

SPAN TERKECIL DARI PELABELAN $L(3, 1)$ PADA GRAF PENDULUM DAN GRAF ILALANG

Hafif Komarullah

Program Studi Tadris Matematika, Fakultas Tarbiyah, Universitas Al Falah Assunniyyah, Jember, Indonesia

e-mail : hafififa4@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini membahas masalah penentuan span terkecil dari pelabelan $L(3, 1)$ pada dua kelas graf, yaitu graf pendulum (P_n^k) dan graf ilalang ($S_{n,m}$). Pelabelan $L(3, 1)$ adalah pelabelan pada graf di mana dua simpul yang bertetangga memiliki label dengan selisih minimal 3, sedangkan dua simpul yang berjarak dua memiliki label dengan selisih minimal 1. Tujuan penelitian ini adalah untuk memperoleh nilai span terkecil ($\lambda_{3,1}$) dari kedua kelas graf tersebut. Metode yang digunakan adalah metode deskriptif aksiomatik dan pendeteksian pola, dengan langkah-langkah mencakup konstruksi pelabelan, analisis jarak titik pada graf, serta verifikasi pola pelabelan yang memenuhi syarat $L(3, 1)$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa untuk graf pendulum, $\lambda_{3,1}(P_n^k) = k + 2$ untuk $k \geq 6$ dan $n \geq 4$. Sementara itu, untuk graf ilalang $S_{n,m}$, diperoleh $\lambda_{3,1}(S_{n,m}) = n + 2$ untuk $m \leq n - 3$. Dengan demikian, pola pelabelan yang diperoleh memberikan batas bawah yang optimal bagi kedua kelas graf tersebut. Hasil ini diharapkan dapat menjadi referensi untuk pengembangan kajian pelabelan graf dengan syarat jarak tertentu pada struktur graf lainnya.

Kata Kunci: Pelabelan $L(3, 1)$, Span Terkecil, Graf Pendulum, Graf Ilalang.

Abstract

This study addresses the problem of determining the minimum span of $L(3, 1)$ labeling on two classes of graphs, namely the pendulum graph (P_n^k) and the grass graph ($S_{n,m}$). The $L(3, 1)$ labeling assigns integers to vertices such that adjacent vertices differ by at least 3, while vertices at distance two differ by at least 1. The objective is to find the minimum span ($\lambda_{3,1}$) for both graph classes. The research employs a descriptive-axiomatic approach combined with pattern detection, involving labeling construction, distance analysis, and verification of labeling patterns satisfying the $L(3, 1)$ conditions. The results reveal that for the pendulum graph (P_n^k), $\lambda_{3,1}(P_n^k) = k + 2$ for $k \geq 6$ and $n \geq 4$. For the grass graph $S_{n,m}$, the span is $\lambda_{3,1}(S_{n,m}) = n + 2$ for $m \leq n - 3$. These findings provide optimal lower bounds for the minimum span in both graph classes and contribute to the development of graph labeling studies with distance constraints on various graph structures.

Keywords: $L(3, 1)$ Labeling, Minimum Span, Pendulum Graph, Grass Graph.

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan bidang dalam matematika diskrit yang mengalami perkembangan pesat dan berperan penting dalam memodelkan beragam permasalahan nyata, termasuk jaringan komunikasi (Kaur, 2021), sistem transportasi (Yuliani & Laksana, 2021), jaringan saraf otak (Sporns, 2018), hingga bidang biologi (Suharni dkk., 2023). Graf memodelkan objek-objek diskrit melalui representasi simpul dan hubungan antar simpul dalam bentuk sisi (Liang dkk., 2022). Kajian terhadap struktur graf memungkinkan analisis yang lebih mendalam mengenai hubungan dan keterkaitan antar unsur di dalamnya, sehingga teori graf memiliki peran strategis dalam pengembangan model matematis yang efisien.

