disebut ruang berdimensi n dan dinotasikan dengan $\mathbb{R}^n$ . Secara umum, vektor $\boldsymbol{u}$ di $\mathbb{R}^n$ dinotasikan sebagai $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ (Anton dan Rorres, 2014).

**Definisi 2**

Dua vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ pada $\mathbb{R}^n$ disebut sama jika

$$u_1 = v_1,\ u_1 = v_2, \ldots, u_n = v_n.$$

$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ didefinisikan sebagai

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n),$$

dan jika $k$ adalah suatu skalar sebarang, maka kelipatan skalar ku didefinisikan sebagai

$$k\boldsymbol{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

(Anton dan Rorres, 2005).

**Teorema 3**

Untuk sebarang vektor $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ pada $\mathbb{R}^n$ dan sebarang skalar $a, b \in \mathbb{R}$, berlaku:

i. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (sifat asosiatif pada penjumlahan)
ii. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u}$ (identitas penjumlahan)
iii. $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}$ (invers penjumlahan)
iv. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (sifat komutatif pada penjumlahan)
v. $a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$ (sifat distributif pada penjumlahan vektor)
vi. $(a + b)\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u}$ (sifat distributif pada penjumlahan skalar)
vii. $(ab)\boldsymbol{u} = a(b\boldsymbol{u})$ (sifat asosiatif perkalian)
viii. $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ (identitas perkalian)

(Lipschutz dan Lipson, 2001).

**Definisi 4**

Jika $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ merupakan vektor di $\mathbb{R}^n$, maka hasil kali dalam dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ dinotasikan dengan $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ dan didefinisikan sebagai berikut

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$$

(Anton dan Rorres, 2004).

**Teorema 5**

Misalkan $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ , $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ , dan $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$. Hasil kali dalam di $\mathbb{R}^n$ memenuhi sifat-sifat berikut:

i. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$
ii. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$
iii. $(\lambda\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = \lambda(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$
iv. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}$. Lebih lanjut, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

(Anton dan Rorres, 2014).

**Definisi 6**

Misalkan $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, norma (panjang) yang dinotasikan sebagai $||\boldsymbol{u}||$ dari vektor $\boldsymbol{u}$ didefinisikan sebagai

$$||\boldsymbol{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

(Nicholson, 2013).

**Teorema 7**

Misalkan $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$. Norma di $\mathbb{R}^n$ memenuhi sifat-sifat berikut:

i. $||\boldsymbol{u}|| \geq 0$
ii. $||\boldsymbol{u}|| = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$
iii. $||\lambda \boldsymbol{u}|| = |\lambda|\, ||\boldsymbol{u}||$

(Greub, 2012).

**Definisi 8**

Misalkan $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ merupakan vektor di $\mathbb{R}^n$, didefinisikan jarak antara vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ sebagai fungsi $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, yaitu

$$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = ||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}||$$

(Nicholson, 2013).

**Teorema 9**

Untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, berlaku

$$|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| \leq ||\boldsymbol{u}||\, ||\boldsymbol{v}||$$

(Hoffman, 2019).

**Teorema 10**

Untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ dan $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ didefinisikan sebagai jarak antara vektor $\boldsymbol{u}$ dan vektor $\boldsymbol{v}$, berlaku

i. $||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|| \leq ||\boldsymbol{u}|| + ||\boldsymbol{v}||$
ii. $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \leq d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$

(Shurman, 2016).

**Definisi 11**

Barisan bilangan real ($\mathbb{R}$) merupakan fungsi yang didefinisikan pada bilangan asli $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, \}$ dan rangenya berada di bilangan real (Bartle dan Sherbet, 2000).

**Teorema 12**

Barisan konvergen di $\mathbb{R}$ memiliki tepat satu limit (Bartle dan Sherbet, 2000).

**Definisi 13**

Barisan dalam ruang Euclidean berdimensi-$n$, yang dilambangkan sebagai $\mathbb{R}^n$ adalah fungsi dari himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ ke $\mathbb{R}^n$. Dengan kata lain, suatu barisan $(\boldsymbol{x}^k)$ dalam $\mathbb{R}^n$ adalah himpunan terurut dari vektor-vektor: $(\boldsymbol{x}^k) = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$, dengan $x_i^k \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n, k \in \mathbb{N}$

(Rudin, 1953).

**Definisi 14**

Barisan bilangan real $(x_n)$ dikatakan terbatas jika terdapat bilangan real $M > 0$ sedemikian sehingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ (Bartle dan Sherbet, 2000).

**Definisi 15**

Barisan $X = (x_n)$ di $\mathbb{R}$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$ atau $x$ merupakan limit dari barisan $(x_n)$, jika $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, k(\varepsilon)$ sehingga untuk semua $n \geq k(\varepsilon)$ berlaku

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

(Bartle dan Sherbet, 2000).

**Teorema 16**

Jika barisan $(x_n)$ konvergen, maka $(x_n)$ terbatas (Bartle dan Sherbet, 2000).

**Definisi 17**

Misalkan $(\boldsymbol{x}^k)$ merupakan barisan titik-titik di $\mathbb{R}^n$ dan misalkan $\boldsymbol{x}$ adalah titik di $\mathbb{R}^n$. Barisan $(\boldsymbol{x}^k)$dikatakan konvergen ke $\boldsymbol{x}$ dengan syarat $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}$ sehingga

$d(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x}) < \varepsilon$ untuk semua indeks $k \geq N$

(Fitzpatrick, 2009).

