MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 2 No.6 Tahun 2017*
ISSN 2301-9115

RGD – ALJABAR

Dika Anggun Nandaningrum
(S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya)
Email : dikaanggunandaningrum@gmail.com
Raden Sulaiman
(Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya)
Email : Sulaimanraden@yahoo.com

Abstrak

RGD – aljabar merupakan perluasan dari RG – aljabar yang diperkenalkan pertama kali pada tahun 2014 oleh R. A. K. Omar. RGD – aljabar adalah suatu himpunan tak kosong X yang memuat konstanta $0 \in X$, dengan operasi $*$ sehingga untuk setiap $m, n, z \in X$ yang memenuhi aksioma-aksioma yang disebutkan sebagai berikut $m * n = (m * z) * (n * z), (m * n) * z = (m * z) * n, m * 0 = m, m * m = 0, m * n = 0$ dan $n * m = 0$ mengakibatkan $m = n$. Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan konsep RGD – aljabar dan sifat-sifatnya. Hasil penelitian diperoleh konsep RGD – aljabar dan sifat-sifatnya serta telah dibahas hubungan RGD – aljabar dengan grup abelian, ideal di RGD – aljabar, elemen khusus di RGD – aljabar dan keterkaitan dengan beberapa kelas aljabar lain yang diperkenalkan lebih dulu.

Kata Kunci: RG – aljabar, RGD – aljabar, medial, ideal.

Abstract

.RGD – algebra is an extension of RG – algebra wich was first introduced in 2014 by R.A.K Omar. RGD-algebra is a non-empty set X that containing constants $0 \in X$, with operation $*$ so for each $m, n, z \in X$ meet the following axioms $m * n = (m * z) * (n * z), (m * n) * z = (m * z) * n, m * 0 = m, m * m = 0, m * n = 0$ dan $n * m = 0$ and $n * m = 0$ imply $m = n$. This study aims to describe RGD-algebra concept and its properties, and then has been discussed about relationship between RGD-algebra with abelian group, ideal ini RGD-algebra, special element in RGD-algebra and related with in other structure which was introduced first.

Keywords: RG – algebra, RGD – algebra, medial, ideal.

PENDAHULUAN

Pada tahun 1966, K. Iseki dan Y. Imai memperkenalkan struktur aljabar baru yang disebut BCK – aljabar. BCI – aljabar yang merupakan perumunan dari BCK – aljabar, sehingga BCI – aljabar memuat BCK – aljabar.

BCI – aljabar dan BCK – aljabar mempunyai keterkaitan dengan RG – aljabar yang diperkenalkan oleh R. A. K. Omar pada tahun 2014. RG – aljabar adalah suatu himpunan tak kosong X yang memuat konstanta $0 \in X$, dengan operasi $*$ sehingga untuk setiap $m, n, z \in X$ memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut: (i) $m * 0 = m$, (ii) $m * y = (m * z) * (y * z)$, (iii) $m * n = 0$ dan $n * m = 0$ mengakibatkan $m = n$.(Omar, 2014:60)

Selanjutnya Omar menurunkan dua teorema yang berbunyi jika X adalah RG – aljabar dan $m, n, z \in X$ maka (i)$m * m = 0$, (ii) $(m * n) * z = (m * z) * n$. Namun pada pembuktian teorema itu ada hal yang meragukan dan tidak dapat diterima. Padahal teorema itu sering dipakai dalam pembuktian teorema-teorema selanjutnya. Oleh karena itu, peneliti memasukan dua teorema tersebut pada axioma RGD – aljabar.

Skripsi ini membahas RGD – aljabar yang merupakan perluasan dari RG – aljabar. Masalah yang akan dibahas adalah konsep RGD – aljabar dan sifat-sifatnya. Sebagai tambahan, juga akan diperkenalkan dan dipelajari ideal di RGD − aljabar, elemen khusus, dan keterkaitan RGD − aljabar dengan struktur aljabar lain.

LANDASAN TEORI

A. Operasi Biner

Definisi 2.1.
Diketahui A adalah sebuah himpunan tak kosong. Operasi biner pada A adalah fungsi dari $A \times A$ ke A.

(Gallian, 2010: 40)

B. Grup

Definisi 2.2.