Pelabelan graf merupakan salah satu topik yang memiliki peran penting dalam kajian teori graf. Pelabelan graf didefinisikan sebagai pemberian label bilangan bulat pada simpul, sisi, atau keduanya sesuai dengan aturan tertentu (Halikin & Komarullah, 2022). Berbagai jenis pelabelan telah dikembangkan untuk memenuhi kebutuhan analisis yang berbeda. Salah satu jenis pelabelan yang memiliki relevansi tinggi dalam bidang komunikasi nirkabel adalah pelabelan $L(h, k)$. Pada pelabelan ini, dua simpul yang berjarak satu diberikan label dengan selisih minimal h , sedangkan dua simpul yang berjarak dua diberikan label dengan selisih minimal k . Penerapan pelabelan $L(h, k)$ berkaitan erat dengan alokasi frekuensi, di mana simpul graf merepresentasikan stasiun pemancar, sedangkan sisi

graf menunjukkan hubungan atau jarak antarstasiun (Griggs & Yeh, 1992).

Pelabelan $L(3,1)$ merupakan salah satu kasus khusus dari pelabelan $L(h,k)$ yang menarik untuk diteliti. Permasalahan utama dalam pelabelan ini adalah penentuan span terkecil (*minimum span*), yaitu label terbesar yang digunakan dalam pelabelan dengan tetap memenuhi seluruh ketentuan yang berlaku (Fernandez dkk., 2008). Nilai span yang lebih kecil mencerminkan efisiensi penggunaan label dan sumber daya yang dimodelkan dalam graf, sehingga penentuan span terkecil memiliki signifikansi teoretis maupun praktis. Nilai span terkecil pada graf G dinotasikan dengan $\lambda(G)$ (Shao dkk., 2008).

Sejumlah penelitian sebelumnya berfokus pada pelabelan $L(3,1)$ untuk berbagai kelas graf, seperti graf lintasan, graf siklus, graf lengkap, graf bipartit, graf bintang, graf bintang ganda (Ghos & Pal, 2016), graf *supercycle* (Febriyani dkk., 2023) dan graf operasi comb graf bintang dan graf siklu (Aini dkk., 2025). Kajian terhadap graf pendulum (P_n^k) serta graf ilalang ($S_{n,m}$) belum dilakukan, padahal kedua kelas graf tersebut memiliki struktur yang lebih kompleks dan berbeda dibandingkan graf yang telah diteliti sebelumnya. Kompleksitas struktur ini menuntut pendekatan analisis yang sistematis untuk memperoleh pemahaman mendalam mengenai keterkaitan antara karakteristik graf dan parameter pelabelan.

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis span terkecil dari pelabelan $L(3,1)$ pada graf pendulum dan graf ilalang. Kajian ini diharapkan memberikan kontribusi terhadap pengembangan teori pelabelan graf serta memperkaya pemahaman mengenai hubungan antara struktur graf dan parameter pelabelan dengan syarat jarak tertentu.

KAJIAN TEORI

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika diskrit yang mempelajari struktur yang terdiri atas simpul dan sisi yang menghubungkan pasangan simpul. Secara formal, graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan $G = (V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong berhingga dari simpul, sedangkan $E(G)$ adalah himpunan sisi yang menghubungkan dua simpul berbeda pada $V(G)$. Panjang lintasan dalam graf adalah jumlah sisi yang dilalui pada lintasan tersebut,

dan jarak antara dua simpul u dan v dinotasikan dengan $d(u,v)$, yaitu panjang lintasan terpendek yang menghubungkan keduanya (Chartrand, 1977). Salah satu topik dalam teori graf yang terus diteliti adalah pelabelan graf. Berdasarkan domainnya, pelabelan graf terbagi menjadi tiga jenis, yakni pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total (Komarullah, 2023). Salah satu bentuk pelabelan titik adalah pelabelan $L(3,1)$.

Definisi 1. Misalkan graf G adalah graf terhubung sederhana dengan himpunan simpul $V(G)$. Pelabelan $L(3,1)$ pada graf G didefinisikan oleh fungsi $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ untuk setiap $x, y \in V(G)$ berlaku $|f(x) - f(y)| \geq 3$ jika $d(x, y) = 1$ dan $|f(x) - f(y)| \geq 1$ jika $d(x, y) = 2$. Bilangan k adalah label terbesar dari pelabelan $L(3,1)$ yang disebut span. Nilai minimum span dari pelabelan $L(3,1)$ pada graf G dinotasikan dengan $\lambda_{3,1}(G)$ (Ghos & Pal, 2016).