**Teorema 18**

Jika $I_n := [a_n, b_n]$ dengan $n \in \mathbb{N}$ adalah suatu barisan bersarang dari interval tertutup dan terbatas, dengan panjang interval $b_n - a_n$ memenuhi

$$inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$$

maka bilangan $\xi$ yang termuat di interval In untuk semua $n \in \mathbb{N}$ adalah tunggal (Bartle dan Sherbet, 2000).

**Teorema 19 (Bolzano-Weierstrass)**

Setiap barisan terbatas di $\mathbb{R}$ memiliki subbarisan konvergen (Bartle dan Sherbet, 2000).

**Definisi 20**

Barisan Cauchy adalah barisan $(\boldsymbol{x}^n)$ dengan sifat $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}$, sehingga

$\| \boldsymbol{x}^n - \boldsymbol{x}^m \| < \varepsilon$dengan $m, n \geq \mathbb{N}$

(Hoffman, 2019).

**Teorema 21**

Setiap barisan konvergen di $\mathbb{R}^n$ adalah barisan Cauchy (Rosenlicht, 1986).

**Teorema 22**

Setiap barisan Cauchy di $\mathbb{R}^n$ konvergen (Rosenlicht, 1986).

**Teorema 23**

Ruang bilangan real $\mathbb{R}$ merupakan ruang yang lengkap (Nachbar, 2017).

## METODE

Penelitian ini merupakan penelitian teoritis yang bersifat kualitatif analitik dengan pendekatan analisis berdasarkan definisi, teorema, lemma, dan proposisi pada ruang $\mathbb{R}^n$. Penelitian ini tidak melibatkan pengumpulan data, namun bersumber dari literatur dan penalaran logis. Metode yang digunakan adalah studi pustaka dengan mengumpulkan dan mempelajari berbagai sumber pustaka berupa buku, jurnal, dan hasil penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan konvergensi barisan dan kelengkapan pada ruang metrik Euclidean.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas mengenai konsep dasar ruang metrik. Selanjutnya, setelah mengetahui konsep dasar ruang metrik, akan diberikan konsep ruang metrik Euclidean. Di dalam ruang $\mathbb{R}^n$, operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar menjadi fondasi strukturalnya. Namun, ruang $\mathbb{R}^n$ juga dapat dianalisis lebih dalam dari sudut pandang analisis matematis, yakni sebagai ruang metrik dengan konsep jarak dan limit menjadi pusat kajian. Sebelum memasuki bagian utama pada pembahasan, akan diberikan konsep ruang metrik sebagai dasar untuk pengembangan ruang metrik Euclidean yaitu sebagai berikut.

**Definisi 24**

Ruang metrik $(X,d)$ adalah himpunan $X$ yang elemen- elemennnya disebut titik, dengan pemetaan $d : X \times X \to \mathbb{R}$ yang disebut jarak (metrik) sedemikian sehingga, untuk setiap $x,y,z \in X$, memenuhi aksioma berikut:

i. $d(x,y) \geq 0$ (definit positif);
ii. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
iii. $d(x,y) = d(y,x)$ (simetris); dan
iv. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. (ketaksamaan segitiga)

(Sohrab, 2003).

Selanjutnya diberikan contoh-contoh metrik beserta pembuktiannya, yaitu sebagai berikut:

**Contoh 25**

Diberikan sebarang himpunan tak kosong $X$ dan $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Didefinisikan dengan

$$d(x,y) = \begin{cases} 1.\ jika\ x \neq y \\ 0, jika\ x = y \end{cases}$$

$d$ adalah sebuah metrik pada $X$ dan $(X,d)$ adalah ruang metrik diskrit (Bartle dan Sherbet, 2000).

**Bukti.**

Akan dibuktikan fungsi $d$ merupakan metrik pada $X$, yaitu:

1) Untuk $x,y \in X, d(x,y)$ hanya dapat bernilai 0 dan 1. Maka jelas bahwa $d(x,y) \geq 0$.
2) Akan ditunjukkan bahwa $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
   ($\Leftarrow$) Jika $x = y$, maka menurut definisi metrik diskrit didapat $d(x,y) = 0$.
   ($\Rightarrow$) Jika $d(x,y) = 0$, maka menurut definisi metrik diskrit didapat $x = y$.
3) Akan ditunjukkan $\forall\, x,y \in X$ berlaku $\mathrm{d}(x,y) = d(y,x)$.
   a. Jika $x = y$, maka $d(x,y) = 0$ sehingga $d(y,x) = 0$ berdasarkan sifat simetris.
   b. Jika $x \neq y$, maka $d(x,y) = 1$ sehingga berdasarkan sifat simetris didapatkan $d(y,x) = 1$.

