MATH*unesa*

Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 2 No.6 Tahun 2017*

ISSN 2301-9115

IDEAL ANTI FUZZY PADA ALJABAR_CI

Siti Nur Laili

(S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya)

Email : sitinurlaily57@gmail.com

Raden Sulaiman

(Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya)

Email : sulaimanraden@yahoo.com

Abstrak

Struktur aljabar merupakan himpunan yang tak kosong dengan satu atau lebih operasi dan memenuhi aksioma– aksioma yang berlaku. Pulak Sabhanpandit dan Biman Ch.Chetia memperkenalkan ideal anti fuzzy dalam aljabar-CI. Aljabar-CI merupakan suatu himpunan tak kosong X, elemen khusus 1 dan operasi biner $*$ memenuhi aksioma : (i) $x * x = 1$, (ii)$1 * x = x$, (iii) $x * (y * z) = y * (x * z)$, untuk semua $x, y, z \in X$. Misal A himpunan fuzzy pada aljabar-CI, A disebut ideal anti fuzzy jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi $\mu_A(x * y) \leq \mu_A(y)$ dan $\left(\mu_A\left(\left(x * (y * z)\right) * z\right)\right) \leq \max\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$. Hasil penelitian menjelaskan konsep dan struktur yang terkait dari ideal anti fuzzy pada aljabar-CI.

Kata Kunci: Aljabar-CI, ideal anti fuzzy, homomorfisme, hasil kali kartesius

Abstract

The structure of algebra is a non empty set with one or more operations and satisfy axioms. Pulak Sabhanpandit and Biman Ch.Chetia introduced anti fuzzy ideals in CI-algebras. CI-algebra is a non empty set of X, a fixed element 1 and a binary operation $*$ satisfies axioms : (i) $x * x = 1$, (ii) $1 * x = x$, (iii) $x * (y * z) = y * (x * z)$, for all $x, y, z \in X$. Let A fuzzy set of kcI-algebra X, A is called an anti fuzzy ideasl of X if $\mu_A(x * y) \leq \mu_A(y)$ and $\left(\mu_A\left(\left(x * (y * z)\right) * z\right)\right) \leq \max\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$ for every $x, y, z \in X$. The research results explain the concept and associated structure of anti fuzzy ideal in CI-algebra.

Keywords: CI-algebra, anti fuzzy ideal, homomorphism, cartesian product

PENDAHULUAN

Struktur aljabar merupakan himpunan yang tak kosong dengan satu atau lebih operasi dan memenuhi aksioma– aksioma yang berlaku. Materi dari struktur aljabar yaitu grup dan ring. Namun, terdapat contoh lain dari struktur aljabar yang umumnya belum diketahui, yaitu aljabar-CI.

Aljabar-CI adalah himpunan tak kosong dengan sebuah operasi biner dan memenuhi aksioma pada aljabar-CI. Beberapa bagian yang terkain dengan dari aljabar-CI salah satunya yaitu, ideal. Seiring dengan perkembangan zaman, penelitian tentang ideal dari aljabar-CI mulai dipadukan dengan konsep lain, salah satunya adalah konsep himpunan fuzzy.

Pada tahun 1965, Prof. Lotfi A. Zadeh memperkenalkan konsep himpunan fuzzy, yaitu perluasan dari himpunan klasik. Jika himpunan klasik mempunyai derajat keanggotaan 0 dan 1, lain halnya dengan himpunan fuzzy. Himpunan fuzzy mempunyai derajat keanggotaan yang terletak pada interval [0,1]. Gagasan ideal fuzzy pada aljabar-CI diperkenalkan oleh Samy AM. Mostafa, Mokthar Ac. Abdel Naby, dan Osama R.Elgedy. Misal A himpunan fuzzy pada aljabar-CI, A disebut ideal fuzzy jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi $\mu_A(x * y) \geq \mu_A(y)$ dan $\left(\mu_A\left(\left(x * (y * z)\right) * z\right)\right) \geq \min\{\mu_A(x), x\mu_A(y)\}$. Para peneliti mengembangkan konsep fuzzy yang dipadukan dalam berbagai teori, salah satunya gagasan fuzzy subgrup dan anti fuzzy subgrup diperkenalkan oleh R. Biswas. Berdasarkan gagasan R. Biswas dapat dimodifikasi untuk diterapkan pada konsep ideal dari aljabar-CI.