Suatu grup merupakan pasangan terurut $(G,*)$ dimana G merupakan himpunan tak kosong dan $*$ merupakan operasi biner pada G yang memenuhi aksioma berikut:

(i) $(p * q) * c = p * (q * c)$, $\forall p, q, c \in G$. (asosiatif)

(ii) $\exists\, e \in G$, yang disebut identitas dari G sedemikian hingga $\forall p \in G$ berlaku $p * e = e * p = p$. (identitas)

(iii) $\forall\, p \in G$, $\exists\, p^{-1} \in G$ sedemikian hingga $p^{-1} * p = p * p^{-1} = e$. (invers)

(Herstein, 1995:41)

C. Grup Abelian

Definisi 2.3.

Jika suatu grup $(G,*)$ memenuhi $p * q = q * p$, $\forall\, p, q \in G$ maka $(G,*)$ disebut grup abelian.

(Herstein, 1995:43)

D. BCI – aljabar

Definisi 2.4.

BCI − aljabar merupakan himpunan tak kosong X dengan konstanta $0 \in X$ dan suatu operasi biner $*$, yang memenuhi lima aksioma berikut:
Untuk setiap $k, l, j \in X$
(BCI1) $((k * l) * (k * j)) * (j * l) = 0$\`
(BCI2) $(k * (k * l)) * l = 0$
(BCI3) $k \leq k$
(BCI4) $k \leq k$ mengakibatkan $k = 0$
(BCI5) $k * l = 0$ dan $y * k = 0$ maka $k = y$.
Dimana $k \leq l$ didefinisikan dengan $k * l = 0$.

(Omar, 2014:59)

E. BCK – aljabar

Definisi 2.5

BCK − aljabar merupakan himpunan tak kosong X dengan konstanta $0 \in X$ dengan suatu operasi biner $*$, yang memenuhi lima aksioma berikut:
Untuk setiap $k, l, j \in X$
(BCK1) $((k * l) * (k * j)) * (l * j) = 0$
(BCK2) $(k * (k * l)) * l = 0$
(BCK3) $k * k = 0$
(BCK4) $0 * k = 0$
(BCK5) Jika $k * l = 0$ dan $y * l = 0$ maka $k = l$.

(Hong, 2003:549)

PEMBAHASAN

A. RGD – aljabar

Definisi 3.1
RGD − aljabar adalah suatu himpunan tak kosong X yang memuat konstanta $0 \in X$, dengan operasi $*$ sehingga untuk semua $m, n, z \in X$ memenuhi:
(RGD1) $m * n = (m * z) * (n * z)$
(RGD2) $(m * n) * z = (m * z) * n$
(RGD3) $m * 0 = m$
(RGD4) $m * m = 0$
(RGD5) $m * n = 0$ dan $n * m = 0$ mengakibatkan $m = n$

RGD – aljabar X dengan operasi $*$ kadang kala ditulis $(X,*,0)$ dan untuk semua $m, n \in X$ notasi $m \wedge n$ diartikan sebagai $m * (m * n)$.

Contoh 3.1

Misalkan $X = \{0, a, b, c\}$ dengan operasi $*$ yang didefinisikan pada tabel Cayley berikut:

Tabel 3.1

$*$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

X memenuhi kelima aksioma RGD − aljabar.

Definisi 3.2.
$(X,*,0)$ BCI − aljabar disebut BCI − aljabar medial jika untuk semua $k, l, j, u \in X$ berlaku $(k * l) * (j * u) = (k * j) * (l * u)$.
(Omar, 2014:60)

Teorema 3.1
Jika $(X,*,0)$ RGD − aljabar, maka $(X,*,0)$ adalah BCI − aljabar.

Bukti:

Misalkan $(X,*,0)$ merupakan RGD-aljabar, dan $k,l,j \in X$

(i) $((k*l)*(k*j))*(j*l) = ((k*l)*(j*l))*(k*j)$((RGD2)) $= (k*j)*(k*j)$ ((RGD1)) $= 0$((RGD4))

(ii) $(k*(k*l))*l = (k*l)*(k*l)$((RGD2)) $= 0$ ((RGD4))

(iii) $k*k = 0$. jelas terpenuhi karena (RGD4)

(iv) $k*0 = 0$, berdasarkan yang diketahui $k = 0$ (RGD3)
Sehingga $k*0 = 0$ mengakibatkan $k = 0$.

