**MATH**unesa
*Jurnal Ilmiah Matematika*
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115
*Volume 13 No 03*
*Tahun 2025*

# REKONTRUKSI INTERPOLASI BILINIER MELALUI PENDEKATAN POLINOMIAL MULTILINIER DAN INTERPOLASI LINIER BERTAHAP SERTA PENERAPANNYA

**Puspa Hanaya Latifah Erjandsa**
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Jambi, Jambi, Indonesia
Email: puspahanayale21@gmail.com *

**Syamsyida Rozi**
)Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Jambi, Jambi, Indonesia
Email: syamsyida.rozi@unja.ac.id

**Niken Rarasati**
)Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Jambi, Jambi, Indonesia
Email: nikenrarasati@unja.ac.id

**Abstrak**

Penelitian ini dilatarbelakangi oleh penggunaan interpolasi bilinier yang sering diaplikasikan secara praktis tanpa didukung kajian matematis yang mendalam, khususnya dalam literatur berbahasa Indonesia. Tujuan penelitian adalah menganalisis formulasi matematis interpolasi bilinier dan memverifikasi konsistensi hasil antara pendekatan teoritis dan aplikatif. Penelitian ini menggunakan metode pendekatan kuantitatif dengan studi literatur dan analisis numerik melalui dua pendekatan: (1) pendekatan polinomial multilinier dengan penyelesaian sistem persamaan linier menggunakan eliminasi Gauss-Jordan dan (2) pendekatan interpolasi linier bertahap sepanjang sumbu $x$ dan $y$. Hasil penelitian berhasil menurunkan rumus interpolasi bilinier yang identik melalui kedua pendekatan. Verifikasi dilakukan dengan menerapkan rumus tersebut untuk mengestimasi produksi teh basah yang menunjukkan hasil konsisten dengan pola data. Dengan demikian, penelitian menegaskan bahwa interpolasi bilinier merupakan metode matematis yang memiliki dasar teoritis kuat dimana pendekatan polinomial dan interpolasi linier saling melengkapi dalam membuktikan kebenaran rumus.
**Kata Kunci:** Estimasi, Interpolasi Bilinier, Interpolasi Linier, Polinomial Multilinier.

**Abstract**

*This research is motivated by the frequent practical application of bilinear interpolation without being supported by in-depth mathematical analysis, particularly in Indonesia-languange literature. The research aims to analyze the mathematical formulation of bilinear interpolation and verify the consistency between theoretical and applied approaches. This study employs a quantitative methode with literature review and numerical analysis thourgh two approaches: (1) a multilinear polynomial approach using Gauss-Jordan elimination to solve linear equation systems, and (2) a stepwise linear interpolation approach along the $x$ and $y$ axes. The research successfully derives identical bilinear interpolation formulas through both approaches. Verification was conducted by applying the formula to estimate wet tea production, demonstrating results consistent with data pattern. Thus, the study confirms that bilinear interpolation is a mathematically robust method with strong theoretical foundations where the polynomial and linear interpolation approaches complement each other in validating the formulas's correctness.*
***Keywords:*** *Bilinear Interpolation, Estimation, Linear Interpolation, Multilinear Polynomial.*

## PENDAHULUAN

Interpolasi merupakan metode penting untuk memperkirakan nilai yang tidak diketahui dengan data yang terbatas, terutama dalam pengambilan keputusan di berbagai bidang termasuk agribisnis (Howard, 2017). Sebagai metode matematika, interpolasi memungkinkan pengisian celah data dengan memanfaatkan nilai-nilai yang sudah diketahui (Munir, 2015) sehingga menjadi solusi krusial ketika data hanya tersedia di beberapa titik tertentu. Kebutuhan ini semakin kompleks ketika melibatkan beberapa variabel terkait sehingga diperlukan pendekatan multidimensi seperti interpolasi bilinier.

Interpolasi bilinier menawarkan solusi optimal untuk masalah multidimensi dengan menggabungkan dua interpolasi linier secara berurutan pada dua sumbu (Fouad, 2024). Metode ini menggunakan rasio jarak antara titik yang diketahui membentuk persegi panjang (Pratama & Sam'an, 2023). Metode ini memberikan keunggulan dalam menangani data dengan variabel saling terkait seperti produksi teh yang dipengaruhi berbagai faktor (Anjarsari et al., 2020). Namun, pemahaman terbatas terhadap landasan matematisnya sering membuat penerapan metode ini kurang optimal.

Meski memiliki potensi besar, penerapan interpolasi bilinier di agribisnis khususnya estimasi produksi teh masih minim. Literatur lebih banyak membahas aplikasinya di bidang grafis dan citra digital seperti penelitian yang dilakukan oleh (Pratama & Sam'an, 2023) dan (Christanto et al., 2006), sementara metode interpolasi lain seperti linier atau polinom lebih dominan digunakan di sektor pertanian seperti penelitian yang dilakukan oleh (Sihombing, 2019) dan (Mansyur et al., 2024).

Untuk mengatasi hal ini, penelitian ini akan mengkaji secara mendasar perumusan matematis interpolasi bilinier, termasuk prinsip rasio jarak dan kombinasi interpolasi linier pada dua dimensi (Pratama & Sam'an, 2023). Kajian teoritis ini bertujuan untuk memperkuat pemahaman konseptual sekaligus memastikan metode dapat diadaptasi untuk kebutuhan agribisnis, khususnya dalam memodelkan hubungan antara luas areal tanam dan umur tanaman terhadap hasil produksi teh basah.

Oleh karena itu, penelitian ini menjadi sangat penting karena akan memfokuskan pada aspek teoritisnya, yaitu pemahaman yang lebih dalam terhadap rumus-rumus dan prosedur matematis yang mendasari interpolasi bilinier dan aspek praktisnya, yaitu menerapkan metode interpolasi bilinier dalam konteks yang baru yakni untuk mengestimasi hasil produksi teh basah.

Dengan demikian, kajian matematis interpolasi bilinier diharapkan dapat memperdalam pemahaman mengenai cara metode ini menghasilkan estimasi hasil produksi teh sekaligus mendukung upaya perusahaan dalam pengembangan strategi perencanaan yang lebih efisien dan adaptif terhadap perubahan kondisi di lapangan.