   Dengan demikian, terbukti dalam dua kasus bahwa $d(x,y) = d(y,x)$ untuk $x = y$ dan $x \neq y$.
4) Akan ditunjukkan bahwa d $(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Ambil sebarang $x,y,z \in X$. Ada dua kemungkinan yaitu $x = y$ atau $x \neq y$.
   a. Jika $x = y$ maka $d(x,y) = 0 \leq d(x,z) + d(z,y)$.
   b. Untuk kasus $x \neq y$ ada 3 kemungkinan, yaitu:
      i. Jika $x \neq y$, maka $y \neq z$ sehingga didapat $d(x,y) = 1$, $d(x,z) = 0$, dan $d(y,z) = 1$ . Akibatnya, $d(x,y) = 1 \leq 0+1 \leq d(x,z) + d(y,z)$.
      ii. Jika $x \neq z$, maka $y = z$ sehingga didapat $d(x,y) = 1$, $d(x,z) = 1$, dan $d(y,z) = 0$ . Akibatnya, $d(x,y) = 1 \leq 1+0 \leq d(x,z) + d(y,z)$.
      iii. Jika $z \neq x$ dan $z \neq y$ maka $d(x,y) = 1 \leq 1+1 \leq d(x,z) + d(y,z)$.

   Dengan demikian, ketaksamaan segitiga terpenuhi. Jadi, $d(x,y)$ terbukti metrik pada $X$ dan $(X,d)$ merupakan ruang metrik diskrit. ■

**Contoh 26**

Pada himpunan $\mathbb{R}$ dapat didefinisikan metrik yaitu $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $d(x,y) = |x - y|$ untuk setiap $x,y \in \mathbb{R}$ (Rahmasari, 2016).

**Bukti.**

Akan dibuktikan fungsi $d$ merupakan metrik pada $X$.

1) Jelas bahwa $d(x,y) \geq 0$ karena $|x - y| \geq 0$.
2) Akan ditunjukkan bahwa $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
   ($\Leftarrow$) Jika $x = y$, maka $d(x,y) = |x - y| = |x - x| = 0$.
   ($\Rightarrow$) Jika $d(x,y) = 0$, maka $|x - y| = 0$. Kemudian, kuadratkan kedua ruas, diperoleh
   $$\begin{aligned} (|x - y|)^2 &= 0 \\ (x - y)^2 &= 0 \\ x - y &= \sqrt{0} \\ x - y &= 0 \\ x &= y \end{aligned}$$
   Dengan demikian, terbukti bahwa $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
3) Akan ditunjukkan $\forall\, x,y \in X$ berlaku $d(x,y) = d(y,x)$, yaitu
   $$\begin{aligned} d(x,y) &= |x - y| \\ &= |-(y - x)| \end{aligned}$$

$= |-1|\,|y-x|$
$= 1\,|y-x|$
$= |y-x|$
$= d(y,x)$

Dengan demikian, terbukti bahwa $d(x,y) = d(y,x)$.

4) Akan ditunjukkan bahwa $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Ambil sebarang $x, y, z \in X$, diperoleh:

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |x-z| \\ &= |x-y+y-z| \\ &\leq |x-y| + |y-z| \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

Jadi, $d(x,y)$ terbukti metrik pada $X$. ■

**Definisi 27**

Barisan pada ruang metrik $(X,d)$ adalah fungsi $f : \mathbb{N} \to X$ dengan domain $\mathbb{N}$ dan daerah hasilnya termuat dalam $X$. Barisan dinotasikan dengan $(x_n : n \in \mathbb{N})$ (Anwar dan Manuharawati, 2021).

**Definisi 28**

Suatu barisan $(x_n)$ dari titik-titik dalam suatu ruang metrik $(X,d)$ dikatakan konvergen ke $x \in X$, dinotasikan dengan $x_n \to x$ untuk $n \to \infty$ atau

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

jika barisan bilangan real tak-negatif $d(x_n,x) \to 0$ saat $n \to \infty$; dengan kata lain, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_n,x) < \varepsilon$ untuk $n \geq N$ (Yunus, 2005).

**Contoh 29**

Diberikan ruang metrik $(\mathbb{R},d)$ dengan $d(x,y) = |x-y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Barisan $(x_n)$ dengan $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ untuk $n = 1, 2, \ldots$ adalah barisan yang konvergen ke 1 pada ruang metrik $(\mathbb{R},d)$ (Rahmasari, 2016).

**Bukti.**

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$, menurut sifat Archimedes terdapat bilangan asli $N \in \mathbb{N}$ dengan $N > \frac{1}{\varepsilon}$, sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$\begin{aligned} |x_n - 1| &= \left|1 - \tfrac{1}{n} - 1\right| \\ &= \left|-\frac{1}{n}\right| \\ &= \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{N} < \varepsilon \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(x_n)$ konvergen ke 1.■

**Contoh 30**

Pada ruang metrik biasa $(\mathbb{R},d)$ dengan $d(x,y) = |x-y|$, barisan $(x_n)$ dengan $x_n = \frac{1}{n+3}$ konvergen ke 0 (Rohma, 2024).

**Bukti.**

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$, menurut sifat Archimedes terdapat bilangan asli $N \in \mathbb{N}$ dengan $N > \frac{1}{\varepsilon}$, sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$\begin{aligned} |x_n - 0| &= \left|\tfrac{1}{n+3} - 0\right| \\ &= \left|\frac{1}{n+3}\right| \\ &= \frac{1}{n+3} \\ &\leq \frac{1}{N} < \varepsilon \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(x_n)$ konvergen ke 0.■

Selanjutnya, diberikan Teorema 4.8 terkait hubungan barisan konvergen dan limit.

**Teorema 31**

Sebuah barisan konvergen pada metrik $(X,d)$ memiliki tepat satu limit (Kreyszig, 1978).