(v) $k*l = 0$ dan $l*k = 0$ maka $k = l$ berdasarkan (RGD5).

Jadi, terbukti bahwa untuk setiap RGD-aljabar merupakan BCI-aljabar.

Teorema 3.2.

Jika $(X,*,0)$ RGD – aljabar, maka $(X,*,0)$ adalah BCI – aljabar Medial.

Bukti:

Misalkan $(X,*,0)$ RG – aljabar, dan $k,l,j,u \in X$

Berdasarkan Teorema 3.1. RGD – aljabar adalah BCI – aljabar dan memenuhi

$(k*l)*(j*u) = \big((k*u)*(j*u)\big)*(l*u)$ ((RGD2)) $= (k*j)*(l*u)$ ((RGD1))

Jadi, terbukti bahwa untuk setiap RGD-aljabar merupakan BCI-aljabar Medial.

Proposisi 3.1.

Misalkan $(X,*,0)$ RGD – aljabar. Untuk semua $m,n,z \in X$ berlaku:

(i) $0*(n*m) = m*n$
(ii) $0*(0*m) = m$
(iii) $m*(m*n) = n$
(iv) $m*n = (z*n)*(z*m)$.

Bukti:

(i) $0*(n*m) = (m*m)*(n*m)$
$= m*n$

(ii) $0*(0*m) = m*0 = m$

(iii) $m*(m*n) = (m*0)*(m*n)$
$= (m*m)*(0*n)$
$= 0*(0*n) = n$

(iv) $m*n = 0*(n*m) = (z*z)*(n*m) = (z*n)*(z*m)$

Jadi, terbukti bahwa proposisi 3.1 berlaku.

Proposisi 3.2.

Misalkan $(X,*,0)$ RGD – aljabar, maka untuk semua $m,n,z \in X$

(i) $(m*n)*(0*n) = \big(m*(0*n)\big)*n = m$

(ii) $m*\big(m*(m*n)\big) = m*n$

(iii) $(m*n)*z = (m*n)*((z*n)*(0*n))$
$= \big((m*n)*n\big)*(z*n)$
$= \big((m*z)*z\big)*(n*z)$
$= (m*z)*n.$

Bukti:

(i) Misalkan $(X,*,0)$ merupakan RGD-aljabar, dan $m,n \in X$
$m = m*0 = (m*n)*(0*n)$
$= \big(m*(n*0)\big)*(0*n) = \big(m*(0*n)\big)*(n*0) = \big(m*(n*0)\big)*n$

(ii) $m*\big(m*(m*n)\big) = m*n$

(iii) Ada 4 pembuktian

1. $(m*n)*z = (m*n)*(z*0) = (m*n)*((z*0)*0) = (m*n)*((z*0)*(n*n)) = (m*n)*((z*n)*(0*n)$
2. $(m*n)*z = \big((m*z)*(n*z)\big)*z$
Misalkan $(m*z) = p$ dan $(n*z) = q$
$\big((m*z)*(n*z)\big)*z = (p*q)*z$
$= (p*q)*(z*0)$
$= (p*z)*(q*0)$
$= (p*z)*q$
$= (p*z)*q = \big((m*z)*z\big)*(n*z)$
3. Misalkan $(m*n) = p$
$(m*n)*z = p*z$
$= (p*n)*(z*n)$
$= \big((m*n)*n\big)*(z*n)$
4. $(m*n)*z = (m*z)*n$

Dari 1,2,3 dan 4 maka

$(m*n)*z = (m*n)*((z*n)*(0*n) = \big((m*z)*z\big)*(n*z) = \big((m*n)*n\big)*(z*n) = (m*z)*n$

Jadi, terbukti bahwa $(X,*,0)$ merupakan RGD – aljabar, maka aksioma pada proposisi 3.3 berlaku.

Teorema 3.3.

Misalkan $(G,\oplus)$ grup abelian. $(G,*,e)$ adalah RGD – aljabar jika $\forall m,n \in G$ berlaku $m*n = m\oplus n^{-1}$ dengan e identitas operasi $\oplus$.