Ideal anti fuzzy pada aljabar-CI diperkenalkan oleh Pulak Sabhapandit, dan Biman Ch. Chetia. Misal A himpunan fuzzy pada aljabar-CI, A disebut ideal anti fuzzy jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi $\mu_A(x * y) \leq \mu_A(y)$ dan $\left(\mu_A\left((x*(y*z))*z\right)\right) \leq \max\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$. Ideal anti fuzzy pada aljabar-CI memiliki banyak sifat-sifat yang terkait, seperti homomorfisme, hasil kali kartesius dan seterusnya. Pada jurnal ini akan dibahas lebih lanjut tentang ideal anti fuzzy pada aljabar-CI, yaitu sifat-sifat dan karakteristik yang terkait dengan ideal anti fuzzy pada aljabar-CI.

LANDASAN TEORI

A. Operasi Biner

Definisi 2.1

Misalkan F adalah $F \neq \emptyset$. Operasi biner $"*"$ di G adalah fungsi dari $G \times G \rightarrow G$.

(Joseph A. Gallian, 2010 : 40)

B. Operasi Uner

Definisi 2.2

Fungsi dari $G \rightarrow G$ disebut operasi uner.

(Ana Sokolova, 2013 : 1)

C. Grup

Definisi 2.3

Suatu grup $(G,*)$ adalah pasangan terurut dengan $G \neq \emptyset$ dan operasi biner $*$ sebagai berikut:

1. $a * (b * c) = (a * b) * c$, untuk semua $a, b, c \in G$
2. Ada $e \in G \ni a * e = e * a = a$, untuk semua $a \in G$. Elemen e ini disebut elemen identitas.
3. Ada $a^{-1} \in G \ni a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, untuk semua $a \in G$. Elemen a^{-1} disebut elemen invers dari a.

(Herstein, 1995 : 40)

D. Homomorfisma Grup

Definisi 2.4

Pemetaan φ dari suatu grup $(G,*)$ ke grup (G', o) dikatakan homomorfisme jika $\varphi(k * l) = \varphi(k)\ o\ \varphi(l)$ untuk semua $k, l \in G$.

(Joseph A. Gallian, 2010:200)

E. Endomorfisme Grup

Definisi 2.5

Homomorfisme suatu grup ke grup yang sama dinamakan endomorfisme.

(Joseph A. Gallian, 2010:200)

F. Kernel Homomorfisme

Definisi 2.6

Misalkan homomorfisme φ dari G ke G' dengan identitas e didefinisikan kernel φ adalah $\{x \in G |\ \varphi(x) = e\}$. Kernel φ dinotasikan dengan $Ker\varphi$.

(Joseph A. Gallian, 2010:200)

Definisi 2.8

Misal F dan H adalah himpunan fuzzy pada semesta X. A dikatakan irisan B jika dan hanya jika, didefinisikan sebagai berikut:

$F \cap H = \left\{\left(x, \mu_{F \cap H}(x)\right) |\ \mu_{F \cap H} = min\left(\mu_F(x), H(x)\right)\right\}$

(Zimmerman, 1996:16)

Definisi 2.9

Misal F dan H adalah himpunan fuzzy pada semesta X. F dikatakan gabungan H jika dan hanya jika, didefinisikan sebagai berikut:

$F \cup H = \left\{\left(x, \mu_{F \cup H}(x)\right) |\ dengan\ \mu_{F \cup H}(x) = max\left(\mu_F(x), \mu_H(x)\right)\right\}$

(Zimmerman, 1996:17)

Definisi 2.10

Misalkan A himpunan fuzzy pada semesta X. A dikatakan komplemen jika dan hanya jika, didefinisikan sebagai berikut :

$A^c = \left\{\left(x, \mu_{A^c}(x)\right) |\ \mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)\right\}$

Komplemen himpunan fuzzy A dinotasikan dengan A^c.