## TINJAUAN PUSTAKA

### 1. PERSAMAAN GARIS LURUS

Persamaan garis lurus adalah sebuah persamaan dua variabel yang membentuk sebuah garis lurus dengan gradien tertentu pada diagram koordinat (Aisyah et al., 2021). Ini menjadi dasar dalam pemhaman interpolasi bilinier. Bentuk umum persamaan garis lurus adalah sebagai berikut :

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

dengan:
$x$ dan $y$ : variabel
$A$ dan $B$ : koefisien
$C$ : konstanta

Gradien garis lurus yang dinotasikan dengan $m$ adalah tingkat kemiringan dari suatu garis yang merupakan rasio antara jarak tegak (vertikal) terhadap jarak mendatar (horizontal) (Tohir et al., 2022). Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2}$$

Jika sebuah garis melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ maka mempunyai gradien garis sebagai berikut :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{3}$$

Persamaan garis yang melalui titik $(x_1, y_1)$ dan memiliki gradien $m$ adalah:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{4}$$

Persamaan garis yang melalui 2 titik $(x_1, y_1)$ dan $(x_2, y_2)$ adalah:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{5}$$

### 2. INTERPOLASI LINIER

Menurut (Munir, 2015), interpolasi linier adalah interpolasi dua buah titik pada data dengan sebuah garis lurus. Asumsikan terdapat dua buah titik pada data, yaitu $(x_1, y_1)$ dan $(x_2, y_2)$ maka untuk mencari nilai $y = f(x)$ di titik $x$ yang terletak di antara $x_1$ dan $x_2$ dapat menggunakan rumus sebagai berikut:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{6}$$

Persamaan (6) dapat dituliskan dalam bentuk polinomial Lagrange sebagai berikut:

$$y = y_1 \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} \tag{7}$$

dengan

$$L_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Sehingga bentuk lain polinomial Lagrange adalah sebagai berikut:

$$y = f(x) = y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \qquad (8)$$

## 3. INTERPOLASI BILINIER

Interpolasi bilinier adalah suatu metode untuk memperkirakan nilai suatu fungsi di titik tertentu di dalam area dimensi 2 berdasarkan nilai-nilai yang diketahui pada empat titik yang membentuk sudut dari sebuah persegi panjang. Interpolasi bilinier merupakan perpanjangan dari interpolasi linier ke dimensi 2 sehingga hasilnya mempertimbangkan perubahan secara linier dalam arah horizontal (sumbu $x$) dan vertikal (sumbu $y$). Secara matematis interpolasi bilinier dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x,y) = & \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}\right) f(x_1, y_1) \\ & + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}\right) f(x_2, y_1) \\ & + \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\right) f(x_1, y_2) \\ & + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\right) f(x_2, y_2) \qquad (9) \end{aligned}$$

dengan $(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_1, y_2)$, dan $(x_2, y_2)$ adalah empat titik pada data yang membentuk persegi panjang.

## 4. POLINOMIAL MULTILINIER

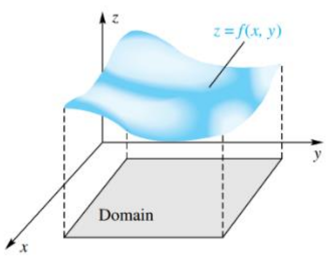
Menurut (Laneve et al., 2010), sebuah fungsi polinomial $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ disebut multilinier jika

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{S \subseteq \{1,2,\dots,n\}} c_S \cdot \prod_{i \in S} x_i \qquad (10)$$

dengan setiap $c_S$ adalah konstanta dalam $\mathbb{R}$.

## 5. FUNGSI DUA VARIABEL

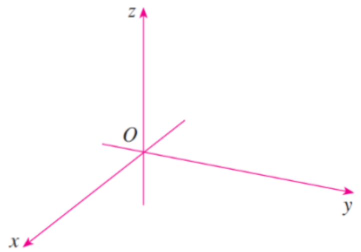
Menurut (Hartman et al., 2024), fungsi $f$ dua variabel adalah aturan yang memetakan setiap pasangan terurut $(x, y) \in D_f$ dengan tepat satu nilai $z = f(x, y) \in \mathbb{R}$. Pada fungsi dua variabel, $x$ dan $y$ disebut variabel bebas dan $z$ disebut variabel tak bebas. Grafik fungsi $f(x, y)$ biasanya berupa permukaan dalam ruang dimensi 3 seperti pada **Gambar 1**.




**Gambar 1.** Grafik Fungsi Dua Variabel
Sumber: (Varberg et al., 2014)

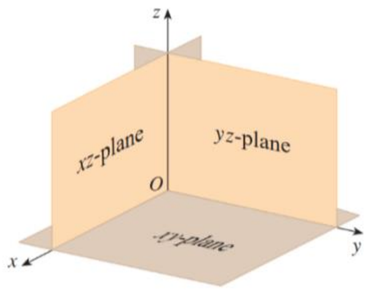
## 6. SISTEM KOORDINAT DIMENSI 3

Menurut (Stewart, 2007), penentuan titik dalam ruang dimensi 3 dapat direpresentasikan sebagai $(a, b, c)$ dari bilangan riil. Sumbu $x$ dan $y$ sebagai sumbu horizontal sedangkan sumbu $z$ sebagai sumbu vertikal seperti pada **Gambar 2**.




**Gambar 2.** Sumbu Koordinat Dimensi 3
Sumber: (Stewart, 2007)

Ketiga sumbu koordinat menentukan tiga bidang koordinat seperti yang diilustrasikan pada **Gambar 3**. Bidang $xy$ adalah bidang yang memuat sumbu $x$ dan $y$; bidang $yz$ memuat sumbu $y$ dan $z$; bidang $xz$ memuat sumbu $x$ dan $z$.