Bukti:

Misalkan $(G,\oplus)$ grup abelian, dan $m,n,z \in G$

(i) $(m*z)*(n*z) = (m\oplus z^{-1})\oplus(n\oplus z^{-1})^{-1}$
$= (m\oplus z^{-1})\oplus(z\oplus n^{-1})$
$= m\oplus(z^{-1}\oplus z)\oplus n^{-1} = m\oplus e\oplus n^{-1} = m\oplus n^{-1}$

(ii) $(m*n)*z = (m\oplus n^{-1})\oplus z^{-1}$
$= m\oplus(n^{-1}\oplus z^{-1})$
$= m\oplus(z^{-1}\oplus n^{-1})$
$= (m\oplus z^{-1})\oplus n^{-1}$

(iii) $m * e = m \oplus e^{-1} = m \oplus e = m$
(iv) $m * m = m \oplus m^{-1} = e$
(v) Misalkan $m * n = n * m = e$. Sehingga $m \oplus n^{-1} = n \oplus m^{-1} = e$, maka
$m = m \oplus e$
$= e \oplus m = (n \oplus m^{-1}) \oplus m = m \oplus e = m$ ■

Jadi, grup abelian $(G, \oplus)$ adalah RGD – aljabar dan $m * n = m \oplus n^{-1}$, $\forall m, n \in G$.

Teorema 3.4.

Misalkan $(X,*,0)$ RGD − aljabar dengan $m * n \neq 0$. $\forall m \neq n \in X$ dengan $(X, \oplus)$ adalah grup abelian dengan operasi $\oplus$ yang didefinisikan $m \oplus n = m * (0 * n), \forall m, n \in X$.

Bukti:

Misalkan $(X,*,0)$ RGD – aljabar, dan $m, n, z \in X$

(i) Akan ditunjukkan bahwa operasi $\oplus$ bersifat asosiatif
$(m \oplus n) \oplus z = (m * (0 * n)) * (0 * z)$
$= (m * 0) * ((0 * n) * z)$
$= m * (0 * (n * (0 * z))) = m \oplus (n \oplus z)$

(ii) Akan ditunjukan bahwa X memiliki elemen identitas yaitu 0.
Ada $e = 0$ maka $e \oplus m = 0 \oplus m = 0 * (0 * m) = m$ dan $m \oplus e = m \oplus 0 = m * (0 * 0) = m)$

(iii) Selanjutnya akan ditunjukan bahwa $\forall m \in X$ mempunyai invers di X yaitu $(0 * m)$.
$m \oplus (0 * m) = m * (0 * (0 * m)) = 0$
$(0 * m) \oplus m = (0 * m) * (0 * m) = 0$

(iv) Akan ditunjukan bahwa operasi $\oplus$ bersifat komutatif
$m \oplus n = m * (0 * n)$
$= 0 * ((0 * n) * m)$
$= (0 * 0) * ((0 * n) * m)$
$= m * (0 * n) = n \oplus m$

Jadi, RGD – aljabar $(X,*,0)$ dengan $m * n \neq 0$. $\forall m \neq n$ dengan $(X, \oplus)$ memenuhi $m \oplus n = m * (0 * n), \forall m, n \in X$ adalah grup abelian.

B. Ideal di RGD − aljabar

Definisi 3.3.

Misalkan $(X,*,0)$ BCK – aljabar, sub himpunan tak kosong A merupakan BCK − ideal di X jika:

(i) $0 \in A$
(ii) $m * n \in A$ dan $n \in A$ mengakibatkan $m \in A$, untuk setiap $m, n \in X$.

(Omar, 2014:64)

Definisi 3.4.

Misalkan $(X,*,0)$ RGD − aljabar, sub himpunan tak kosong A pada X disebut RGD − ideal di X jika memenuhi:

(i) $0 \in A$
(ii) $m, n \in A$ dan $0 * m \in A$ mengakibatkan $0 * n \in A$, untuk setiap $m, n \in X$

(Omar, 2014:64)

Lemma 3.1.

Misalkan $(X,*,0)$ RGD – aljabar. Setiap RGD – ideal di X adalah BCK – ideal di X.