(Zimmerman, 1996:17)

G. Hasil Kali Kartesius Himpunan Fuzzy

Definisi 2.11

Hasil kali kartesius himpunan fuzzy didefinisikan sebagai berikut :

Misalkan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ merupakan himpunan fuzzy yang berturut-turut pada $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Hasil kali kartesius himpunan fuzzy $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ didefinisikan sebagai berikut:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$
$$= \left\{\left(x, \mu_{(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)}\right) \middle| \; \mu_{(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)}(x)\right.$$
$$\left. = min\{\mu_{A_i}(x_i) | \; x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \in X_i\}\right\}$$

(Zimmerman, 1996:28)

PEMBAHASAN

A. Aljabar-CI

Definisi 3.1

Aljabar-CI $(X,*,1)$ adalah suatu himpunan tak kosong X, dengan operasi biner "$*$" dan elemen khusus 1 yang memenuhi aksioma sebagai berikut:

(i) $p * p = 1$, untuk semua $p \in X$

(ii) $1 * p = p$, untuk semua $p \in X$

(iii) $p * (q * r) = q * (p * r)$, untuk semua $p.q.r \in X$

Selanjutnya, jika $p.q \in (X,*,1)$ maka kita tulis $p \leq q$ jika $p * q = 1$

(Selvam, Priya, dan Ramachandran, 2012 : 1)

Contoh 3.1

Misalkan $X = \{1, a, b, c, d, 0\}$ dengan operasi $*$ didefinisikan sebagai berikut:

		II					
	$*$	**1**	***a***	***b***	***c***	***d***	**0**
	1	1	a	b	c	d	0
	a	1	1	a	c	c	d
I	***b***	1	1	1	c	c	c
	c	1	a	b	1	a	b
	d	1	1	a	1	1	a
	0	1	1	1	1	1	1

X adalah aljabar-CI. Karena X memenuhi semua aksioma pada aljabar-CI.

Lemma 3.1

Jika $(X,*,1)$ aljabar-CI, maka $p * \left((p * q) * q\right) = 1$ untuk semua $x, y \in X$.

(Sabhapandit da n Ch. Chetia, 2016 : 135)

Lemma 3.2

Jika $(X,*,1)$ aljabar-CI, maka $(x * y) * a1 = (x * a1) * (y * a1)$ untuk semua $x, y \in X$.

(Sabhapandit dan Ch. Chetia, 2016 : 135)

Definisi 3.2

Suatu aljabar-CI $(X,*,1)$ bersifat transitif, jika $(q * r) * \left((p * q) * (p * r)\right) = 1$ untuk semua $p, q, r \in X$

(Mostafa, Naby, dan Elgendy, 2011 : 485)

Definisi 3.3

Suatu aljabar-CI $(X,*,1)$ bersifat komutatif, jika $(p * q) * q = (q * p) * p$ untuk semua $p.q \in X$

(Borumand dan Rezaei, 2012 : 16)

Definisi 3.4

Suatu aljabar-CI $(X,*,1)$ bersifat distributif diri jika $p * (q * r) = (p * q) * (p * r)$ untuk semua $p, q, r \in X$.

(Mostafa, Naby, dan Elgendy, 2011 : 485)

B. Ideal Pada Aljabar-CI

Definisi 3.5

Suatu subhimpunan tak kosong I pada aljabar-CI $(X,*,1)$ disebut ideal pada X, $\forall p \in X$ dan $k, l \in I$ memenuhi :

(i) $p * k \in I$.

(ii) $\left(k * (l * p)\right) * p \in I$

(Sabhapandit dan Ch. Chetia, 2016 : 135)

Contoh 3.5

Misalkan $X = \{1, a, b, c, d, 0\}$ dengan operasi $*$ didefinisikan sebagai berikut:

		II					
	$*$	**1**	***a***	***b***	***c***	***d***	**0**
	1	1	a	b	c	d	0
	a	1	1	a	c	c	d
I	***b***	1	1	1	c	c	c
	c	1	a	b	1	a	b
	d	1	1	a	1	1	a
	0	1	1	1	1	1	1

X adalah aljabar-CI. Karena X memenuhi semua aksioma pada aljabar-CI.

Lemma 3.3

Jika $(X,*,1)$ aljabar-CI. Maka berlaku:

(i) Setiap ideal dari $(X,*,1)$ aljabar-CI memuat 1

(ii) Jika I adalah ideal dari $(X,*,1)$, maka $(k * p) * p \in I$, untuk semua $a \in I$ dan $p \in X$.