**Bukti.**

Misalkan $(x_n)$ konvergen ke titik $x$ dan $y$, akan dibuktikan $x = y$. Karena $(x_n)$ konvergen ke titik $x$ dan $y$, terdapat bilangan bulat $N_1$ dan $N_2$ sehingga untuk setiap $n \geq N_1$, berlaku

$$d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan untuk setiap $n \geq N_2$, berlaku

$$d(x_n,y) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Misalkan $N = maks\{N_1, N_2\}$, diperoleh

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,x_n) + d(x_n,y) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa untuk sebarang $\varepsilon > 0$ berlaku $d(x,y) < \varepsilon$, sehingga diperoleh bahwa $d(x,y) = 0$. Artinya, $x = y$, sehingga Sebuah barisan konvergen pada metrik $(X,d)$ memiliki tepat satu limit.■

**Lemma 32**

Diberikan $X = (X,d)$ suatu ruang metrik. Jika $(x_n) \to x$ dan $(y_n) \to y$ pada $X$, maka $d(x_n,y_n) \to d(x,y)$ (Kreyszig, 1978).

**Bukti.**

Perhatikan bahwa $d$ merupakan metrik. Sehingga berlaku ketaksamaan segitiga, yaitu

$$d(x_n,y_n) \leq d(x_n,x) + d(x,y) + d(y,y_n)$$
$$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y_n) + d(y_n,y)$$

sehingga didapatkan

$$d(x_n,y_n) - d(x,y) \leq d(x_n,x) + d(y,y_n)$$
$$-(d(x,x_n) + d(y_n,y)) \leq d(x_n,y_n) - d(x,y)$$

dan akibatnya

$$\begin{aligned} -(d(x,x_n) + d(y_n,y)) &\leq d(x_n,y_n) - d(x,y) \\ &\leq d(x_n,x) + d(y,y_n) \end{aligned}$$

dan didapatkan

$$|d(x_n,y_n) - d(x,y)| \leq d(x_n,x) + d(y_n,y).$$

Perhatikan bahwa $(x_n) \to x$ dan $(y_n) \to y$, artinya $d(x_n, x) \to 0$ dan $d(y_n, y) \to 0$, diperoleh

$$d(x_n, x) + d(y_n, y) \to 0$$

hal tersebut mengimplikasikan

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \to 0$$

ketika $n \to \infty$. Sehingga $d(xn, yn) \to d(x, y)$ Jadi terbukti jika $(x_n) \to x$ dan $(y_n) \to y$ pada $X$, maka $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$. ∎

**Definisi 33**

Diberikan ruang metrik $(X, d)$. Suatu barisan $(x_n)$ di $X$ disebut sebagai barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli $m, n \geq N$ berlaku $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ (Dahoklory dan Patty, 2023).

**Contoh 34**

Diberikan ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan $d(x, y) = |x - y|$. Barisan $(x_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)$ merupakan barisan Cauchy di ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ (Rohma, 2024).

**Bukti.**

Dari Definisi 4.10 pada ruang metrik, diambil sebarang $\varepsilon > 0$, menurut sifat Archimedes terdapat bilangan asli $N \in \mathbb{N}$ dengan $N > \frac{2}{\varepsilon}$, sehingga untuk setiap $n, m \geq N$ berlaku

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \left|\frac{n+1}{n} - \frac{m+1}{m}\right| \\
&= \left|\left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{m}{m} + \frac{1}{m}\right)\right| \\
&= \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{m}\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\
&= \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \\
&= \frac{2}{N} < \frac{2}{n} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa barisan $(x_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)$ adalah barisan Cauchy di ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan $d(x, y) = |x - y|$.

**Lemma 35**

Setiap barisan konvergen di ruang metrik $(X, d)$ adalah sebuah barisan Cauchy (Dahoklory dan Patty, 2023).

**Bukti.**

Misalkan $(x_n)$ sebuah barisan di $X$ dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, artinya $\forall \varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli $N$ sehingga $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk semua $m, n \geq N$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x) + d(x, x_n) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Jadi $(x_n)$ adalah barisan Cauchy. ∎

**Definisi 36**

Suatu ruang metrik $(X, d)$ disebut ruang metrik lengkap jika setiap barisan Cauchy di $X$ merupakan barisan konvergen (dalam arti memiliki limit yang merupakan anggota dari $X$) (Maddox, 1970).

Selanjutnya, diberikan contoh ruang metrik lengkap dan ruang metrik tidak lengkap sebagai berikut.

**Contoh 37**

Misalkan $C[0, 1]$ menunjukkan semua fungsi kontinu pada interval $[0, 1]$ di $\mathbb{R}$. Untuk fungsi $f, g$ di $C[0, 1]$, didefinisikan

$$d_\infty(f, g) = sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\},$$

ruang metrik $(C[0, 1], d_\infty)$ merupakan ruang metrik yang lengkap (Bartle dan Sherbet, 2000).

**Bukti.**

Misalkan $(f_n)$ adalah barisan Cauchy di $(C[0, 1], d_\infty)$, artinya $\forall \varepsilon > 0$, terdapat $H \in \mathbb{N}$ sehingga untuk semua $n. m \geq H$ berlaku

$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, untuk setiap $x \in [0, 1]$. (4.1)

Jadi, untuk setiap $x \in [0, 1]$, $(f_n(x))$ adalah barisan Cauchy.