Kelas graf yang dikaji dalam penelitian ini meliputi graf pendulum (P_n^k) dan graf ilalang ($S_{n,m}$).

Definisi 2. Graf pendulum dengan order $nk + 1$ dan ukuran $n(k + 1)$ dinotasikan dengan P_n^k adalah graf yang dibangun dengan menempelkan graf siklus (C_n) ke setiap daun dari graf bintang S_k (Kusbudiono dkk., 2022).

Definisi 3. Graf ilalang dengan order $mn + n + 1$ dan ukuran mn dinotasikan dengan $S_{n,m}$ adalah graf yang dibentuk dari operasi penggabungan m salinan graf bintang S_m yang diidentifikasi pada titik yang berderajat satu dari graf bintang S_n .

Lemma 1. Jika H adalah subgraf dari graf G , maka $\lambda_{3,1}(H) \leq \lambda_{3,1}(G)$.

Lemma 2. Untuk setiap $n \geq 2$, $\lambda_{3,1}(S_n) = n + 2$.

METODE

Penelitian ini menggunakan pendekatan deskriptif aksiomatik yang dipadukan dengan pendeteksian pola. Pendekatan deskriptif aksiomatik dipilih karena permasalahan yang dikaji bersifat teoretis, sehingga diperlukan konstruksi definisi, teorema, serta bukti matematis yang logis dan sistematis. Pendeteksian pola digunakan untuk mengidentifikasi keteraturan pelabelan yang memungkinkan penentuan span terkecil pada kelas graf yang diteliti.

Objek penelitian meliputi dua kelas graf, yaitu graf pendulum P_n^k dan graf ilalang $S_{n,m}$. Proses penelitian diawali dengan konstruksi graf dan penentuan jarak antar simpul untuk memperoleh struktur dasar yang akan dilabeli. Selanjutnya dilakukan penentuan pola pelabelan melalui pemberian label bilangan bulat pada simpul-simpul graf sesuai dengan ketentuan pelabelan $L(3,1)$. Setiap pola pelabelan yang diperoleh diverifikasi agar memenuhi dua syarat utama:

1. Simpul-simpul yang berjarak satu memiliki selisih label minimal tiga.
2. Simpul-simpul yang berjarak dua memiliki selisih label minimal satu.

Setelah pola pelabelan yang memenuhi syarat ditemukan, dilakukan analisis untuk menentukan span dari pola tersebut. Teknik pembuktian matematis digunakan untuk menunjukkan bahwa pola pelabelan yang dihasilkan benar-benar menghasilkan span terkecil, sehingga tidak terdapat pelabelan lain yang lebih efisien dalam memenuhi ketentuan $L(3,1)$. Hasil pendeteksian pola selanjutnya dibentuk menjadi sebuah teorema untuk memberikan rumus umum dari pelabelan $L(3,1)$ pada kelas graf yang dipilih. Dalam membuktikan teorema yang dihasilkan, peneliti menggunakan Lemma 1 dan Lemma 2 yang sudah dipaparkan pada bagian sebelumnya.

Metode ini diharapkan menghasilkan formulasi matematis yang valid mengenai span terkecil pelabelan $L(3,1)$ pada graf pendulum dan graf ilalang, sekaligus memperluas kajian teoretis pada bidang pelabelan graf dengan syarat jarak tertentu.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas tentang pelabelan $L(3,1)$ pada graf pendulum dan graf ilalang.

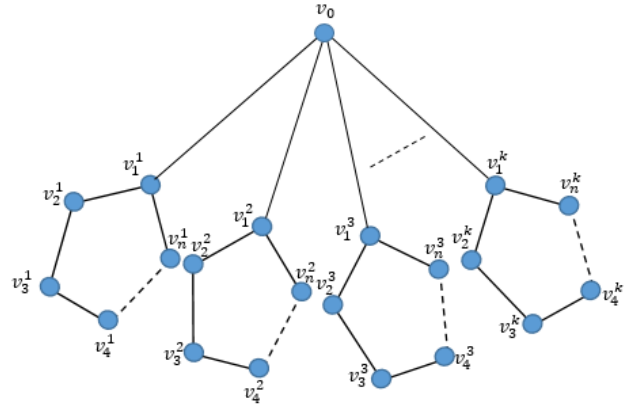
1. Graf pendulum

Langkah pertama untuk menentukan span terkecil dari pelabelan $L(3,1)$ pada graf pendulum yaitu mengkonstruksi graf pendulum. Himpunan titik dan sisi pada graf pendulum sebagai berikut.