C. Ideal Fuzzy Dan Ideal Anti Fuzzy pada Aljabar-CI

Definisi 3.6

Misalkan A merupakan himpunan fuzzy pada aljabar-CI $(X,*,1)$. Maka A disebut ideal fuzzy jika $\forall\ p.q.r \in X$ berlaku kondisi :

(i) $\mu_A(p * q) \geq \mu_A(q)$

(ii) $\left(\mu_A\left(\left(p * (q * r)\right) * r\right)\right) \geq \min\{\mu_A(p), \mu_A(q)\}$

(Selvam, Priya, dan Ramachandran, 2012 : 2)

Definisi 3.7

Misalkan A merupakan himpunan fuzzy pada aljabar-CI $(X,*,1)$. Maka A disebut ideal anti fuzzy jika untuk setiap $p, q \in X$ memenuhi kondisi :

(i) $\mu_A(p * q) \leq \mu_A(q)$

(ii) $\mu_A\left(\left(p * (q * r)\right) * r\right) \leq \max\{\mu_A(p), \mu_A(q)\}$

(Selvam, Priya, dan Ramachandran, 2012 : 2)

Teorema 3.1

Jika A ideal anti fuzzy pada aljabar-CI $(X,*,1)$, maka $\mu_A(1) \leq \mu_A(x)$, untuk setiap $x \in X$.

(Selvam, Priya, dan Ramachandran, 2012 : 2)

Teorema 3.2

Jika A ideal anti fuzzy pada aljabar-CI $(X,*,1)$, maka $\mu_A\left((p * q) * q\right) \leq \mu_A(p)$, untuk setiap $p.q \in X$.

(Priya, dan Ramachandran, 2012 : 3)

Bukti:

$\mu_A\left((p * q) * q\right)$

$= \mu_A\left(\left(p * (1 * q)\right) * q\right)$

$\leq max\{\mu_A(p), \mu_A(1)\}$

$\leq \mu_A(p)$

Definisi 3.8

Suatu subhimpunan tak kosong $I \subset X$ pada aljabar-CI $(X,*,1)$ disebut subaljabar dari X, jika $x * y \in I$, untuk setiap $x, y \in I$.

(Mostafa, Naby, dan Elgendy, 2011 : 485)

D. Subaljabar fuzzy dan Subaljabar Anti Fuzzy pada Aljabar-CI

Definisi 3.9

Misalkan A merupakan himpunan fuzzy pada aljabar-CI $(X,*,1)$. Maka A disebut subaljabar fuzzy X, jika $\mu_A(p * q) \geq min\{\mu_A(p), a\mu_A(q)\}$. Untuk semua $p, q \in X$.

(Selvam, Priya, dan Ramachandran, 2012 : 2)

Definisi 3.10

Misalkan A merupakan himpunan fuzzy pada aljabar-CI $(X,*,1)$. Maka A disebut subaljabar anti fuzzy X, jika $\mu_A(x * y) \leq max\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$ untuk semua $x, y \in X$.

(Selvam, Priya, dan Ramachandran, 2012 : 2)

Teorema 3.3

Misalkan A merupakan himpunan fuzzy pada aljabar-CI $(X,*,1)$. Maka setiap subaljabar anti fuzzy X selalu memenuhi ideal anti fuzzy pada X.

(Selvam, Priya, dan Ramachandran, 2012 : 2)

Definisi 3.12

Misalkan A merupakan himpunan fuzzy pada aljabar-CI $(X,*,1)$. Subhimpunan level pada himpunan fuzzy A adalah himpunan

$$\mu_A{}^t = \{x \in X |\ \mu_A(x) \leq t\}$$

(R.Biswas, 1990 : 121)

Teorema 3.4

Misal $A = \left\{\left(x, \mu_A(x)\right); x \in X\right\}$ merupakan himpunan fuzzy pada aljabar-CI $(X,*,1)$. Jika $\mu_A{}^t$ merupakan subaljabar anti fuzzy untuk setiap $t \in [0,1]$, maka $\mu_A{}^t$ memenuhi salah satu dari $\mu_A{}^t = \emptyset$ atau $\mu_A{}^t$ subaljabar $(X,*,1)$.

(Selvam, Priya, dan Ramachandran, 2012 : 2)

Bukti:

Misalkan μ_A merupakan subaljabar anti fuzzy pada X dan $\mu_A \neq \emptyset$.