Selanjutnya, karena $\mathbb{R}$ lengkap, sehingga $(f_n(x))$ konvergen ke $f(x)$. Didefinisikan:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad \text{untuk setiap } x \in [0, 1]$$

Dari Persamaan 4.1, untuk setiap n $\geq H$ dan setiap $x \in [0, 1]$. Berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

hal tersebut menunjukkan $(f_n)$ konvergen uniform ke $f$ di $[0, 1]$. Perhatikan bahwa batas uniform dari barisan fungsi kontinu adalah kontinu. Akibatnya, $f \in [0, 1]$. Jadi, ruang metrik $(C[0, 1], d_\infty)$ merupakan ruang metrik yang lengkap. ∎

**Contoh 38**

Diberikan ruang metrik $(\mathbb{Q}, d)$ dari bilangan rasional, dengan metrik

$$d(x, y) = |x - y|,$$

merupakan ruang metrik yang tidak lengkap (Bartle dan Sherbet, 2000).

**Bukti.**

Jika $(x_n)$ merupakan barisan bilangan rasional yang konvergen ke $\sqrt{2}$, maka berdasarkan Lemma 4.12

$(x_n)$ adalah barisan Cauchy di $\mathbb{Q}$. Namun, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, sehingga $(x_n)$ tidak konvergen di $\mathbb{Q}$. Akibatnya, berdasarkan Definisi 4.13 $(\mathbb{Q}, d)$bukan ruang metrik lengkap. ∎

Selanjutnya, akan diberikan definisi ruang metrik Euclidean.

Misalkan diberikan himpunan tak kosong $X$, dengan $X = \mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n\}$ adalah himpunan bilangan real dengan $n$ -tupel. $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ dapat menjadi ruang vektor dengan memperkenalkan operasi standar penjumlahan dan perkalian skalar melalui:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)\\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),\end{aligned}$$

$$\lambda\boldsymbol{x} = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n),$$
$$\lambda \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n,$$

Untuk $\mathbb{R}^n$ diperkenalkan fungsi jarak (metrik) standar sebagai berikut:

Yang memenuhi sifat-sifat berikut:

$(m1)$ $d_e(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \ge 0 \,\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

$(m2)$ $d_e(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

$(m3)$ $d_e(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d_e(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

$(m4)$ $d_e(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \le d_e(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_e(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$

**Definisi 39**

Himpunan pasangan $(\mathbb{R}^n, d_e)$ disebut ruang metrik Euclidean jika

i. $\mathbb{R}^n$ adalah sebuah himpunan.
ii. $d_e : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ memenuhi $(m1) - (m4)$.

(Shirali dan L).

Selanjutnya, diberikan contoh-contoh ruang metrik Euclidean beserta buktinya, yaitu sebagai berikut.

**Contoh 40**

Diberikan $X = \mathbb{R}$ yang merupakan ruang Euclidean berdimensi-1 dan didefinisikan

$$d(x, y) = |x - y|$$

Pasangan $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang metrik (Kreyszig, 1978).

**Bukti.**

Akan dibuktikan fungsi $d$ merupakan metrik pada $\mathbb{R}$, yaitu:

1) Diketahui bahwa nilai mutlak suatu bilangan real selalu tidak negatif, yaitu $|x - y| \ge 0$. Sehingga $d(x, y) = |x - y| \ge 0$.
2) Akan ditunjukkan bahwa $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
   $(\Leftarrow)$ Jika $x = y$, maka didapat $d(x, y) = |x - x| = 0$.
   $(\Rightarrow)$ Jika $d(x, y) = 0$, maka $|x - y| = 0$, menurut definisi nilai mutlak, didapat
   $$|x - y| = \begin{cases} (x - y), jika\ x \ge y \\ -(x - y), jika\ x < y \end{cases}$$
   Jika $x \ge y$, maka $(x - y) = 0 \to x = y$ dan jika $x < y$, maka $-(x - y) = 0 \to x = y$.
3) Akan ditunjukkan $\forall\, x, y \in R$ berlaku $d(x, y) = d(y, x)$. Dari sifat nilai mutlak, didapat $|x - y| = |y - x| \quad \forall\, x, y \in R$. sehingga $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$.
4) Akan ditunjukkan bahwa $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$. Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{R}$. Diperoleh
   $$\begin{aligned} d(x, z) &= |x - z| \\ &= |x - y + y - z| \\ &\le |x - y| + |y - z| \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$
   Sehingga ketaksamaan segitiga terpenuhi
   Jadi, $d(x, y)$ terbukti metrik pada $\mathbb{R}$ dan $(\mathbb{R}, d)$ merupakan ruang metrik. ∎

**Contoh 41**

Misalkan $V$ adalah ruang vektor atas bilangan real, yaitu terdapat fungsi norma:

$$|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$$

$|| \cdot ||$ adalah ruang bernorma yang memenuhi sifat-sifat berikut.

i. $||\boldsymbol{x}|| = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
ii. $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \le ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$.
iii. $||\alpha\boldsymbol{x}|| = |\alpha|\, ||\boldsymbol{x}||$

Dari norma, didefinisikan fungsi metrik sebagai berikut.

$$d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||$$

Sebagaimana di ruang vektor Euclidean terdapat konsep norma, sehingga akan ditunjukkan $(X, d_n)$ adalah ruang metrik bernorma.