$$V(P_n^k) = \{v_0\} \cup \{v_j^i | i = 1, 2, \dots, k \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n\}$$

$$E(P_n^k) = \{v_0 v_1^i, v_1^i v_n^i, v_j^i v_{j+1}^i | i = 1, 2, \dots, k \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n-1\}$$

Ilustrasi graf pendulum P_n^k dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf Pendulum

Teorema 1. Untuk setiap $k \geq 6, n \geq 4, \lambda_{3,1}(P_n^k) = k + 2$.

Bukti. Untuk membuktikan $\lambda_{3,1}(P_n^k) = k + 2$, maka akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{3,1}(P_n^k) \geq k + 2$ dan $\lambda_{3,1}(P_n^k) \leq k + 2$. Pandang bahwa graf bintang S_k adalah subgraf dari graf pendulum P_n^k . Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2 diperoleh $\lambda_{3,1}(P_n^k) \geq \lambda_{3,1}(S_k) = k + 2$. Terbukti bahwa $\lambda_{3,1}(P_n^k) \geq k + 2$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{3,1}(P_n^k) \leq k + 2$ yaitu dengan mengkonstruksikan fungsi pada graf pendulum. Definisikan fungsi $f: V(P_n^k) \rightarrow \{0, 1, \dots, k + 2\}$ sebagai berikut.

$$f(v_0) = 0$$

a. Kasus $n = 4$

(i) untuk $i \leq 5$

$$f(v_1^i) = i + 1, \text{ untuk } i = 1, 2, 3, 5.$$

$$f(v_2^i) = \begin{cases} i + 5, & \text{untuk } i = 1, 2, 3, \\ i - 2, & \text{untuk } i = 4, 5. \end{cases}$$

$$f(v_3^i) = \begin{cases} i + 1, & \text{untuk } i = 1, 2, 3, \\ 11 - i, & \text{untuk } i = 4, 5. \end{cases}$$

$$f(v_4^i) = \begin{cases} i + 5, & \text{untuk } i = 1, 2, \\ 1, & \text{untuk } i = 3, \\ 7 - i, & \text{untuk } i = 4, 5. \end{cases}$$

(ii) untuk $i > 5$

$$f(v_j^i) = \begin{cases} i + 2, & \text{untuk } j = 1, \\ 4, & \text{untuk } j = 2, \\ 7, & \text{untuk } j = 2, \\ 3, & \text{untuk } j = 2. \end{cases}$$

b. Kasus $n \equiv 1 \pmod 3$ dan $n \neq 4$

(i) untuk $i = 1, 2$

$$f(v_j^i) = \begin{cases} i + 2, & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } j \neq n, \\ 7, & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod 3, \\ 0, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod 3, \\ 8, & \text{untuk } j = n. \end{cases}$$

(ii) untuk $i = 3$

$$f(v_j^3) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } j \neq n, \\ 2, & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod 3, \\ 8, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod 3, \\ 1, & \text{untuk } j = n. \end{cases}$$

(iii) untuk $i = 4, 5$

$$f(v_j^i) = \begin{cases} i+2, & \text{untuk } j = 1, \\ 5, & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod 3, j \neq 1, \text{ dan } j \neq n, \\ 2, & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod 3, \\ 8, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod 3, \\ 1, & \text{untuk } j = n. \end{cases}$$

(iv) untuk $i > 5$

$$f(v_j^i) = \begin{cases} i+2, & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } j \neq n, \\ 2, & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod 3, \\ 5, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod 3, \\ 1, & \text{untuk } j = n. \end{cases}$$

c. Kasus $n \equiv 2 \pmod 3$ (i) untuk $i = 1, 2$

$$f(v_j^i) = \begin{cases} i+2, & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } j \neq n-1, \\ 7, & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod 3 \text{ dan } j \neq n, \\ 0, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod 3, \\ 5, & \text{untuk } j = n-1, \\ 8, & \text{untuk } j = n. \end{cases}$$