Misal $p, q \in \mu_A{}^t$ berdasarkan definisi 3.11 berlaku :

$\mu_A(p) \leq t$

Maka,

$\mu_A(q) \leq t$

Untuk $p * q \in \mu_A{}^t$ berlaku:

$\mu_A(p * q) \leq t$

Karena μ_A merupakan subaljabar anti fuzzy, maka untuk setiap $x, y \in \mu_A$ berlaku :
$\mu_A(p * q) \leq max\{\mu_A(p), \mu_A(q)\}$
Diperoleh $\mu_A(p * q) \leq max\{\mu_A(p), \mu_A(q)\} \leq t$
dengan $p * q \in {\mu_A}^t$, dan ${\mu_A}^t$ subaljabar
Jadi ${\mu_A}^t$ subaljabar anti fuzzy pada aljabar-CI

E. Homomorfisme dan Anti Homomorfisme Pada Aljabar-CI

Definisi 3.13
Misalkan $(X, *, 1)$ dan $(Y, \Delta, 1')$ merupakan aljabar-CI. Suatu pemetaan $f: X \to Y$ disebut homomorfisme, jika $f(p * q) = f(p)\Delta f(q)$ untuk semua $p, q \in X$.

(Selvam, Priya, dan Ramachandran, 2012 : 3)

Definisi 3.14
Misalkan $(X, *, 1)$ dan $(Y, \Delta, 1')$ merupakan aljabar-CI. Suatu pemetaan $f: X \to Y$ disebut anti homomorfisme, $f(p * q) = f(p)\Delta f(q)$ untuk semua $p, q \in X$.

(selvam, Priya, dan Ramachandran, 2012 : 3)

Definisi 3.15
Misalkan X aljabar-CI $f: X \to X$ merupakan homomorfisme dan A merupakan himpunan fuzzy pada X. Didefinisikan suatu himpunan fuzzy baru pada X yaitu μ_f dengan $\mu_f(x) = \mu_A(f(x))$ untuk semua x pada X.

(Selvam, Priya, dan Ramachandran, 2012 : 3)

Teorema 3.5
Misalkan X: aljabar-CI $f: X \to X$ merupakan endomorfisme. Jika A ideal anti fuzzy pada X, maka μ_f ideal anti fuzzy pada X.

(Selvam, Priya, dan Ramachandran, 2012 : 2)

Bukti:

Misalkan $p, q, r \in X$, f homomorfisme, dan A ideal anti fuzzy pada X maka berlaku :

(i) $\mu_A(p * q) \leq \mu_A(q)$

$$\mu_f(p * q) = \mu(f(p * q))$$
$$= \mu(f(p) * f(q))$$
$$\leq \mu(f(q)) = \mu_f(q)$$

Jadi $\mu_f(p * q) \leq \mu(f(q))$

(ii) $\mu_f\left((p * (q * r)) * r\right)$

$$= \mu\left(f\left((p * (q * r)) * r\right)\right)$$
$$= \mu\left(f(p * (q * q))^\circ f(q)\right)$$
$$= \mu\left((f(p)^\circ f(q * r))^\circ f(r)\right)$$
$$= \mu\left(\left(f(p)^\circ(f(q)^\circ f(r))\right)^\circ f(r)\right)$$

Karena A ideal anti fuzzy pada X,

$$\mu\left(f\left((p * (q * r)) * r\right)\right)$$
$$\leq \max\left\{\mu\left(\left(f(p)^\circ(f(q)^\circ f(r))\right)^\circ f(r)\right)\right\}$$
$$\leq \max\{\mu(f(p)), \mu(f(q))\}$$

Sehingga, $\mu_f\left((p * (q * r)) * r\right) \leq \max\{\mu(f(p)), \mu(f(q))\}$

Jadi, μ_f ideal anti fuzzy pada X.

Teorema 3.6
Misalkan $f: X \to Y$ epimorfisme pada aljabar-CI X. Jika μ_f ideal anti fuzzy pada X, maka A ideal anti fuzzy pada Y.

(Selvam, Priya, dan Ramachandran, 2012 : 2)

Bukti :
Misalkan $y \in Y$, maka $x \in X$ f sehingga $f(x) = y$
Misalkan $y_1, y_2, y_3 \in Y$

(i) Karena A ideal anti fuzzy pada X, sehingga $\mu_A(y_1 * y_2) \leq \mu_A(y_2)$

$$\mu_f(y_1 \Delta y_2) = \mu(f(x_1 \Delta x_2))$$
$$= \mu(f(x_1) * f(x_2))$$
$$\leq \mu(f(x_2)) = \mu(f(y_2)) = \mu_f(y_2)$$