**Gambar 3.** Bidang Koordinat Dimensi 3
Sumber: (Stewart, 2007)

## 7. MATRIKS

Matriks digunakan untuk menyusun SPL. Menurut (Anton & Rorres, 2013), bentuk umum matriks dengan ordo $m \times n$ dapat ditulis sebagai:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

dengan $a_{11}, a_{12}, \dots a_{mn}$ merupakan entri matriks.

## 8. SISTEM PERSAMAAN LINIER (SPL)

Menurut (Anton & Rorres, 2013), bentuk umum SPL yang terdiri dari $m$ buah persamaan dengan $n$ variabel yang tidak diketahui $x_1, x_2, \dots, x_n$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

(12)

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Menurut (Azizah & Ariyanti, 2020), suatu pasangan beberapa bilangan disebut solusi dari suatu SPL jika pasangan tersebut memenuhi kebenaran masing-masing persamaan dari SPL tersebut.

### 9. OPERASI BARIS ELEMENTER (OBE)

Menurut (Imrona, 2013), OBE adalah serangkaian operasi matematis yang diterapkan pada baris-baris suatu matriks, yang meliputi pertukaran baris, perkalian baris dengan skalar, dan penjumlahan baris untuk menyederhanakan bentuknya tanpa mengubah solusi dari sistem linier. Sistem persamaan (12) dapat dinyatakan sebagai perkalian matriks sebagai berikut:

$$AX = B \tag{13}$$

dengan $A$ disebut matriks koefisien berordo $m \times n$, $X$ disebut matriks variabel berordo $n \times 1$, dan $B$ disebut matriks konstanta berordo $m \times 1$. Secara matematis, ditulis sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

SPL dapat diubah menjadi bentuk matriks lengkap (*augmented matrix*) yang secara umum ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{14}$$

dengan matriks koefisien $A$ diperluas dengan cara menambahkan satu kolom yang berisikan matriks konstanta $B$.

OBE digunakan untuk mengubah matriks lengkap agar menjadi bentuk yang lebih mudah diinterpretasikan, seperti bentuk eselon baris atau eselon baris tereduksi. OBE merupakan alat utama dalam metode eliminasi Gauss dan eliminasi Gauss-Jordan.

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan kombinasi antara penelitian murni dan terapan dengan metode kuantitatif. Secara murni, penelitian dilakukan dengan kajian mendalam terhadap landasan matematis interpolasi bilinier melalui studi literatur dari berbagai sumber seperti buku, jurnal, dan artikel ilmiah. Secara terapan, metode tersebut diimplementasikan untuk mengestimasi hasil produksi teh basah menggunakan data sekunder PT Perkebunan Nusantara IV Regional 4 periode 2020-2023 yang mencakup produksi teh, luas areal tanam, dan tahun tanam.

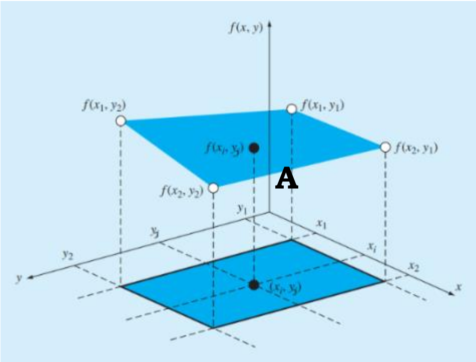
Adapun langkah-langkah pengkajian peneltian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi masalah terkait penggunaan interpolasi bilinier yang sering dilakukan tanpa pemahaman mendalam terhadap dasar matematisnya serta keterbatasan penerapannya dalam estimasi produksi berbasis multivariabel.
2. Pengumpulan data yang dilakukan melalui studi literatur dan data sekunder perusahaan dengan tiga variabel utama: dua variabel independen (luas areal tanam dan umur tanaman) dan satu variabel dependen (hasil produksi teh basah).
3. Kajian matematis interpolasi bilinier dilakukan dengan dua pendekatan: (1) pendekatan polinomial multilinier melalui penyelesaian sistem persamaan linier dari empat titik terdekat, dan (2) pendekatan interpolasi linier bertahap yang melibatkan interpolasi ganda pada sumbu $x$ dan $y$.
4. Penerapan interpolasi bilinier untuk mengestimasi produksi teh pada titik-titik tertentu dengan memanfaatkan empat titik referensi yang membentuk persegi panjang.
5. Analisis hasil estimasi dan penarikan kesimpulan.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

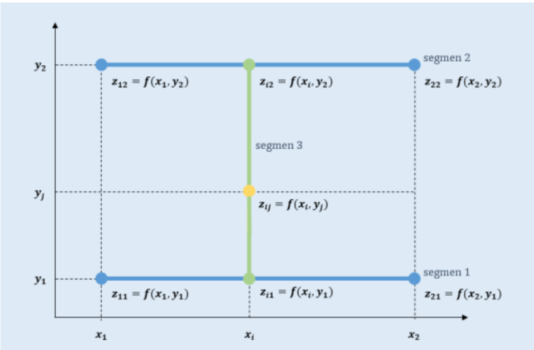
### 1. KAJIAN MATEMATIS INTERPOLASI BILINIER

Interpolasi bilinier berkaitan dengan penentuan nilai-nilai antara fungsi dua variabel $z = f(x, y)$. Misalkan diketahui nilai di empat titik, yaitu $f(x_1, y_1), f(x_2, y_1), f(x_1, y_2)$, dan $f(x_2, y_2)$ seperti pada **Gambar 4**. Titik $(x_i, y_j)$ merujuk pada titik yang ingin diestimasi nilainya dan berada dalam wilayah yang dibatasi oleh keempat titik yang diketahui sehingga diperoleh nilai $z_{ij} = f(x_i, y_j)$.




**Gambar 4.** Ilustrasi Interpolasi Bilinier Dalam Ruang Dimensi 3
Sumber: (Chapra, 2012)

Hasil proyeksi bidang A ditampilkan pada **Gambar 5**.




**Gambar 5.** Bidang Persegi Panjang Interpolasi Bilinier

## A. INTERPOLASI BILINIER MELALUI PENDEKATAN POLINOMIAL MULTILINIER

Misalkan terdapat empat titik pada data sebagaimana yang diilustrasikan pada **Gambar 5** berupa lingkaran biru, yaitu $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1)$, dan $(x_2, y_2)$ dengan nilai fungsi masing-masing $z_{11} = f(x_1, y_1), z_{12} = f(x_1, y_2), z_{21} = f(x_2, y_1)$, dan $z_{22} = f(x_2, y_2)$.