(ii) untuk $i = 3$

$$f(v_j^3) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } j \neq n-1, \\ 2, & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod 3 \text{ dan } j \neq n, \\ 8, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod 3, \\ 4, & \text{untuk } j = n-1, \\ 1, & \text{untuk } j = n. \end{cases}$$

(iii) untuk $i = 4, 5$

$$f(v_j^i) = \begin{cases} i+2, & \text{untuk } j = 1, \\ 8, & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } j \neq 1, \\ 2, & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod 3 \text{ dan } j \neq n, \\ 5, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod 3, \\ 1, & \text{untuk } j = n. \end{cases}$$

(iv) untuk $i > 5$

$$f(v_j^i) = \begin{cases} i+2, & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } j \neq n-1, \\ 2, & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod 3 \text{ dan } j \neq n, \\ 5, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod 3, \\ 1, & \text{untuk } j = n-1, \\ 4, & \text{untuk } j = n. \end{cases}$$

d. Kasus $n \equiv 0 \pmod 3$ (i) untuk $i = 1, 2$

$$f(v_j^i) = \begin{cases} i+2, & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod 3, \\ 7, & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod 3, \\ 0, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod 3 \text{ dan } j \neq n, \\ 1, & \text{untuk } j = n. \end{cases}$$

(ii) untuk $i = 3$

$$f(v_j^3) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod 3, \\ 2, & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod 3, \\ 8, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

(iii) untuk $i = 4, 5$

$$f(v_j^i) = \begin{cases} i+2, & \text{untuk } j = 1, \\ 0, & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } j \neq 1, \\ 3, & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod 3 \text{ dan } j \neq n-1, \\ 8, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod 3 \text{ dan } j \neq n, \\ 5, & \text{untuk } j = n-1, \\ 2, & \text{untuk } j = n. \end{cases}$$

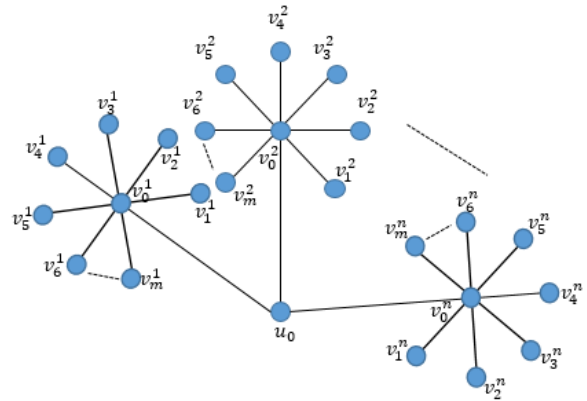
(iv) untuk $i > 5$

$$f(v_j^i) = \begin{cases} i+2, & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod 3, \\ 2, & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod 3, \\ 5, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Perlu diperhatikan bahwa pada fungsi f , setiap pasangan titik dengan jarak satu memiliki perbedaan label minimal 3, sedangkan pasangan titik dengan jarak dua memiliki perbedaan label minimal 1. Dengan demikian, fungsi f memenuhi ketentuan pelabelan $L(3,1)$, sehingga $\lambda_{3,1}(P_n^k) \leq k+2$. Karena $\lambda_{3,1}(P_n^k) \geq k+2$ dan $\lambda_{3,1}(P_n^k) \leq k+2$, maka $\lambda_{3,1}(P_n^k) = k+2$. ■

2. Graf ilalang

Graf ilalang $S_{n,m}$ memiliki himpunan titik $V(S_{n,m}) = \{u_0\} \cup \{v_j^i | j = 0, 1, \dots, m \text{ dan } i = 1, 2, \dots, n\}$ dan himpunan sisi $E(S_{n,m}) = \{u_0 v_0^i | i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_0^i v_j^k | k = i; i = 1, 2, \dots, n \text{ dan } j = 1, 2, \dots, m\}$. Gambar 2 menyajikan ilustrasi penotasian titik dan sisi pada graf ilalang $S_{n,m}$.