Jadi $\mu_f(y_1{}^\circ y_2) \leq \mu(f(y_2))$

(ii) $\mu_f\left((y_1{}^\circ(y_2{}^\circ y_3))^\circ y_3\right)$

$$= \mu\left(f\left((x_1{}^\circ(ax_2{}^\circ x_3))^\circ x_3\right)\right)$$
$$= \mu\left(f(x_1{}^\circ(ax_2{}^\circ x_3)) * f(x_3)\right)$$
$$= \mu\left((f(x_1) * f(ax_2{}^\circ x_3)) * f(x_3)\right)$$
$$= \mu\left(\left(f(x_1) * (f(ax_2) * f(x_3))\right) * f(x_3)\right)$$

Karena A ideal anti fuzzy pada Y,

$$\mu\left(f\left((x_1{}^\circ(x_2{}^\circ z))^\circ x_3\right)\right)$$
$$\leq \max\left\{\mu\left(\left(f(x_1) * (f(x_2) * f(x_3))\right) * f(x_3)\right)\right\}$$
$$= \max\{\mu(f(x_1)), \mu(f(x_2))\}$$
$$\leq \max\{\mu(f(x_1)), \mu(f(x_2))\}$$

$= \max\{\mu(f(y_1)), \mu(f(y_2))\}$

Sehingga, $\mu_f\left((y_1\Delta(y_2\Delta y_3))\Delta y_3\right) \leq \max\{\mu(f(y_1)), \mu(f(y_2))\}$

Jadi, A ideal anti fuzzy pada Y

Teorema 3.7

Misalkan $f: X \rightarrow Y$ homomorfisme pada aljabar-CI X. Jika A ideal anti fuzzy pada Y, maka μ_f ideal anti fuzzy pada X.

(Selvam, Priya, dan Ramachandran, 2012 : 3)

Bukti :

Misalkan $p, q, r \in X$, f homomorfisme, karena A ideal anti fuzzy pada Y maka berlaku :

(i) $\mu_A(p * q) \leq \mu_A(q)$

berdasarkan definisi 3.14 $\mu_f(p) = \mu(f(p))$

$\mu_f(p * q) = \mu(f(p * q))$

$= \mu(f(p)^\circ f(q))$

$\leq \mu(f(q)) = \mu_f(q)$

Jadi $\mu_f(p * q) \leq \mu(f(q))$

(ii) $\mu_f\left((p * (q * r)) * r\right)$

$= \mu\left(f\left((p * (q * r)) * r\right)\right)$

$= \mu(f(p * (q * r))^\circ f(r))$

$= \mu\left((f(p)^\circ f(q * r))^\circ f(r)\right) =$

$\mu\left(\left(f(p)^\circ(f(q)^\circ f(r))\right)^\circ f(r)\right)$

Karena A ideal anti fuzzy pada Y,

$\mu\left(f\left((p * (q * r)) * r\right)\right) \leq$

$\max\left\{\mu\left(\left(f(p)^\circ(f(q)^\circ f(r))\right)^\circ f(r)\right)\right\}$

$= \max\{\mu(f(p)), \mu(f(q))\}$

$\leq \max\{\mu(f(p)), \mu(f(q))\}$

Jadi $\mu_f\left((p * (q * r)) * r\right) \leq \max\{\mu(f(p)), \mu(f(q))\}$

Maka μ_f ideal anti fuzzy pada X

Lemma 3.4

Suatu subhimpunan tak kosong $I \subset X$ pada aljabar-CI $(X,*,1)$. Jika I ideal maka memenuhi $1 \in I$ dan $(x * (y * z) \in I \Longrightarrow x * z \in I)$ untuk semua $x, z \in X$ dan $y \in I$

Teorema 3.8

Misalkan $(X,*,1)$ dan $(Y, \Delta, 1')$ aljabar-CI dan $f: X \rightarrow Y$ homomorfisme pada aljabar-CI. Maka $Ker(f)$ merupakan ideal

(Selvam, Priya, dan Ramachandran, 2012 : 2)

Bukti :

Misalkan $p * (q * r) \in Ker(f)$ dan $y \in Ker(f)$

Maka $f(p * (q * r)) = 1'$ dan $f(y) = 1'$

$1' = f(p * (q * r))$

$= f(p)\Delta f(q * r)$

$= f(p)\Delta(1\Delta f(r))$

$1' = f(p)\Delta f(r)$

$1' = f(p * r)$

Sehingga $x * z \in \ker(f)$

Maka $\ker(f)$ merupakan ideal

F. Hasil Kali Kartesius pada Ideal Anti Fuzzy dari Aljabar-CI

Definisi 3.16

Misalkan A dan B merupakan ideal fuzzy pada X. Hasil kali kartesius $A \otimes B: X \otimes X \rightarrow [0,1]$ didefinisikan dengan $(A \otimes B)(p, q) =$min $\{\mu_A(p), \mu_B(q)\}$, untuk semua $p, q \in X$.