Bukti:

Misalkan $(X,*,0)$ RGD – aljabar. A merupakan RGD – ideal di X. Maka $0 \in A$. Misalkan $m * n \in A$ dan $n \in A$

$n = n * 0$ ((RGD3))

$= n * (m * m)$ ((RGD4))

$= (n * 0) * (m * m)$ ((RGD3))
(Teorema 3.2.)= $x * ((0 * 0) * (y * (0 * z)))$
$= (n * m) * (0 * m) \in A$ (Teorema 3.2.)

Berdasarkan RGD – ideal

$(n * m) * (0 * m) \in A$ dan $0 * (n * m) = m * n \in A$ (Proposisi 3.1. (i)) maka $0 * (0 * m) = m \in A$ (Proposisi 3.1. (ii)). ■

Jadi, untuk setiap RGD – ideal adalak BCK-ideal

Lemma 3.2.

Misalkan $(X,*,0)$ BCK − aljabar. $A \subset X$. Jika A merupakan BCK − ideal maka A merupakan RGD − ideal.

Bukti:

Misalkan $(X,*,0)$ BCK-aljabar. A merupakan BCK − ideal di X. Maka $0 \in A$.

Misalkan $m * n \in A$ dan $0 * m \in A$

$0 * m = 0$ ((BCK1))

$= (0 * n)$ ((BCK1))

$0 * m = 0 * n \in A$ ■

Jadi, ada BCK – ideal yang merupakan RGD – ideal

C. Elemen Khusus di RGD – aljabar

Definisi 3.5.

Misalkan $(X,*,0)$ RGD – aljabar. Elemen a di X disebut elemen medial jika memenuhi $(m * a) * m = a$, untuk setiap $m \in X$. Himpunan semua elemen medial di X dinotasikan $M(X)$.

(Omar, 2014:66)

Proposisi 3.3.

Dalam RGD − aljabar $(X,*,0)$ maka berlaku:

(i) $0 \in M(X)$

(ii) $a \in M(X)$ jika dan hanya jika $((m*a)*m) \in M(X)$

(iii) $a \in M(X)$ jika dan hanya jika $0*a = a$

(iv) $a \in M(X)$ jika dan hanya jika $(a \wedge m) \in M(X)$

(v) Jika $a \in M(X)$ maka $a*(0*n) = n*a, \forall n \in X$

(vi) Jika $a, b \in M(X)$ maka $a*b = b*a$.

Bukti:

Misalkan $(X,*,0)$ RGD – aljabar, dan $m \in X$

(i) $0 = (m*0)*m$ maka $0 \in M(X)$

(ii) $(\Longrightarrow)$ Misalkan $a \in M(X)$ maka $(m*a)*m = a$ berlaku:

$$
\begin{aligned}
(m*a)*m &= a\\
&= 0*(0*a)\\
&= 0*((m*m)*a)\\
&= 0*((m*m)*(a*0))\\
&= 0*((m*a)*(m*0))\\
&= 0*((m*a)*m)\\
&= (m*m)*((m*a)*m)\\
&= \big(m*((m*a)*m)\big)*m
\end{aligned}
$$

$(m*a)*m = \big(m*((m*a)*m)\big)*m$

$(m*a)*m = a, a \in M(X)$

(iii) $(\Longrightarrow)$ Misalkan $a \in M(X)$, maka

$$
\begin{aligned}
(m*a)*m &= \Big(m*\big((m*a)*m\big)\Big)*m\\
&= (m*m)*((m*a)*m)\\
&= 0*((m*a)*m)\\
&= 0*((m*a)*(m*0))\\
&= 0*((m*m)*(a*0))\\
&= 0*((m*m)*a)\\
&= 0*(0*a)\\
&= a
\end{aligned}
$$

$(m*a)*m = a$

$a \in M(X), 0*a = a$

$(\Longleftarrow)$ Misalkan $0*a = a$ maka

$a = 0*a$

$= (m*m)*a$

$= (m*m)*(a*0)$

$= (m*a)*(m*0) = (m*a)*m$

$a = (m*a)*m, a \in M(X)$

(iv) $(\Longrightarrow)$ Misalkan $a \in M(X)$, maka

$(m*a)*m = a$

$(m*(m*(m*a))*m = m*(m*a)$

$(m*(a \wedge m))*m = a \wedge m$, $a \wedge m \in M(X)$

$(\Longleftarrow)$ Misalkan $a \wedge m \in M(X)$ maka

$\big(m*(a \wedge m)\big)*m = a \wedge x$

$(m*\big(m*(m*a)\big))*m = m*(m*a)$

$(m*a)*m = a, a \in M(X)$

(v) Misalkan $a \in M(X)$, dan $\forall n \in X$ berlaku

$$
\begin{aligned}
a &= (m*a)*m\\
a*(0*n) &= ((m*a)*m)*(0*n)\\
&= \big((m*a)*0\big)*(m*n)\\
&= (m*a)*(m*n)\\
&= (m*m)*(a*n)\\
&= 0*(a*n)\\
&= n*a
\end{aligned}
$$