Gambar 2. Graf Ilalang

Teorema 2. Untuk setiap $m \leq n-3$, $\lambda_{3,1}(S_{n,m}) = n+2$.

Bukti. Dengan cara yang sama, pada Teorema 2 akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{3,1}(S_{n,m}) \geq n+2$ dan $\lambda_{3,1}(S_{n,m}) \leq n+2$. Perhatikan bahwa graf bintang S_n adalah subgraf dari graf ilalang $S_{n,m}$. Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2 didapatkan bahwa $\lambda_{3,1}(S_{n,m}) \geq \lambda_{3,1}(S_n) = n+2$, sehingga terbukti $\lambda_{3,1}(S_{n,m}) \geq n+2$. Selanjutnya untuk menentukan batas atas dari Teorema 2 yaitu dengan

mengkonstruksikan fungsi yang memetakan setiap titik pada graf ilalang ke himpunan bilangan $\{0, 1, \dots, n+2\}$ sebagai berikut.

$$f(u_0) = n+2.$$

$$f(v_0^i) = i-1; i = 1, 2, \dots, n.$$

(i) untuk $i = 1, 2, 3$

$$f(v_j^i) = i+j+1; j = 1, 2, \dots, m$$

(ii) untuk $i = 4, 5, \dots, n$

$$f(v_j^i)$$

$$= \begin{cases} i+j+1 & ; j = 1, 2, \dots, m-j+3, \\ i+j-(n+1) & ; j = m-j+4, m-j+5, \dots, m. \end{cases}$$

Pada pelabelan $L(3,1)$ menyaratkan titik berjarak satu dan dua berturut-turut memiliki selisih label minimal 3 dan 1. Akan dibuktikan bahwa fungsi f memenuhi syarat pelabelan $L(3,1)$.

Titik berjarak satu

a. Titik u_0 dan v_0^i untuk $i = 1, 2, \dots, n$

$$|f(u_0) - f(v_0^i)| = |(n+2) - (i-1)| \\ = |n-i+3| \geq 3$$

b. Titik v_0^i dan v_j^i untuk $i = 1, 2, 3$ dan $j = 1, 2, \dots, m$

$$|f(v_0^i) - f(v_j^i)| = |(i-1) - (i+j+1)| \\ = |-2-j| \geq 3$$

c. Titik v_0^i dan v_j^i untuk $i = 4, 5, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, m-j+3$

$$|f(v_0^i) - f(v_j^i)| = |(i-1) - (i+j+1)| \\ = |-2-j| \geq 3$$

d. Titik v_0^i dan v_j^i untuk $i = 4, 5, \dots, n$ dan $j = m-j+4, m-j+5, \dots, m$

$$|f(v_0^i) - f(v_j^i)| = |(i-1) - (i+j-(n+1))| \\ = |-j+n| \geq 3$$

Titik berjarak dua

a. Titik u_0 dan titik v_j^i untuk $i = 1, 2, 3$ dan $j = 1, 2, \dots, m$

$$|f(u_0) - f(v_j^i)| = |(n+2) - (i+j+1)| \\ = |n-i-j+3| \geq 1$$

b. Titik u_0 dan titik v_j^i untuk $i = 4, 5, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, m-j+3$

$$|f(u_0) - f(v_j^i)| = |(n+2) - (i+j+1)| \\ = |n-i-j+3| \geq 1$$

c. Titik u_0 dan titik v_j^i untuk $i = 4, 5, \dots, n$ dan $j = m-j+4, m-j+5, \dots, m$

$$|f(u_0) - f(v_j^i)| = |(n+2) - (i+j-(n+1))| \\ = |2n-i-j+3| \geq 1$$

d. Titik v_j^i dan v_k^i untuk $j \neq k$

Perhatikan bahwa label setiap titik v_j^i dan v_k^i untuk $j \neq k$ berbeda, sehingga jelas bahwa $|f(v_j^i) - f(v_k^i)| \geq 1$

Tebukti bahwa fungsi f memenuhi kaidah pelabelan $L(3,1)$, sehingga $\lambda_{3,1}(S_{n,m}) \leq n+2$. Karena $\lambda_{3,1}(S_{n,m}) \geq n+2$ dan $\lambda_{3,1}(S_{n,m}) \leq n+2$, maka $\lambda_{3,1}(S_{n,m}) = n+2$. ■

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, diperoleh bahwa $\lambda_{3,1}(P_n^k) = k+2$ untuk $k \geq 6$ dan $n \geq 4$, serta $\lambda_{3,1}(S_{n,m}) = n+2$ untuk $m \leq n-3$.