Interpolasi bilinier dapat dinyatakan sebagai polinomial multilinier (Fouad, 2024):

$$f(x_i, y_j) = a_{00} + a_{10}x_i + a_{01}y_j + a_{11}x_i y_j \tag{15}$$

Karena diketahui empat titik, yaitu $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1)$, dan $(x_2, y_2)$ , maka berdasarkan persamaan (15) diperoleh nilai fungsi masing-masing titik berupa sistem persamaan:

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= z_{11} = a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}y_1 + a_{11}x_1y_1 \\ f(x_1, y_2) &= z_{12} = a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}y_2 + a_{11}x_1y_2 \\ f(x_2, y_1) &= z_{21} = a_{00} + a_{10}x_2 + a_{01}y_1 + a_{11}x_2y_1 \\ f(x_2, y_2) &= z_{22} = a_{00} + a_{10}x_2 + a_{01}y_2 + a_{11}x_2y_2 \end{aligned} \tag{16}$$

Sistem persamaan (16) dapat dinyatakan sebagai perkalian matriks sebagaimana yang dijelaskan pada persamaan (13) , yaitu ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_1 & y_2 & x_1y_2 \\ 1 & x_2 & y_1 & x_2y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix}$$

nilai $a_{00}, a_{10}, a_{01}$ dan $a_{11}$ dapat ditemukan dengan menyelesaikan bentuk perkalian matriks di atas menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE) berupa metode eliminasi Gauss-Jordan dengan mengubah bentuk perkalian matriks di atas menjadi matriks lengkap sebagaimana yang dijelaskan pada persamaan (14), sehingga diperoleh:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & z_{11} \\ 1 & x_1 & y_2 & x_1y_2 & z_{12} \\ 1 & x_2 & y_1 & x_2y_1 & z_{21} \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 & z_{22} \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, diperoleh solusi berupa $a_{00}, a_{10}, a_{01}$, dan $a_{11}$ yang dirumuskan sebagai berikut:

$$a_{00} = \frac{x_2y_2z_{11} - x_1y_2z_{21} - x_2y_1z_{12} + x_1y_1z_{22}}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}$$

$$a_{10} = \frac{-y_2z_{11} + y_2z_{21} + y_1z_{12} - y_1z_{22}}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}$$

$$a_{01} = \frac{-x_2z_{11} + x_1z_{21} + x_2z_{12} - x_1z_{22}}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}$$

$$a_{11} = \frac{z_{11} - z_{21} - z_{12} + z_{22}}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}$$

Bentuk polinom multilinier pada persamaan (15) jika dijabarkan dapat membentuk formula umum interpolasi bilinier sesuai persamaan (9).

$$\begin{aligned} f(x, y) = {} & \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}\right) f(x_1, y_1) \\ & + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}\right) f(x_2, y_1) \\ & + \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\right) f(x_1, y_2) \\ & + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\right) f(x_2, y_2) \end{aligned}$$

## B. INTERPOLASI BILINIER MELALUI INTERPOLASI LINIER BERTAHAP

**Tahap 1: Interpolasi Linier Sejajar Sumbu $x$**

Proses interpolasi linier yang sejajar dengan sumbu $x$ akan memiliki dua titik dengan koordinat $x$ yang berbeda dan koordinat $y$ yang sama, seperti pada segmen berwarna biru pada **Gambar 5**.

- Interpolasi linier sejajar sumbu $x$ dilakukan di antara titik $(x_1, y_1)$ dan $(x_2, y_1)$ untuk mendapatkan nilai $z_{i1}$ (segmen 1) serta di antara titik $(x_1, y_2)$ dan $(x_2, y_2)$ untuk mendapatkan nilai $z_{i2}$ (segmen 2).

- Nilai $z_{i1}$ dan $z_{i2}$ berupa lingkaran berwarna hijau.

Karena kedua titik memiliki nilai $y$ yang sama, maka gradien garis yang menghubungkan kedua titik ini adalah nol dikarenakan tidak ada perubahan nilai $y$. Pada fungsi $z = f(x, y)$, meskipun koordinat $y$ pada kedua titik bernilai sama namun nilai $z = f(x, y)$ bisa jadi berbeda. Oleh karena itu, gradien yang digunakan pada proses interpolasi dalam interpolasi bilinier diperoleh dari perubahan nilai $z$ terhadap berubahnya nilai $x$. Secara matematis, gradien fungsi $f(x, y)$ sejajar sumbu $x$ dirumuskan sebagai berikut:

$$m_x = \frac{z_{2j} - z_{1j}}{x_2 - x_1}, \qquad \forall y_j \in \mathbb{R} \tag{17}$$

Dalam konteks dimana $z = f(x, y)$ dan nilai $z$ dicari pada $y$ yang konstan, maka interpolasi dilakukan pada bidang $xz$. Pemodelan dapat dipermudah dengan mentransformasikan persamaan (6) ke bidang $xz$ dengan mengganti:

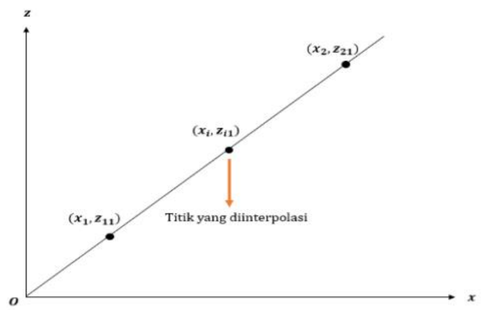
- Variabel $y$ menjadi $z$ (nilai fungsi)
- Variabel $x$ tetap $x$ (sumbu interpolasi)

sehingga secara matematis dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$z_{ij} = z_{1j} + \frac{z_{2j} - z_{1j}}{x_2 - x_1}(x_i - x_1), \quad \forall y_j \in \mathbb{R} \tag{18}$$

**Interpolasi Linier di Sepanjang Segmen 1**

Titik-titik pada segmen 1 adalah titik dengan koordinat $y$ yang konstan, yaitu $y = y_1$ sedangkan koordinat $x$ dan $z = f(x, y_1)$ berubah. Asumsikan diketahui dua titik, yaitu $(x_1, y_1)$ dengan nilai fungsi $z_{11}$ dan $(x_2, y_1)$ dengan nilai fungsi $z_{21}$ dan akan dicari nilai fungsi $z_{i1}$ di titik $(x_i, y_1)$ dimana $x_1 < x_i < x_2$. Hasil proyeksi Segmen 1 pada bidang $xz$ dapat ditampilkan pada **Gambar 6**.




