MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 13 *No* 03
Tahun 2025

ANALISIS FUNGSI EKSPONENSIAL DENGAN TURUNAN FRAKSIONAL

Syifaul Janan
Program Studi Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Pembangunan Nasional Veteran Jakarta
e-mail: syifaul.janan@upnvj.ac.id*

Sri Susanti
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga
e-mail: srisusanti12@gmail.com

Didi Harlianto
Program Studi Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Pembangunan Nasional Veteran Jakarta
e-mail: didi.harlianto@upnvj.ac.id

Abstrak

Penelitian ini bertujuan menganalisis fungsi eksponensial dalam bentuk turunan fraksional menggunakan pendekatan deret Maclaurin. Fungsi eksponensial memiliki sifat dapat diturunkan hingga orde tak berhingga, sehingga dapat direpresentasikan melalui deret tak hingga. Metode penelitian menggunakan studi literatur, meliputi konversi fungsi eksponensial ke deret Maclaurin, penerapan definisi turunan fraksional Riemann-Liouville, pembuktian teorema turunan fraksional, analisis selang konvergensi, dan simulasi numerik menggunakan *software* Matlab. Hasil penelitian menunjukkan bahwa turunan fraksional fungsi eksponensial berada di sekitar nilai fungsi aslinya, sesuai dengan sifat fundamental bahwa turunan berorde bilangan bulat dari fungsi eksponensial tetap menghasilkan fungsi eksponensial itu sendiri.
Kata Kunci: deret Maclaurin, fungsi eksponensial, selang konvergensi, turunan fraksional

Abstract

This study aims to analyze fractional derivative of exponential function using a Maclaurin series approach. Exponential functions are infinitely differentiable, enabling representation through infinite series. The method involves a literature review with several stages: transforming exponential functions into Maclaurin series, applying the Riemann–Liouville definition of fractional derivatives, proving related theorems, analyzing convergence intervals, and performing numerical simulations with Matlab. Results show that fractional derivatives remain close to the original exponential function values, consistent with the property that integer-order derivatives of exponential functions reproduce the function itself.
Keywords: *Maclaurin series, exponential function, interval of convergence, fractional derivative*

PENDAHULUAN

Fungsi eksponensial secara umum dinyatakan dalam bentuk $f(x) = Ca^x$, dengan a adalah suatu konstanta positif (Varberg & Purcell, 1992). Salah satu konstanta yang dikenal adalah bilangan Euler yang dinotasikan dengan simbol e. Konstanta ini pertama kali ditemukan oleh Leonhard Euler pada tahun 1727 dan disebut sebagai konstanta Euler (Rusianto, 2021). Apabila konstanta a digantikan oleh e , maka diperoleh fungsi eksponensial alami yang dituliskan sebagai $f(x) = e^x$ (Mercer, 2014). Fungsi eksponensial alami mempunyai sifat khusus, yaitu dapat diturunkan hingga orde tak berhingga. Sifat ini memungkinkan fungsi eksponensial ini dapat direpresentasikan melalui deret Maclaurin, yang memberikan bentuk analitik dalam representasi deret tak hingga.

Selanjutnya, konsep turunan dikembangkan lebih luas ke arah turunan fraksional atau turunan orde pecahan, yang merupakan generalisasi dari turunan pada orde bilangan. Gagasan ini pertama kali diperkenalkan oleh Leibniz pada tahun 1695 dan selanjutnya dikembangkan lebih mendalam oleh Euler serta Liouville (Miller & Ross, 1993). Seiring dengan perkembangan teori, berbagai pendekatan untuk mendefinisikan turunan fraksional mulai bermunculan. Beberapa definisi yang banyak digunakan meliputi turunan fraksional Riemann–Liouville (Munkhammar, 2004), turunan fraksional Caputo (Almeida, 2017) , serta turunan fraksional Grunwald–Letnikov (Abdelouahab & Hamri, 2016).

Dari berbagai pendekatan tersebut, definisi Riemann-Liouville merupakan yang paling banyak diaplikasikan, khususnya dengan orde α yang memenuhi $n-1<\alpha\leq n, n\in\mathbb{N}$ (Hilfer et al., 2009).