**Bukti.**

Akan dibuktikan fungsi $d_n$ merupakan metrik pada $X$, yaitu:

1) Berdasarkan Teorema 2.7, norma selalu tidak negatif, akibatnya $d_n = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| \ge 0$.
2) Akan ditunjukkan bahwa $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Berdasarkan Teorema 2.7, diperoleh $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, akibatnya $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.
3) Akan ditunjukkan $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ berlaku $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$. Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$. Diperoleh
   $$\begin{aligned} d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$
$$= ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}||$$
$$= d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

Sehingga $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

4) Akan ditunjukkan bahwa $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \le d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$. Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}$. Diperoleh
$$d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}||$$
$$= ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}||$$
$$\le ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| + ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}||$$
$$= d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$
Sehingga ketaksamaan segitiga terpenuhi.

Jadi, $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ terbukti metrik pada $X$ dan $(X, d_n)$ merupakan ruang metrik. ■

Selanjutnya, diberikan pembuktian mengenai konvergensi barisan di ruang metrik Euclidean pada Teorema 4.19 berikut.

**Teorema 42**

Misalkan $X = \mathbb{R}^n$, dengan
$$d_e(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
dimana $\boldsymbol{x} = (x_1.x_2, \dots, x_n)$ dan $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . $(\boldsymbol{x}^k) = (x_1^k.x_2^k, \dots, x_n^k)$ , dengan $k = 1,2, \dots$ anggota dari barisan di $\mathbb{R}^n$ konvergen ke $\boldsymbol{x} = (x_1.x_2, \dots, x_n)$ jika dan hanya jika $\forall i = 1,2, \dots, n$, $(x_i^k)$ konvergen ke $x_i$ di $\mathbb{R}$.

**Bukti.**

($\Rightarrow$) Akan ditunjukkan bahwa jika $(\boldsymbol{x}^k) = (x_1^k.x_2^k, \dots, x_n^k)$ , dengan $k = 1,2, \dots$ anggota dari barisan di $\mathbb{R}^n$ konvergen ke $\boldsymbol{x} = (x_1.x_2, \dots, x_n)$ maka $\forall i = 1,2, \dots, n$, $(x_i^k)$ konvergen ke $x_i$ di $\mathbb{R}$.

Perhatikan bahwa jika $(\boldsymbol{x}^k)$ konvergen ke $\boldsymbol{x}$, artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ , terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $k \ge N$ berlaku $d_e(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x}) < \varepsilon$. Karena $\left(x_i^k - x_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^k - x_i\right)^2$ sehingga
$$\left|x_i^k - x_i\right| = \sqrt{(x_i^k - x_i)^2}$$
$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^k - x_i)^2}$$
$$= d_e(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x})$$
Akibatnya,
$$\left|x_i^k - x_i\right| \le d_e(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x}) < \varepsilon$$
Sehingga berdasarkan Definisi 2.15 didapat
$$\lim_{k \to \infty} x_i^k = x_i$$
Jadi, $\forall i = 1,2, \dots, n$, $(x_i^k)$ konvergen ke $x_i$ di $\mathbb{R}_{\text{Fig}}$

($\Leftarrow$) Akan ditunjukkan bahwa jika $\forall i = 1,2, \dots, n$, $(x_i^k)$ konvergen ke $x_i$ di $\mathbb{R}$ maka $(\boldsymbol{x}^k) = (x_1^k.x_2^k, \dots, x_n^k)$ , dengan $k = 1,2, \dots$ anggota dari barisan di $\mathbb{R}^n$ konvergen ke $\boldsymbol{x} = (x_1.x_2, \dots, x_n)$.

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ . karena $\forall i = 1,2, \dots, n$, $(x_i^k)$ konvergen ke $x_i$ di $\mathbb{R}$, terdapat $N_i \in \mathbb{N}$ untuk setiap $k \ge N_i$, sehingga berlaku
$$\left|x_i^k - x_i\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$
kuadratkan kedua ruas, didapat
$$(x_i^k - x_i)^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}$$
dan diperoleh
$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^k - x_i\right)^2 < n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2$$
akibatnya,
$$d_e(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^k - x_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < (\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon$$
Jadi, $(\boldsymbol{x}^k) = (x_1^k.x_2^k, \dots, x_n^k)$ , dengan $k = 1,2, \dots$ anggota dari barisan di $\mathbb{R}^n$ konvergen ke $\boldsymbol{x} = (x_1.x_2, \dots, x_n)$.

Selanjutnya, diberikan contoh barisan di ruang metrik Euclidean yang konvergen pada Contoh 4.20 berikut.

**Contoh 43**

Diberikan $(\mathbb{R}^2, d_e)$, dengan
$$d_e(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
Buktikan bahwa barisan $(\boldsymbol{x}^k) = \left(1 + \frac{1}{k}, 2 - \frac{1}{k}\right)$ konvergen ke (1,2).

**Penyelesaian**

Akan ditunjukkan barisan $(\boldsymbol{x}^k) = \left(1 + \frac{1}{k}, 2 - \frac{1}{k}\right)$ konvergen ke (1,2). Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, menurut sifat Archimedes terdapat bilangan asli $N \in \mathbb{N}$ dengan $N > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$ , sehingga untuk setiap $k \ge N$ berlaku
$$d_e(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x}) = d_e\big(\boldsymbol{x}^k, (1,2)\big) = ((x_1^k - 1)^2 + (x_2^k - 2)^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{k} - 1\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{k} - 2\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(-\frac{1}{k}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{k^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{k} \leq \frac{\sqrt{2}}{N} < \varepsilon$$

Berdasarkan Definisi 4.5, terbukti bahwa $(\boldsymbol{x}^k)$ konvergen ke (1,2).