**Gambar 6.** Segmen 1 di Bidang $xz$

**Gambar 6** merupakan garis yang menunjukkan suatu titik yang akan diinterpolasi di antara dua buah titik yang diketahui pada data. Nilai $z_{i1}$ akan dicari dengan menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$z_{i1} = z_{11} + \frac{z_{21} - z_{11}}{x_2 - x_1}(x_i - x_1)$$

atau dalam bentuk polinomial Lagrange:

$$z_{i1} = z_{11}\left(\frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2}\right) + z_{21}\left(\frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1}\right)$$

dengan

$$L_1(x) = \left(\frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2}\right)$$

$$L_2(x) = \left(\frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1}\right)$$

sehingga bentuk lain polinomial Lagrangenya adalah sebagai berikut:

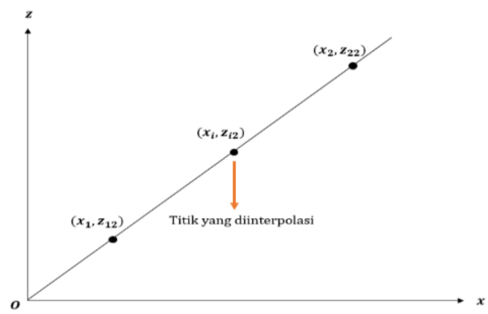
$$z_{i1} = z_{11}L_1(x) + z_{21}L_2(x)$$

Dengan demikian, interpolasi linier sejajar sumbu $x$ untuk $y = y_1$ secara matematis dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$f(x_i, y_1) = \left(\frac{x_2 - x_i}{x_2 - x_1}\right) f(x_1, y_1) + \left(\frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1}\right) f(x_2, y_1) \tag{19}$$

**Interpolasi Linier di Sepanjang Segmen 2**

Titik-titik pada segmen 2 adalah titik dengan koordinat $y$ yang konstan, yaitu $y = y_2$ sedangkan koordinat $x$ dan $z = f(x, y_2)$ berubah. Asumsikan diketahui dua titik, yaitu $(x_1, y_2)$ dengan nilai fungsi $z_{12}$ dan $(x_2, y_2)$ dengan nilai fungsi $z_{22}$ dan akan dicari nilai fungsi $z_{i2}$ di titik $(x_i, y_2)$ dimana $x_1 < x_i < x_2$. Hasil proyeksi segmen 2 pada bidang $xz$ dapat ditampilkan pada **Gambar 7**.




**Gambar 7.** Segmen 2 di Bidang $xz$

**Gambar 7** merupakan garis yang menunjukkan suatu titik yang akan diinterpolasi di antara dua buah titik yang diketahui pada data. Nilai $z_{i2}$ akan dicari dengan menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$z_{i2} = z_{12} + \frac{z_{22} - z_{12}}{x_2 - x_1}(x_i - x_1)$$

atau dalam bentuk polinomial Lagrange:

$$z_{i2} = z_{12}\left(\frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2}\right) + z_{22}\left(\frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1}\right)$$

dengan

$$L_1(x) = \left(\frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2}\right)$$
$$L_2(x) = \left(\frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1}\right)$$

sehingga bentuk lain polinomial Lagrangenya adalah sebagai berikut:

$$z_{i2} = z_{12}L_1(x) + z_{22}L_2(x)$$

Dengan demikian, interpolasi linier sejajar sumbu $x$ untuk $y = y_2$ secara matematis dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\mathrm{f}(\mathrm{x_i}, \mathrm{y_2}) = \left(\frac{x_2 - x_i}{x_2 - x_1}\right) f(x_1, y_2) + \left(\frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1}\right) f(x_2, y_2) \quad (20)$$

**Tahap 2: Interpolasi Linier Sejajar Sumbu $y$ (di Sepanjang Segmen 3)**

Proses interpolasi linier yang sejajar dengan sumbu $y$ akan memiliki dua titik dengan koordinat $y$ yang berbeda dan koordinat $x$ yang sama, seperti pada segmen berwarna hijau.

- Interpolasi linier sejajar sumbu $y$ dilakukan di antara titik $(x_i, y_1)$ dan $(x_i, y_2)$ untuk mendapatkan nilai $z_{ij}$.
- Nilai $z_{ij}$ berupa lingkaran berwarna kuning.

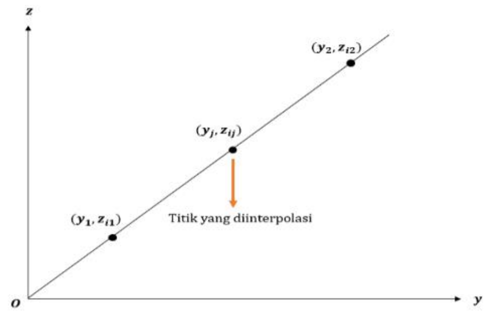
Karena kedua titik memiliki nilai $x$ yang sama, maka gradien garis yang menghubungkan kedua titik ini adalah tidak terdefinisi dikarenakan tidak ada perubahan nilai $x$ . Pada fungsi $z = f(x, y)$, meskipun koordinat $x$ pada kedua titik bernilai sama namun nilai $z = f(x, y)$ bisa jadi berbeda. Oleh karena itu, gradien yang digunakan pada proses interpolasi dalam interpolasi bilinier diperoleh dari perubahan nilai $z$ terhadap berubahnya nilai $y$. Secara matematis, gradien fungsi $f(x, y)$ sejajar sumbu $y$ dirumuskan sebagai berikut:

$$m_y = \frac{z_{i2} - z_{i1}}{y_2 - y_1}, \qquad \forall x_i \in \mathbb{R} \qquad (21)$$