(vi) Misalkan $a, b \in M(X)$ maka berlaku

$$
\begin{aligned}
a*b &= \big((m*a)*m\big)*\big((m*b)*m\big)\\
&= \big((m*a)*(m*b)\big)*(m*m)\\
&= \big((m*a)*(m*b)\big)*0\\
&= (m*a)*(m*b)\\
&= (m*m)*(a*b)\\
&= 0*(a*b)\\
&= b*a
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa $(X,*,0)$ merupakan RGD – aljabar, maka aksioma pada proposisi 3.4 berlaku.

Definisi 3.6.

Misalkan $(X,*,0)$ BCI − aljabar, X disebut *quasi right alternate* jika untuk setiap $m, n \in X$ berlaku $m*(n*n) = (m*n)*n$.

(Omar, 2014:67)

Lemma 3.3.

Misalkan $(X,*,0)$ RGD − aljabar sedemikian hingga $M(X) = X$ maka X adalah *quasi right alternate* berlaku $m*n = n*m, \forall m, y \in X$.

Bukti:

Misalkan $(X,*,0)$ RGD − aljabar dan $(X) = X$ $\forall m, n \in X, m, n \in M(X)$ berlaku:

$m*(n*n) = (m*0)*(n*n)$

$= (m*n)*(0*n)$

$= (m*n)*n$ X adalah *quasi right alternate*.

Karena $m, n \in M(X)$ maka $m*n = n*m$ (Proposisi 3.4. (vi)).

Jadi, $(X,*,0)$ RGD − aljabar sedemikian hingga $M(X) = X$ maka X adalah *quasi right alternate* dan $m*n = n*m$.

Teorema 3.5.

Misalkan $(X,*,0)$ RGD − aljabar maka himpunan $M(X)$ adalah RGD − aljabar di X.

Bukti:

Misal $(X,*,0)$ RGD-aljabar, dan $m, n \in X$

(i) Berdasarkakn Proposisi 3.3(i) maka jelas $0 \in M(X)$. ■

(ii) $m*n \in M(X)$ dan $0*m \in M(X)$ maka

$$
\begin{aligned}
0*m &= \big(m*(0*m)\big)*m\\
&= (m*m)*(0*m)\\
&= 0*(0*m) = m
\end{aligned}
$$

$0*m = m$, maka $m \in M(X)$

(Proposisi 3.3. (iii))
$0 * n = (0 * 0) * (0 * n) = 0 * (0 * n) = n$
$0 * n = n$ maka $n \in M(X)$ (Proposisi 3.3 (iii)), karena $n \in M(X)$ maka $(m * n) * m \in M(X)$ (Proposisi 3.3 (ii))
$(m * n) * m = (m * m) * (n * 0)$
$= (m * m) * n \quad = 0 * n$
Karena $(m * n) * m = 0 * n$ maka $0 * n \in M(X)$.

Jadi, $(X,*,0)$ RGD − aljabar maka himpunan $M(X)$ adalah RGD − ideal di X.

Definisi 3.7.
Misalkan $(X,*,0)$ RGD – aljabar $m, n \in X$, n konjuget m jika memenuhi $(m * n) * m = m$. Kumpulan semua elemen yang konjuget $m \in X$ di notasikan dengan $C(m)$.

(Omar, 2014:68)

Teorema 3.6.

Misalkan $(X,*,0)$ RGD – aljabar $m, n \in X$ berlaku $n \in C(m)$ jika dan hanya jika $0 * n = m$.