Selanjutnya, diberikan Proposisi 4.21 terkait barisan Cauchy di ruang metrik Euclidean.

**Proposisi 44**

Diberikan ruang metrik Euclidean $(\mathbb{R}^n, d_e)$, misalkan $(\boldsymbol{x}^k)$ barisan di $\mathbb{R}^n$. Barisan $(\boldsymbol{x}^k)$ merupakan barisan Cauchy $\Leftrightarrow x_i^k$ merupakan barisan Cauchy.

**Bukti.**

$(\Rightarrow)$ Akan ditunjukkan bahwa jika $(\boldsymbol{x}^k)$ merupakan barisan Cauchy maka $x_i^k$ merupakan barisan Cauchy.

Misalkan $(\boldsymbol{x}^k) = (x_1^k . x_2^k, \dots, x_n^k)$ merupakan barisan Cauchy, maka $x_i^k$ merupakan barisan Cauchy. Artinya, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, k \geq N$ berlaku

$$d_e(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x}^m) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^k - x_i^m\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

Perhatikan bahwa, karena $\left(x_i^k - x_i^m\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^k - x_i^m\right)^2$ sehingga

$$\begin{aligned} \left|x_i^k - x_i^m\right| &= \sqrt{(x_i^k - x_i^m)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^k - x_i^m)^2} \\ &= d_e(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x}^m) < \varepsilon \end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.20 diperoleh bahwa setiap komponen vektor $x_i^k$adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$.

$(\Rightarrow)$ Akan ditunjukkan $x_i^k$ merupakan barisan Cauchy maka $(\boldsymbol{x}^k)$ merupakan barisan Cauchy.

Misalkan $x_i^k$ adalah barisan Cauchy. Artinya, $\forall \varepsilon > 0$ , terdapat $N_i \in \mathbb{N}$ untuk setiap $m, k \geq N_i$, sehingga berlaku

$$\left|x_i^k - x_i^m\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

kuadratkan kedua ruas, didapat

$$(x_i^k - x_i^m)^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}$$

dan diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^k - x_i^m\right)^2 < n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2$$

akibatnya,

$$d_e(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x}^m) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^k - x_i^m\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < (\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

Berdasarkan Definisi 4.10, $(\boldsymbol{x}^k)$ merupakan barisan Cauchy.

Selanjutnya, diberikan Teorema 4.22 terkait kelengkapan pada ruang metrik Euclidean. ■

**Teorema 45**

Misalkan $X = \mathbb{R}^n$, dengan

$$d_e(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

dimana $\boldsymbol{x} = (x_1 . x_2, \dots, x_n)$ dan $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. $(\mathbb{R}^n, d_e)$ adalah ruang metrik lengkap.

**Bukti.**

Misalkan $(\boldsymbol{x}^k)$ adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}^n$ . Berdasarkan Proposisi 4.21 didapat bahwa $x_i^k$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$ . Selanjutnya, berdasarkan Teorema 2.23 diperoleh bahwa $\mathbb{R}$ lengkap. Karena $\mathbb{R}$ lengkap, artinya setiap barisan Cauchy-nya konvergen, sehingga $x_i^k$ konvergen ke $x_i$ di $\mathbb{R}$. Lebih lanjut, berdasarkan Teorema 4.19 diperoleh bahwa $(\boldsymbol{x}^k)$ konvergen ke $\boldsymbol{x}$. ■

Berdasarkan teorema 4.22, dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{R}^n, d_e)$ merupakan ruang metrik lengkap. Hal tersebut berdasarkan bukti jika barisan di $\mathbb{R}^n$ adalah barisan Cauchy, maka setiap komponen vektornya juga merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ merupakan ruang yang lengkap, artinya setiap barisan Cauchy-nya konvergen, sehingga setiap komponen vektor di $\mathbb{R}^n$ konvergen ke suatu bilangan real. Selanjutnya, konvergensi barisan di setiap komponen vektor di $\mathbb{R}^n$ yang merupakan bilangan real ekuivalen dengan konvergensi barisan di ruang Euclidean, sehingga dapat disimpulkan bahwa setiap barisan Cauchy di $\mathbb{R}^n$ merupakan barisan konvergen.

Dari pembuktian-pembuktian yang telah dilakukan, didapat bahwa ruang vektor berdimensi-$n$ atau ruang Euclidean terdiri dari komponen-komponen vektor real, sehingga dalam melakukan analisis konvergensi barisan pada ruang metrik Euclidean hanya perlu memeriksa apakah setiap komponen-komponen vektor real tersebut konvergen ke suatu bilangan real dan berlaku sebaliknya. Dengan meninjau komponen-komponen vektor real, akan dengan mudah menerapkan sifat-sifat barisan di bilangan real yang telah dipelajari dalam analisis real.

Adanya hubungan antara konvergensi barisan dan barisan Cauchy di bilangan real yang ekuivalen dengan hubungan antara konvergensi barisan dan barisan Cauchy pada ruang Euclidean menjadi dasar dalam membuktikan kelengkapan pada ruang metrik Euclidean. Suatu ruang metrik dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchynya konvergen, karena barisan Cauchy secara definisi menggunakan konsep jarak atau metrik, sehingga dalam membuktikan kelengkapan pada ruang Euclidean, diperlukan fungsi jarak atau metrik.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa konvergensi barisan dan barisan Cauchy memegang peran penting dalam menentukan kelengkapan ruang metrik Euclidean dengan basis standar $\mathbb{R}^n$. Konsep ini juga dapat diterapkan pada ruang Euclidean $\mathbb{E}^n$, meskipun pembuktiannya mungkin memerlukan penyesuaian sesuai sifat dan definisi metrik yang digunakan pada ruang tersebut.