Dalam konteks dimana $z = f(x, y)$ dan nilai $z$ dicari pada $x$ yang konstan, maka interpolasi dilakukan pada bidang $yz$. Pemodelan dapat dipermudah dengan mentransformasikan persamaan (6) ke bidang $yz$ dengan mengganti:

- Variabel $y$ menjadi $z$ (nilai fungsi)
- Variabel $x$ menjadi y (sumbu interpolasi)

Titik-titik pada segmen 3 adalah titik dengan koordinat $x$ yang konstan, yaitu $x = x_i$ sedangkan koordinat $y$ dan $z = f(x, y_1)$ berubah. Asumsikan diketahui dua titik, yaitu $(x_i, y_1)$ dengan nilai fungsi $z_{i1}$ dan $(x_i, y_2)$ dengan nilai fungsi $z_{i2}$ dan akan dicari nilai fungsi $z_{ij}$ di titik $(x_i, y_j)$ dimana $y_1 < y_j < y_2$. Hasil proyeksi segmen 3 pada bidang $yz$ dapat ditampilkan pada **Gambar 8**.




**Gambar 8**. Segmen 3 di Bidang $yz$

**Gambar 8** merupakan garis yang menunjukkan suatu titik yang akan diinterpolasi di antara dua buah titik yang diketahui pada data. Nilai $z_{ij}$ akan dicari dengan menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$z_{ij} = z_{i1} + \frac{z_{i2} - z_{i1}}{y_2 - y_1}(y_j - y_1)$$

atau dalam bentuk polinomial Lagrange:

$$z_{ij} = z_{i1}\left(\frac{y_j - y_2}{y_1 - y_2}\right) + z_{i2}\left(\frac{y_j - y_1}{y_2 - y_1}\right)$$

dengan

$$L_1(y) = \left(\frac{y_j - y_2}{y_1 - y_2}\right)$$
$$L_2(y) = \left(\frac{y_j - y_1}{y_2 - y_1}\right)$$

sehingga bentuk lain polinomial Lagrangenya adalah sebagai berikut:

$$z_{ij} = z_{i1}L_1(y) + z_{i2}L_2(y)$$

Dengan demikian, interpolasi linier sejajar sumbu $y$ untuk $x = x_i$ secara matematis dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$f(x_i, y_j) = \left(\frac{y_2 - y_i}{y_2 - y_1}\right) f(x_i, y_1) + \left(\frac{y_i - y_1}{y_2 - y_1}\right) f(x_i, y_2) \quad (22)$$

Persamaan (22) apabila dijabarkan akan menghasilkan bentuk umum interpolasi bilinier yang sesuai dengan persamaan (9) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x, y) = &\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}\right) f(x_1, y_1) \\ &+ \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}\right) f(x_2, y_1) \\ &+ \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\right) f(x_1, y_2) \\ &+ \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\right) f(x_2, y_2) \end{aligned}$$

## 2. Penerapan Interpolasi Bilinier untuk Mengestimasi Hasil Produksi Teh Basah

### A. Deskripsi Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini mencakup tiga variabel utama, yaitu hasil produksi teh basah (kg), luas areal tanam (ha), dan umur tanaman (tahun). Data dikumpulkan selama periode 2020-2023 yang secara lengkap disajikan pada. Data tersebut kemudian direpresentasikan dalam bentuk tabel dengan umur tanaman sebagai baris dan luas areal tanam sebagai kolom serta entri berupa hasil produksi teh basah sebagaimana yang ditampilkan pada **Gambar 9**. Dalam representasi ini, baris berperan sebagai sumbu- $y$ (vertikal) dan kolom berperan sebagai sumbu-$x$ (horizontal). Entri yang kosong menunjukkan bahwa data hasil produksi teh basah untuk kombinasi luas areal tanam dan umur tanaman tertentu tidak tersedia dalam penelitian ini.

luas areal tanam (ha)

| umur tanaman (tahun) | 14,8 | 15,45 | 18 | 21,43 | 33,38 | 68,91 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | | | | | | 166.009 |
| 7 | | | | 120.695 | | 323.674 |
| 8 | | | | 137.241 | 166.068 | 884.797 |
| 9 | | 166.514 | | 200.680 | 291.839 | 929.379 |
| 10 | 120.602 | 175.325 | | 218.537 | 321.149 | |
| 11 | 126.978 | 230.678 | 233.088 | | 355.903 | |
| 12 | 129.331 | 255.263 | 257.673 | | | |
| 13 | 130.607 | | 266.439 | | | |
| 14 | | | 274.183 | | | |

**Gambar 9.** Representasi Data

### B. Interpolasi Bilinier

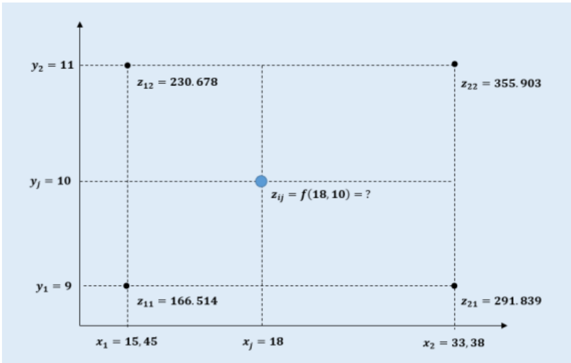
Estimasi akan dilakukan di antara empat titik yang diketahui pada data yang membentuk persegi panjang, yaitu $(15{,}45,\ 9), (33{,}38,\ 9), (15{,}45,\ 11)$, dan $(33{,}38,\ 11)$. Titik yang dipilih untuk estimasi adalah $(18{,}10)$ artinya saat luas areal tanam sebesar 18 ha dan tanaman berumur 10 tahun seperti yang diilustrasikan pada **Gambar 10**.