SARAN

Peneliti menyarankan kepada peneliti lain untuk mencari span terkecil dari pelabelan $L(3,1)$ pada kelas graf yang lebih kompleks. Peneliti lain juga dapat mengaplikasikan pelabelan $L(3,1)$ pada kehidupan sehari-hari misalnya dalam proses pengamanan pesan.

DAFTAR PUSTAKA

- Aini, S., Yulianti, K., & Kusumah, Y. S. (2025). Nilai Minimum Span Pelabelan $L(3, 1)$ pada Graf Hasil Operasi Comb Antara Graf Bintang dan Graf Siklus. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 13(2), 29-36.
- Chartrand, G. (1977). *Introductory Graph Theory*. New York: Dover.
- Febryani, F., Yulianti, K., Kusumah, Y. S., & Wijayanti, U. Nilai Minimal Span Pelabelan $L(3, 1)$ pada Graf Supercycle $Sc(n, r)$. *Jurnal EurekaMatika*, 11(2), 145-154. <https://doi.org/10.17509/jem.v11i2.66736>
- Fernandez, C., Flores, A., Tomova, M., & Wyels, C. (2008). The Radio Number of Gear Graphs. arXiv preprint arXiv:0809.2623.
- Ghosh, S., & Pal, A. (2016). $L(3, 1)$ -labeling of some simple graphs. *Advanced Modeling and Optimization*, 18(2), 243-248.
- Griggs, J. R., & Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5(4), 586-595. <https://doi.org/10.1137/0405048>
- Halikin, I., & Komarullah, H. (2022). Labelling of Generalized Friendship, Windmill, and Torch Graphs with a Condition at Distance Two. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 35-39). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acs.k.220202.008>
- Kaur, D. G. (2021). Applying Graph Theory to Secure Data by Cryptography. *International Journal of*

Linguistics and Computational Applications (IJLCA), 8(1), 1-3.
<https://doi.org/10.30726/ijlca/v8.i1.2020.81001>

- Komarullah, H. (2023). Nilai Minimum Span pada Graf Gurita, Graf Siput, dan Graf Ubur-Ubur. In *Prossiding Galuh Mathematics National Conference* (Vol. 3, No. 1, pp. 56-62).
- Kusbudiono, Umam, I. A. I., Halikin, I., & Fatekurohman, M. (2022). $L(2, 1)$ Labeling of Lollipop and Pendulum Graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 44-47). Atlantis Press.
<https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.010>
- Liang, F., Qian, C., Yu, W., Griffith, D., & Golmie, N. (2022). Survey of graph neural networks and applications. *Wireless Communications and Mobile Computing*, 2022(1), 1-18.
<https://doi.org/10.1155/2022/9261537>
- Shao, Z., Yeh, R. K., Zhang, D. (2008). The $(2,1)$ -Labelling on Graphs and Frequency Assignment Problem. *Applied Mathematics Letters*, 21, 37-41.
<https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.08.029>
- Sporns, O. (2018). Graph theory methods: applications in brain networks. *Dialogues in clinical neuroscience*, 20(2), 111-121.
- Suharini, Y. S., Ramli, M., Sulistyowati, S., & RD, E. (2023). Pendekatan Teori Graf untuk Analisis Jaringan Interaksi Protein-Protein. *Jurnal Ilmu Pengetahuan dan Teknologi*, 7(2), 1-7.
<https://doi.org/10.31543/jii.v7i2.258>
- Yuliani, S. Y., & Laksana, E. A. (2021). Dijkstra's Algorithm to Find Shortest Path of Tourist Destination in Bandung. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 12(8), 1163-1168.