Seiring berkembangnya zaman, turunan fraksional telah banyak dijadikan bahan penelitian.. (Parmikanti & Rusyaman, 2019) membahas metode penentuan turunan fraksional fungsi polinom dengan menggunakan deret kuasa (terutama deret Taylor), sebagai alternatif terhadap definisi standar seperti Riemann–Liouville, Grünwald–Letnikov, dan Caputo. Pendekatan ini memanfaatkan ekspansi fungsi ke dalam deret pangkat serta fungsi Gamma dan analisis kombinatorik untuk menyusun rumus umum turunan fraksional suatu fungsi polinom. Selain itu, (Janan & Janan, 2024) & (Janan, 2025) membahas turunan fraksional dan integral fraksional dari fungsi hiperbolik dengan menggunakan definisi Riemann–Liouville. Fungsi ini direpresentasikan melalui deret Maclaurin, kemudian turunan fraksionalnya diturunkan secara analitik dan divisualisasikan melalui simulasi Matlab untuk menunjukkan karakteristik grafiknya.

Pada penelitian ini, akan dilakukan analisis fungsi eksponensial dengan mengkaji bentuk turunannya dalam turunan fraksional. Langkah pertama dalam penelitian ini adalah mengonversi fungsi eksponensial tersebut ke dalam bentuk deret Maclaurin, kemudian menentukan selang konvergensi deret tersebut sebagai dasar analisis. Setelah itu, fungsi eksponensial dalam bentuk deret Maclaurin ini akan diubah ke dalam bentuk turunan fraksional dengan menerapkan definisi turunan fraksional yang dikemukakan oleh Riemann-Liouville. Pada tahap ini, penelitian juga mencakup pencarian selang konvergensi dari bentuk turunan fraksional yang diperoleh. Keseluruhan proses ini akan diakhiri dengan simulasi menggunakan *software* Matlab, yang bertujuan untuk memvisualisasikan dan menganalisis hasil perhitungan secara numerik, sehingga memberikan gambaran yang lebih jelas mengenai perilaku fungsi eksponensial dalam bentuk turunan fraksional.

KAJIAN TEORI

Pada bagian ini akan dijelaskan definisi dan teorema terkait turunan fraksional.

Deret Maclaurin

Teorema 2.1 (Stewart, 2012b)
Deret Maclaurin dari suatu fungsi riil $f(x)$ dinyatakan dalam bentuk:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \tag{2.1}$$

dengan $f^{(k)}$ merepresentasikan turunan ke-k dari fungsi f dan $k!$ menunjukkan faktorial dari k.
Salah satu fungsi yang dapat direpresentasikan melalui deret Maclaurin adalah fungsi eksponensial. Fungsi ini memiliki keistimewaan yaitu dapat diturunkan sampai tak berhingga kali, sehingga fungsi tersebut dapat disajikan dalam bentuk deret Maclaurin.

Berdasarkan ekspansi (2.1), diperoleh

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

Akibatnya, untuk setiap $x\in\mathbb{R}$, berlaku (Stewart, 2012a)

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \tag{2.2}$$

Selanjutnya, misalkan

$$C_n=\frac{1}{n!}$$

dan

$$C_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$$

maka deret (2.2) konvergen untuk setiap x, dengan

$$|x|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n!}\times\frac{(n+1)!}{1}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)n!}{n!}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}|n+1|$$

$$=\infty$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa $|x| < \infty$ atau ekivalen dengan $-\infty < x < \infty$. Oleh karena itu, selang konvergensi deret tersebut adalah $(-\infty, \infty)$ yang berarti deret tersebut konvergen untuk setiap bilangan real x.

Turunan Fraksional

Definisi 2.2 (Daraghmeh et al., 2020)

Diberikan $n-1 \leq \alpha < n$ dengan $n \in \mathbb{Z}^+$. Turunan fraksional Riemann Liouville orde α dari $f(x)$ didefinisikan sebagai

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{\alpha-n-1}} ds \qquad (2.3)$$

dengan $\Gamma(\alpha)$ merupakan fungsi gamma.

Fungsi Gamma

Definisi 2.3 (Artin, 2015)

Fungsi gamma $\Gamma(w)$ didefinisikan sebagai

$$\Gamma(w) = \int_0^\infty t^{w-1} e^{-t}\, dt \quad (\Re e(w) > 0)$$

dengan $t^{w-1} = e^{(w-1)\log(t)}$. Integral tersebut konvergen untuk setiap $w \in \mathbb{C}$ dengan $\Re e(w) > 0$

Lebih lanjut, fungsi gamma memenuhi relasi rekursif:

$$\Gamma(w+1) = w\Gamma(w) \quad (\Re e(w) > 0)$$

Secara khusus, jika $w = n \in \mathbb{N}_0$, berlaku

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Dengan konvensi bahwa $0! = 1$.