luas areal tanam (ha)

| umur tanaman (tahun) | 14,8 | 15,45 | 18 | 21,43 | 33,38 | 68,91 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | | | | | | 166.009 |
| 7 | | | | 120.695 | | 323.674 |
| 8 | | | | 137.241 | 166.068 | 884.797 |
| 9 | | $\boxed{166.514}$ | | 200.680 | $\boxed{291.839}$ | 929.379 |
| 10 | 120.602 | 175.325 | | 218.537 | 321.149 | |
| 11 | 126.978 | $\boxed{230.678}$ | 233.088 | | $\boxed{355.903}$ | |
| 12 | 129.331 | 255.263 | 257.673 | | | |
| 13 | 130.607 | | 266.439 | | | |
| 14 | | | 274.183 | | | |

**Gambar 10.** Grid Data Interpolasi

Keempat titik tersebut dipilih karena membentuk pola linier pada masing-masing sumbu, baik sumbu $x$ maupun sumbu $y$ sehingga memenuhi syarat untuk penerapan interpolasi bilinier. Titik yang akan diestimasi harus berada di dalam area yang dibatasi oleh keempat titik yang sudah diketahui dan tidak boleh tepat pada garis horizontal atau vertikal yang menghubungkan titik-titik tersebut. Posisi ini menjamin bahwa interpolasi bilinier dapat dilakukan dengan dua tahap interpolasi linier (sumbu-$x$ dan sumbu-$y$). Jika titik yang akan diestimasi berada pada garis horizontal atau vertikal antar empat titik, maka interpolasi bilinier akan tereduksi menjadi interpolasi linier.




**Gambar 11.** Titik Estimasi pada Sumbu Koordinat

**Gambar 11** menampilkan grid data interpolasi pada sumbu koordinat. $x_1 = 15{,}45$; $x_2 = 33{,}38$; $y_1 = 9$; dan $y_2 = 11$. Adapun nilai untuk masing-masing titik adalah $z_{11} = 166.514$, $z_{21} = 291.839$, $z_{12} = 230.678$, dan $z_{22} = 355.903$ yang berupa lingkaran hitam. Titik yang dipilih untuk estimasi adalah ketika $x_i = 18$ dan $y_j = 10$ atau $(18{,}10)$ dan akan dicari nilai $z_{ij} = f(18{,}10)$ yang berupa lingkaran biru.

#### a. Pendekatan Polinomial Multilinier

Keempat titik yang digunakan beserta nilai $z$ nya disubstitusi ke persamaan (15) sehingga diperoleh nilai fungsi masing-masing titik berupa sistem persamaan:

$$a_{00} + 15{,}45a_{10} + 9a_{01} + 139{,}05a_{11} = 166.514$$
$$a_{00} + 15{,}45a_{10} + 11a_{01} + 169{,}95a_{11} = 230.678$$
$$a_{00} + 33{,}38a_{10} + 9a_{01} + 300{,}42a_{11} = 291.839$$
$$a_{00} + 33{,}38a_{10} + 11a_{01} + 367{,}18a_{11} = 355.903$$

Sehingga, diperoleh nilai $a_{00}, a_{10}, a_{01}$ dan $a_{11}$ dengan rincian sebagai berikut:

$$a_{00} = -\frac{413.470.007}{1.793}$$
$$a_{10} = \frac{12.577.500}{1.793}$$
$$a_{01} = \frac{57.600.276}{1.793}$$
$$a_{11} = -\frac{5.000}{1.793}$$

Selanjutnya, substitusi nilai $a_{00}, a_{10}, a_{01}$, dan $a_{11}$ yang sudah diperoleh beserta titik yang ingin diestimasi, yaitu $x_i = 18$ dan $y_j = 10$ ke dalam persamaan (15) sehingga diperoleh:

$$f(18, 10) = 216.412{,}58$$

Dengan demikian, diperoleh estimasi hasil produksi teh basah saat luas areal tanam sebesar 18 ha dan tanaman berumur 10 tahun adalah sebanyak 216.412,58 kg.

### b. PENDEKATAN INTERPOLASI LINIER BERTAHAP

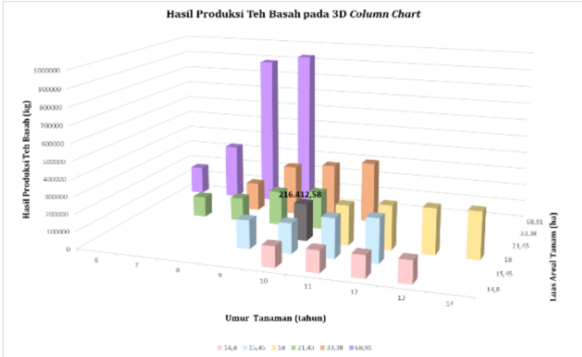
Hasil estimasi diperoleh dengan mensubstitusikan keempat titik yang digunakan beserta nilai $z$ nya ke persamaan (22) sehingga diperoleh hasil estimasi sebagai berikut:

$f(18, 10) = 216.412{,}58$

Dengan demikian, diperoleh estimasi hasil produksi teh basah saat luas areal tanam sebesar 18 ha dan tanaman berumur 10 tahun adalah sebanyak 216.412,58 kg.

## 3. INTERPRETASI HASIL

Penerapan interpolasi bilinier dalam mengestimasi hasil produksi teh basah di PT Perkebunan Nusantara IV Regional 4 menggunakan dua pendekatan matematis, yaitu polinomial multilinier dan interpolasi linier bertahap menghasilkan estimasi yang konsisten namun dengan kompleksitas yang berbeda. Meskipun menghasilkan estimasi yang kosisten, pendekatan polinomial multilinier ternyata lebih rumit dilakukan dibandingkan pendekatan interpolasi bilinier bertahap. Proses ini tidak hanya memakan waktu yang lebih lama tetapi juga rentan terhadap kesalahan perhitungan manual terutama saat menangani matriks berukuran besar dengan angka berupa bukan bilangan bulat. Kedua pendekatan tersebut memberikan nilai estimasi sebesar 216.412,58 kg untuk titik $(18, 10)$ yang menunjukkan produksi teh basah pada luas areal tanam 18 ha dengan tanaman berumur 10 tahun.




