

## ANALISIS KESTABILAN GERAK DIAGONAL PADA *QUADROTOR* MENGGUNAKAN KONTROL PID

**Salmaa**

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya  
e-mail: salmaasalmaa@mhs.unesa.ac.id

**Yusuf Fuad**

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya  
e-mail: yusuffuad@unesa.ac.id

### Abstrak

*Quadrotor* adalah pesawat tanpa awak dengan empat rotor independen yang dipasang saling silang. Pengendalian pada masing-masing rotor dibutuhkan agar *quadrotor* dapat terbang sesuai dengan kebutuhan. Pengendalian rotor pada baling-baling diperlukan agar *quadrotor* dapat bergerak vertikal, lateral, longitudinal, dan diagonal. Penelitian Baroro dan Fuad (2016) telah dikaji tipe kestabilan pada *quadrotor* bertipe + dengan modus gerak vertikal, yawing, longitudinal, dan lateral. Penelitian tersebut tidak mengkaji gerak diagonal *quadrotor*. Dalam penelitian ini direkonstruksi model gerak diagonal *quadrotor* selanjutnya dilakukan linierisasi, serta diterapkan kontrol PID pada sistem dinamik dengan gain kontrol proporsional  $K_P$ , kontrol integral  $K_I$  dan kontrol derivatif  $K_D$ . Nilai  $K_P$ ,  $K_I$ , dan  $K_D$  ditentukan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz agar model gerak diagonal selalu stabil. Gerak diagonal bidang  $X^+OZ^+$ , bidang  $X^-OZ^+$ , bidang  $Y^+OZ^+$ , dan bidang  $Y^-OZ^+$  stabil jika dipenuhi  $0 < K_P < 10513$ ,  $K_I > 0$  dan  $K_D < 7680$ . Gerak diagonal di atas bidang  $X^+OY^+$ , di atas bidang  $X^+OY^-$ , di atas bidang  $X^-OY^-$ , dan di atas bidang  $X^-OY^+$  stabil jika memenuhi  $K_P > 0$ ,  $K_I > 0$  dan  $K_D > -1520$ .

**Kata Kunci:** *Quadrotor*, pemodelan matematika, kriteria Routh-Hurwitz, kontrol PID, stabil asimtotik.

### Abstract

Quadrotor is an unmanned aircraft vehicle that has four independent propellers mounted cross-linked. Required control on each propellers to allow the quadrotor to fly properly. Propeller control is required to make quadrotor can does vertical, lateral, longitudinal and diagonal motions. In Baroro and Fuad (2016) has been examined the type stability in the + quadrotor with vertical motion, yawing motion, longitudinal motion and lateral motion but diagonal motion was not examined. In this study reconstructed diagonal motion model then carried out linierization and control do on quadrotor propeller using PID control and calling gain proportional control  $K_P$ , integral control  $K_I$ , and derivatif control  $K_D$ .  $K_P$ ,  $K_I$ , dan  $K_D$  gain is determined by Routh-Hurwitz criterion so that diagonal motion model has been stable. Based Routh-Hurwitz criterion diagonal motion model in  $X^+OZ^+$  plane,  $X^-OZ^+$  plane,  $Y^+OZ^+$  plane, dan  $Y^-OZ^+$  plane stable if  $0 < K_P < 10513$ ,  $K_I > 0$  and  $K_D < 7680$  Diagonal motion model stable up  $X^+OY^+$  plane, up  $X^+OY^-$  plane, up  $X^-OY^-$  plane, and up  $X^-OY^+$  plane stable if  $K_P > 0$ ,  $K_I > 0$  dan  $K_D > -1520$ .

**Keywords:** longitudinal motion, lateral directional motion, stability analysis, proportional-derivative control.

### PENDAHULUAN

*Quadrotor* adalah pesawat tanpa awak, mirip dengan helikopter, dan memiliki empat rotor horizontal namun tanpa rotor vertikal. Pada umumnya *quadrotor* dilengkapi dengan kamera dan sering kali digunakan dalam keperluan militer, survey daerah bencana alam, maupun kepentingan sipil. *Quadrotor* digerakan oleh empat rotor independen yang dipasang saling bersilangan. Rotor yang saling bersilangan memiliki torsi yang sama, sedangkan rotor yang saling berhadapan memiliki torsi yang berlawanan, sehingga pasangan rotor mampu meniadakan torsi yang dihasilkan masing-masing pasangan rotor lain (Domingues, 2009).