Bukti:
Misal $(X,*,0)$ RGD – aljabar $m, n \in X$
($\Longrightarrow$)Misalkan $n \in C(m)$ maka
$(m * n) * m = m$
$(m * n) * (m * 0) = m$
$(m * m) * (n * 0) = n$
$0 * (n * 0) = m$
$0 * n = m$
($\Longleftarrow$) Misalkan $0 * n = m$ maka
$0 * n = m$
$0 * (n * 0) = m$
$(m * m) * (n * 0) = m$
$(m * n) * (m * 0) = m$
$(m * n) * m = m$, maka $n \in C(m)$
Jadi, $(X,*,0)$ RGD – aljabar $m, n \in X$ berlaku $n \in C(m)$ jika dan hanya jika $0 * n = m$.

Lemma 3.4.

Misalkan $(X,*,0)$ RGD − aljabar , maka semua $m, n, z \in X$ berlaku:
(i) $0 \in C(0)$
(ii) $n \in C(m)$ jika dan hanya jika $m \in C(n)$
(iii) $m \in M(m)$ jika dan hanya jika $m \in C(m)$
(iv) $m \in C(n)$ maka $m \wedge n \in C(n)$
(v) $m \in C(n)$ dan $n \in C(z)$ maka $m = z$.

Bukti:
Misalkan $(X,*,0)$ RGD – aljabar, dan $m, n, z \in X$
(i) $0 = 0 * 0 = (0 * 0) * 0$ (RGD3) maka $0 \in C(0)$.
(ii) ($\Longrightarrow$)Misalkan $n \in C(m)$ maka
$0 * n = m$
$n = 0 * (0 * n)$
$n = 0 * m$
$n = 0 * m$, maka $m \in C(n)$.
($\Longleftarrow$)Misalkan $m \in C(n)$ maka
$0 * m = n$
$m = 0 * (0 * m)$
$m = 0 * n$
$m = 0 * n$, maka $n \in C(m)$.
(iii) ($\Longrightarrow$)Misalkan $m \in M(X)$ maka $0 * m = m$ (Proporsisi 3.3. (iii)) sehingga $0 * x = x$ maka $m \in C(m)$ (Teorema 3.6.).
($\Longleftarrow$) Misalkan $m \in C(m)$ maka $m = 0 * m$ (Teorema 3.6.), sehingga $x = 0 * m$ maka $m \in M(X)$ (Proporsisi 3.3. (iii)).
(iv) Misalkan $m \in C(n)$ maka $0 * m = n$ (Teorema 3.6.)
$n = 0 * m$
$= 0 * (n * (n * m)$
$n = 0 * (m \wedge n)$, $m \wedge n \in C(n)$ Misalkan $m \in C(n)$ dan $n \in C(z)$ maka $0 * m = n$ dan $0 * n = z$ (Teorema 3.6.).
$m = 0 * (0 * m)$
$= 0 * n \quad (m \in C(n))$
$= z \quad (n \in C(z))$
$m = z$

Jadi, terbukti bahwa $(X,*,0)$ merupakan RGD – aljabar, maka aksioma pada lemma 3.4 berlaku..

PENUTUP

A. Kesimpulan

Dalam skripsi ini telah dibahas mengenail konsep RGD – aljabar, sifat –sifanya serta idela di RGD – aljabar, elemen khusus di RGD – aljabar serta keterkaitan dengan beberapa kelas aljabar lain yang diperkenalkan lebih dulu

B. Saran

Penulis menyarankan pada pembaca untuk dapat mendalami dan mengembangkan sifat sifat maupun keterkaitan dengan kelas aljabar lain yang belum dibahas dalam skripsi ini.

DAFTAR PUSTAKA

Gallian, J.A. 2010. *Contemporary Abstract Algebra.* Seventh Edition. Duluth: University of Minnesota Duluth.

Herstein, I.N. 1995. *Abstract Algebra.* Third Edition. Chicago: University of Chicago.

Omar, R. A. K. 2014. *On RG-Algebra.* Pure Mathematical Sciences, Vol 3: Hal 59-70.

Hong, Sung Min, Jun, Young Bae, Ozturk, M. Ali.2003. *Generalizations of BCK-Algebra*. Scientiae Mathematicae Japonicae, Vil 8: Hal 549-557.

Winarsih dan Suryoto. 2014. *Kelas-Kelas BCI-aljabar dan Hubungannya Satu dengan yang lain*. Jurusan MATEMATIKA FSM Universitas Diponegoro.