**Gambar 12.** Hasil Produksi Teh Basah pada 3D *Column Chart*

Hasil estimasi menunjukkan bahwa produksi teh basah dipengaruhi secara positif oleh kedua variabel (luas areal tanam dan umur tanaman), dimana semakin luas areal tanam dan semakin tua umur tanaman (dalam rentang optimal) maka semakin tinggi produksinya, seperti yang ditampilkan pada **Gambar 12**.

## KESIMPULAN

1. Interpolasi bilinier berhasil dirumuskan melalui dua pendekatan, yaitu:
   a) Pendekatan polinomial multilinier, yaitu membentuk persamaan bilinier $f(x_i, y_j) = a_{00} + a_{10}x_i + a_{01}y_j + a_{11}x_i y_j$ dengan menyelesaikan SPL dari empat titik data.
   b) Pendekatan interpolasi linier bertahap, yaitu dilakukan dengan interpolasi linier sejajar sumbu $x$ lalu dilanjutkan interpolasi linier sejajar sumbu $y$.

   Kedua pendekatan menghasilkan rumus yang sama dengan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x,y) = &\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}\right) f(x_1, y_1) \\ &+ \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}\right) f(x_2, y_1) \\ &+ \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\right) f(x_1, y_2) \\ &+ \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\right) f(x_2, y_2) \end{aligned}$$

   dengan $(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2)$ adalah empat titik yang membentuk grid persegi panjang dan $(x_i, y_j)$ adalah titik yang akan diestimasi.
2. Model interpolasi bilinier diterapkan untuk mengestimasi hasil produksi teh basah di PTPN IV Regional 4 dengan mempertimbangkan variabel luas areal tanam dan umur tanaman. Hasil estimasi menunjukkan pola yang konsisten

dimana peningkatan luas areal tanam dan umur tanaman dalam rentang optimal memberikan nilai produksi yang lebih tinggi. Sebagai contoh, estimasi produksi mencapai 216.412,58 kg untuk areal tanam seluas 18 ha dengan tanaman berumur 10 tahun dihitung menggunakan kedua pendekatan dengan hasil yang sama..

## DAFTAR PUSTAKA


Aisyah, Putra, R. W. Y., & Ambarwati, R. (2021). *Ringkasan Materi, Soal, dan Pembahasan Gradien dan Persamaan Garis Lurus Berbasis HOTS*. Arjasa Pratama. http://repository.radenintan.ac.id/14386/

Anjarsari, I. R. D., Ariyanti, M., & Rosniawaty, S. (2020). Studi ekofisiologis tanaman teh guna meningkatkan pertumbuhan, hasil, dan kualitas teh. *Kultivasi*, *19*(3), 1181–1188. https://doi.org/10.24198/kultivasi.v19i3.26623

Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Elementary Linear Algebra* (11th ed.). WILEY.

Azizah, N. L., & Ariyanti, N. (2020). Buku Ajar Mata Kuliah Dasar-Dasar Aljabar Linear. In M. F. Amir (Ed.), *Buku Ajar Mata Kuliah Dasar-Dasar Aljabar Linear*. UMSIDA Press. https://doi.org/10.21070/2020/978-623-6833-41-4

Chapra, S. C. (2012). Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists. In *Sustainability (Switzerland)* (3rd ed., Vol. 11, Issue 1). Mc Graw Hill.

Christanto, R., Sanubari, J., Timotius, I. K., & Bilinear, I. (2006). Peningkatan Resolusi Citra Digital dengan Interpolasi Bilinear. *Jurnal Ilmiah Elektronika*, *5*(1), 1.

Fouad, S. (2024). *Bilinear Interpolation: Enhancing Image Resolution and Clarity through Bilinear Interpolation*. One Billion Knowledgeable.

Hartman, G., Heinold, B., Siemers, T., Chalishajar, D., & Bowen, J. (2024). *Calculus*. LibreTexts. https://libretexts.org

Howard, I. (2017). *Computational Methods for Numerical Analysis with R*. CRC Press.

Imrona, M. (2013). *Aljabar Linier Dasar* (2nd ed.). Erlangga.

Laneve, C., Lascu, T. A., & Sordoni, V. (2010). The interval analysis of multilinear expressions. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, *267*(2), 43–53. https://doi.org/10.1016/j.entcs.2010.09.017

Mansyur, N. N., Arman, La Gubu, Somayasa, W., & Aswani. (2024). Penerapan Metode Interpolasi Lagrange Dalam Meramalkan Jumlah Pendapatan Pada Percetakan (Studi Kasus: Gevira Advertising). *Jurnal Matematika Komputasi Dan Statistika*, *4*(1), 540. https://doi.org/10.33772/jmks.v4i1.80

Munir, R. (2015). *Metode Numerik* (4th ed., Vol. 1). Informatika Bandung.

Pratama, H. A., & Sam'an, M. (2023). Implementasi Metode Interpolasi Bilinear Untuk Perbesaran Skala Citra. *Jurnal Komputer Dan Teknologi Informasi*, *1*(1), 22. https://doi.org/10.26714/.v1i1.11803

Sihombing, S. C. (2019). Prediksi Hasil Produksi Pertanian Kelapa Sawit di Provinsi Riau dengan Pendekatan Interpolasi Newton Gregory Forward (NGF). *Prosiding Seminar Nasional II Hasil Litbangyasa Industri*, *1999*, 63.

Stewart, J. (2007). Calculus - Early Transcendentals. In *Calculus - Early Transcedentals 6e* (6th ed.). Bob Pirtle. papers2://publication/uuid/A6C2205E-0174-4653-A8A9-EACFAE818B74

Tohir, M., As'ari, A. R., Anam, A. C., & Tauiq, I. (2022). *Matematika untuk SMP/MTs Kelas VIII* (Drajat (ed.); 1st ed.). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan teknologi.

Varberg, D., Purcell, E. J., & Rigdon, S. E. (2014). *Calculus Early Transcendentals* (1st ed.). Pearson New International Edition.