METODE

Pada penelitian ini digunakan metode studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Melakukan studi literatur yang berkaitan dengan fungsi eksponensial, deret Maclaurin, selang konvergensi, dan turunan fraksional.
2. Melakukan pembuktian pada teorema turunan fraksional.
3. Menganalisis fungsi eksponensial dengan turunan fraksional, serta mencari selang konvergensinya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian ini, fungsi eksponensial akan diubah menjadi bentuk deret Maclaurin. Selanjutnya fungsi tersebut akan diubah menjadi bentuk turunan fraksional.

Pembuktian Teorema Turunan Fraksional

Teorema 4.1

Diketahui fungsi kuasa $f(x) = x^p$ dengan $p \geq 0$, maka turunan fraksionalnya

$$D^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}\, x^{p-\alpha}$$

dengan $m \in \mathbb{N}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bukti:

Berdasarkan (2.3), kita nyatakan

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{\alpha-n+1}} ds$$

$$D^\alpha x^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{s^p}{(x-s)^{\alpha-n+1}} ds$$

Andaikan $s = xu, 0 \leq u \leq 1$ dan $ds = x\, du$, diperoleh

$$D^\alpha x^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^1 \frac{(xu)^p}{(x-xu)^{\alpha-n+1}} x\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^1 x^{p+1} u^p \big(x(1-u)\big)^{n-\alpha-1} du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^1 x^{p+1} x^{n-\alpha-1} u^p (1-u)^{n-\alpha-1} du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} x^{p+n-\alpha} \int_0^1 u^p (1-u)^{n-\alpha-1} du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} x^{p+n-\alpha} \beta(p+1, n-\alpha)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} x^{p+n-\alpha} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(p+n-\alpha+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+n-\alpha+1)} \frac{d^n}{dx^n} x^{p+n-\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+n-\alpha+1)} \frac{\Gamma(p+n-\alpha+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} x^{p-\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} x^{p-\alpha}$$

Terbukti bahwa

$$D^{\alpha} x^{p} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} x^{p-\alpha}, \qquad p \geq 0 \qquad (4.2)$$

Contoh:
Tentukan turunan fraksional dari $f(x) = x^{100}$ saat $\alpha = 1$.
Solusi:
Berdasarkan (4.2), dapat kita tuliskan

$$D^{1} x^{100} = \frac{\Gamma(100+1)}{\Gamma(100-1+1)} x^{100-1}$$

$$= \frac{\Gamma(101)}{\Gamma(100)} x^{99}$$

$$= \frac{100\, \Gamma(100)}{\Gamma(100)} x^{99}$$

$$= 100\, x^{99}$$

Fungsi Eksponensial dengan Turunan Fraksional
Fungsi eksponensial dalam bentuk turunan fraksional ditentukan melalui representasi dari deret Maclaurinnya. Oleh karena itu, diperoleh

$$D^{\alpha} e^{x} = D^{\alpha} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^{\alpha} x^{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha} \qquad (4.3)$$

Selanjutnya, misalkan

$$C_n = \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\mathrm{n}+1)}{\Gamma(\mathrm{n}-\alpha+1)}$$

dan

$$C_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{\Gamma(\mathrm{n}+2)}{\Gamma(\mathrm{n}-\alpha+2)}$$

maka deret (4.3) konvergen untuk setiap x, dengan

$$|x| < \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)}}{\frac{1}{(n+1)!} \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n-\alpha+2)}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)}}{n!} \times \frac{(n+1)!}{\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n-\alpha+2)}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)n!}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{\Gamma(n-\alpha+2)}{\Gamma(n+2)} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)n!}{n!} \frac{n!}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{(n-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha+1)}{(n+1)!} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)n!}{n!} \frac{n!\,(n-\alpha+1)}{(n+1)n!} \right|$$