## PENUTUP

### SIMPULAN

Konvergensi barisan pada ruang metrik Euclidean memiliki kesamaan sifat dengan konvergensi barisan pada ruang Euclidean, terutama sifat-sifat barisan yang konvergen di $\mathbb{R}$. Hal tersebut terjadi karena ruang Euclidean terdiri dari hasil kali kartesius antara ruang-ruang bilangan real. Lebih lanjut, konvergensi barisan di $\mathbb{R}^n$ dilengkapi dengan norma Euclidean, yaitu norma yang berasal dari hasil kali dalam standar (*dot product*). Ruang metrik Euclidean merupakan ruang metrik lengkap, kelengkapan ruang metrik Euclidean berhubungan dengan konvergensi barisan dan barisan Cauchy pada ruang metrik Euclidean.

### SARAN

Penelitian ini menggunakan ruang metrik Euclidean dengan basis standar ($\mathbb{R}^n$), sehingga pada penelitian selanjutnya diharapkan untuk menggunakan ruang metrik Euclidean ($\mathbb{E}^n$).

## DAFTAR PUSTAKA


Alzubaidi, Y. (2024). On Convergence and Completeness in Generalized Metric Spaces. *Asian Pasific Journal of Mathematics*, 7(11).

Anton, H., dan Rorres, C. (2004). *Aljabar Linear Elementer: Versi Aplikasi: Edisi Delapan*. Jakarta: Erlangga.

Anton, H., and Rorres, C. (2005). *Elementary Linear Algebra: Applications Version: Ninth Edition*. New York: John Wiley & Sons.

Anton, H., and Rorres, C. (2014). *Elementary Linear Algebra: Applications Version: 11th Edition*. New York: John Wiley & Sons.

Anwar, K., dan Manuharawati, M. (2021). Ekuivalensi Kekonvergenan Pointwise dan Searagam pada Barisan Fungsi dalam Ruang Metrik C[a, b]. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 9(1), 9-21.

Bartle, R. G., and Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to Real Analysis. New York: John Wiley & Sons*, Inc.

Conway, J. B. (1994). *A course in functional analysis (Vol. 96)*. Springer Science & Business Media.

Dahoklory, N., dan Patty, H. W. M. (2023). Kajian Dasar Ruang Metrik P-Adic. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 11(03), 517-523.

Fitzpatrick, P. (2009). *Advanced Calculus Second Edition*. American Mathematical Soc.

Greub, W. H. (2012). *Linear Algebra (Vol. 23)*. New York: Springer Science & Business Media.

Hoffman, K. (2019). *Analysis in Euclidean Space*. New England: Courier Dover Publications.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Fungsional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons. Inc.

Lay, D. C., Lay, S. R., and McDonald, J. J. (2016). *Linear Algebra and its applications 5th edition*. Pearson.

León-Saavedra, F., Pérez-Fernández, F. J., Romero de la Rosa, M. D. P., and Sala, A. (2019). Ideal convergence and completeness of a normed space. *Mathematics*, 7(10), 897.

Lipschutz, S., and Lipson, M. (2001). *Schaum's Outline of Theory and Problems of Linear Algebra*. Jakarta: Erlangga.

Nachbar, J. (2017). $\mathbb{R}^n$ *Completeness and Compactness*. Washington University in St. Louis.

Maddox, I. J. (1970). *Element of Functional Analysis*. Cambridge at The University Press.

Nicholson, W. K. (2013). *Linear Algebra with Applications*. Boston: PWS Publishing Company.

Rahmasari, C. (2016). *Konvergensi Barisan dan Teorema Titik Tetap Pada Ruang b-Metrik* (Skripsi). Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Diperoleh dari https://repository.its.ac.id/71942/

Rogers, R., and Zhong, N. (2019). From Euclidean to Metric Space. *Journal of Student Research*, 8(1), 14-17.

Rohma, O. E. A. (2024). *Sifat kelengkapan pada Hasil Kali Ruang Metrik* (Skripsi). Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim. Diperoleh dari http://etheses.uin-malang.ac.id/70650/

Rosenlicht, M. (1986). *Introduction to analysis*. Courier Corporation.

Royden, H. L. (1988). Real analysis (No. 4). New York: Krishna Prakashan Media. Rudin, W.

(1953).*Principles of Mathematical Analysis Third Edition*. New York: McGraw-Hill Book Co., Inc.

Shirali, S. and L, V. H. (2006). *Metric Spaces*. London: Springer Science.

Shurman, J. (2016). *Calculus and analysis in euclidean space*. Switzerland: Springer International Publishing.

Sohrab, H.H. (2003). *Basic Real Analysis*. Birkhäuser, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8232-3_5

Soejono, E., dan Sumarmo, U. (2004). *Matematika untuk SMA Kelas XI*. Jakarta: Erlangga.

Yunus, M. (2005). *Modul Ajar Pengantar Analisis Fungsional*. Surabaya: Jurusan Matematika ITS.