(Selvam, Priya, dan Ramachandran, 2012 : 4)

Definisi 3.17

Misalkan A dan B merupakan ideal anti fuzzy pada X. Hasil kali kartesius $A \otimes B: X \otimes X \rightarrow [0,1]$ didefinisikan dengan $(A \otimes B)(p, q) =$max $\{\mu_A(p), \mu_B(q)\}$, untuk semua $p, q \in X$.

(Selvam, Priya, dan Ramachandran, 2012 : 4)

Teorema 3.9

Jika A dan B ideal anti fuzzy pada aljabar-CI X, maka $A \otimes B$ ideal anti fuzzy pada $X \otimes X$.

(Selvam, Priya, dan Ramachandran, 2012 : 4)

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas terdapat beberapa teorema yang berkaitan dan sudah dibuktikan adalah:

1. Misalkan A merupakan himpunan fuzzy pada aljabar-CI $(X,*,1)$. Maka setiap subaljabar anti fuzzy X selalu memenuhi ideal anti fuzzy pada X.
2. Misalkan X: aljabar-CI $f: X \rightarrow X$ merupakan endomorfisme. Jika A ideal anti fuzzy pada X, maka μ_f ideal anti fuzzy pada X.
3. Misalkan $f: X \rightarrow Y$ homomorfisme pada aljabar-CI X. Jika A ideal anti fuzzy pada Y, maka μ_f ideal anti fuzzy pada X.
4. Misalkan $(X,*,1)$ dan $(Y,\Delta,1')$ aljabar-CI dan $f: X \rightarrow Y$ homomorfisme pada aljabar-CI. Maka $Ker(f)$ merupakan ideal
5. Jika A dan B ideal anti fuzzy pada aljabar-CI X, maka $A \otimes B$ ideal anti fuzzy pada $X \otimes X$.

B. Saran

Pada jurnal ini hanya membahas tentang sifat-sifat karakteristik ideal anti fuzzy pada aljabar-CI. Penulis menyarankan bagi pembaca untuk mengkaji lebih dalam tentang ideal anti fuzzy pada aljabar-CI..

DAFTAR PUSTAKA

Biswas, R. 1990. "Fuzzy Subgroups and Anti Fuzzy Subgroups". *Fuzzy Set and System*. Vol.35 : hal. 121-124.

Gallian, Joseph A. 2010. *Cotemporary Abstract Algebra*. Seventh Edition. Duluth: University of Minnesota Duluth.

Herstein, I.N. 1995. *Abstract Algebra*. Third Edition. USA: Prentice-HAll, Inc.

Mostafa, Samy M, Mokhtar A. Abdel Naby dan Osama R. Elgendy. 2011. "Fuzzy Ideal On CI-algebras". *Journal of American Science*. Vol.7 : hal. 485-488.

Sabhanapandit, Pulak dan Biman Ch. Chetia. 2016. "CI-algebras and its Fuzzy Ideal". *International Journal of Mathematics Trends and Technology*. Vol 33 (2): hal. 135-141.

Saeid, A. Borumand dan A. Rezaei. 2012. "Quotient CI-algebras". *Bulletin of The Transilvania University of Brasov* . Vol 54 (5): hal. 15-22.

Selvam, P. M. Sithar, T. Priya, dan T. Ramachandran. 2012. "Anti Fuzzy subalgebra and Homomorphism of CI-algebras". *International Journal of Engineering Research and Technology*. Vol. 1 (5) : hal. 1-6.

Sokolova, Ana. 2013. *Algebraic Structure*, (online). (http://cs.unisalzburg.at/~anas/teaching/FormaleSysteme2015/Algebraicstructure.pdf. Diakses tanggal 28 Desember 2016).

T. Priya, dan T. Ramachandran. 2012. "Anti Fuzzy Ideals of CI-algebras and its lower level cuts". *International Journal of Mathematical Archive*. Vol. 3 (7) : hal. 2524-2529.

Zimmerman. 1996. *Fuzzy Set Theory and it's Application*. Third Edition. Bostom: Kluwer Academic.