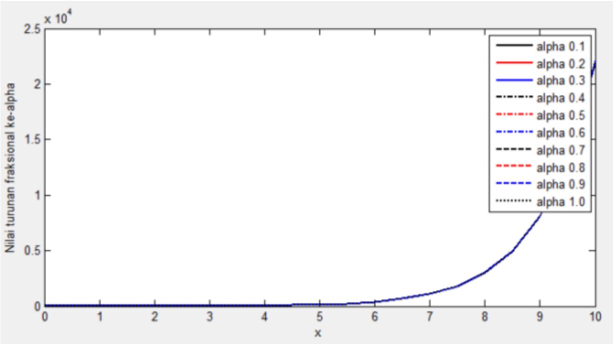
$$= \lim_{n\to\infty} |(n-\alpha+1)|$$

$$= \infty$$

Dengan demikian, $|x| < \infty$ atau $-\infty < x < \infty$.
Berdasarkan uraian di atas, diperoleh selang konvergensi deret di atas adalah $(-\infty, \infty)$ atau dengan kata lain deret tersebut konvergen untuk semua bilangan real.

Selanjutnya, hasil perhitungan turunan fraksional di atas disimulasikan dengan menggunakan *software* Matlab.

Diperoleh hasil sebagai berikut:



Gambar 1. Grafik $f(x) = D^{\alpha} e^{x}$

Turunan ke- n dari fungsi eksponensial, dengan n bilangan bulat, tetap menghasilkan fungsi eksponensial itu sendiri. Oleh karena itu, turunan berorde fraksional dari fungsi eksponensial akan berada pada sekitar nilai dari fungsi eksponensial tersebut.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan yang telah dilakukan, fungsi eksponensial berhasil direpresentasikan dalam bentuk deret Maclaurin dengan selang konvergensi tak hingga, yang berarti deret tersebut konvergen untuk semua bilangan real. Teorema turunan fraksional untuk fungsi kuasa telah berhasil dibuktikan menggunakan definisi Riemann-Liouville dan dapat diaplikasikan untuk menurunkan turunan fraksional fungsi eksponensial. Turunan fraksional dari fungsi eksponensial berhasil dinyatakan dalam bentuk deret yang melibatkan fungsi Gamma dengan selang konvergensi tak hingga.

Hasil simulasi menggunakan *software* Matlab menunjukkan bahwa turunan fraksional fungsi eksponensial mempertahankan karakteristik fundamental fungsi eksponensial, di mana nilainya berada di sekitar fungsi aslinya. Hal ini konsisten dengan sifat bahwa turunan berorde bilangan bulat dari fungsi eksponensial tetap menghasilkan fungsi eksponensial itu sendiri.

DAFTAR PUSTAKA

Abdelouahab, M.-S., & Hamri, N.-E. (2016). The Grünwald–Letnikov fractional-order derivative with fixed memory length. *Mediterranean Journal of Mathematics*, *13*(2), 557–572.

Almeida, R. (2017). A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, *44*, 460–481.

Artin, E. (2015). *The gamma function*. Courier Dover Publications.

Daraghmeh, A., Qatanani, N., & Saadeh, A. (2020). Numerical solution of fractional differential equations. *Applied Mathematics*, *11*(11), 1100–1115.

Hilfer, R., Luchko, Y., & Tomovski, Z. (2009). Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann-Liouville fractional derivatives. *Fract. Calc. Appl. Anal*, *12*(3), 299–318.

Janan, S. (2025). INTEGRAL FRAKSIONAL DARI FUNGSI HIPERBOLIK. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, *13*(2), 37–42.

Janan, S., & Janan, T. (2024). Fractional Derivative of Hyperbolic Function. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, *21*(1), 267–284.

Mercer, P. R. (2014). The Exponential Function. In *More Calculus of a Single Variable* (pp. 119–158). Springer.

Miller, K. S., & Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. *(No Title)*.

Munkhammar, J. (2004). *Riemann-Liouville fractional derivatives and the Taylor-Riemann series*.

Parmikanti, K., & Rusyaman, E. (2019). Turunan Fraksional Fungsi Polinom Menggunakan Deret Kuasa. *Prosiding Industrial Research Workshop and National Seminar*, *10*(1), 535–538.

Rusianto, T. (2021). *Getaran Mekanis.* AKPRIND PRESS.

Stewart, J. (2012a). *Calculus: early transcendentals*. Cengage Learning.

Stewart, J. (2012b). *Essential calculus*. Cengage Learning.

Varberg, D. E., & Purcell, E. J. (1992). Calculus with analytic geometry. *(No Title)*.