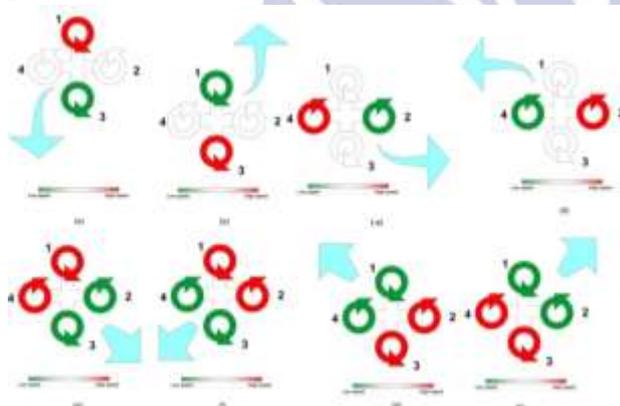
Pengendalian baling-baling diperlukan agar *quadrotor* dapat bergerak vertikal, lateral, longitudinal maupun diagonal. *Quadrotor* memiliki enam derajat kebebasan, sehingga model dinamik *quadrotor* dideskripsikan menggunakan duabelas variabel *state* (Jirinec, 2011).

Penelitian ini terinspirasi oleh Baroro dan Fuad (2016) yang mengkaji kestabilan *quadrotor* bertipe + dengan pada modus vertikal, yawing, longitudinal, dan lateral. Pada penelitian tersebut tidak mengkaji gerak diagonal *quadrotor*. *Quadrotor* dirancang agar dapat terbang dengan baik. Perancangan kontrol pada *quadrotor* sangat dibutuhkan, agar dapat menghemat waktu serta biaya dalam percobaannya. Oleh karena itu

pengkajian suatu sistem kontrol serta analisa dari hasil sistem kontrol diperlukan agar *quadrotor* dapat terbang dan berada dalam kestabilan yang diinginkan. Dalam penelitian ini digunakan kontrol proporsional integral derivatif (PID). Kontrol PID bertujuan mempercepat respon system dan menghilangkan *overshoot* agar sistem dapat stabil dengan cepat (Tianguang, 2007 dan Oktafianto, dkk., 2005). Pada penelitian ini dinamik model, analisis kestabilan, dan penerapan kontrol PID agar *quadrotor* stabil.

**GERAK DIAGONAL QUADROTOR**

Gerak diagonal *quadrotor* merupakan perpaduan gerak lateral dan gerak longitudinal atau gerak vertikal dan gerak lateral. Dengan mengatur besar kecepatan baling-balingnya *quadrotor* dapat bergerak diagonal vertikal pada bidang  $X^+OZ^+$ ,  $X^-OZ^+$ ,  $Y^+OZ^+$ , dan  $Y^-OZ^+$  serta di atas bidang  $X^+OY^+$ ,  $X^-OY^+$ ,  $X^-OY^-$ , dan  $X^+OY^-$  seperti digambarkan pada gambar 1.



Gambar 1. Ilustrasi gerak diagonal *quadrotor*

**SISTEM TRANSFORMASI QUADROTOR**

Pada Transformasi kecepatan linier  $\mathbf{V}_E$  dalam E-frame dan kecepatan linier  $\mathbf{V}_B$  dalam B-frame, dideskripsikan dengan

$$\frac{d\mathbf{V}_E(t)}{dt} = D^{-1}\mathbf{V}_B(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = D^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Dimana,

$D$  = matriks rotasi dan *invertible*

$\frac{d(\cdot)}{dx}$  = adalah derivative ( $\dot{\cdot}$ ) terhadap  $t$

Transformasi kecepatan sudut  $\mathbf{\Theta}_E$  dalam E-frame dan kecepatan sudut  $\mathbf{\omega}_B$  dalam B-frame, dideskripsikan dengan :

$$\frac{d\mathbf{\Theta}_E(t)}{dt} = N_{\theta}\mathbf{\omega}_B$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = N_{\theta} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

dengan

$$N_{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix}$$

Percepatan linier berdasarkan hukum Newton adalah

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{V}_B}{dt}$$

sehingga diperoleh :

$$\dot{u} = rv - qw - g \sin \theta$$

$$\dot{v} = pw - ru + g \cos \theta \sin \phi$$

$$\dot{w} = qu - pv + g \cos \phi \cos \theta - \frac{T}{m}$$

dengan  $T = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)$

Penerapan torsi eksternal  $\mathbf{H}$  akan mengubah momentum sudut  $\mathbf{M}$  dari *quadrotor*. Oleh karena itu didefinisikan transformasi momentum sudut

$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}} + \mathbf{\omega}_B \times \mathbf{H}$$

sehingga diperoleh :

$$\dot{p} = \frac{lb}{I_x} (\Omega_2^2 - \Omega_4^2) - qr \frac{I_z - I_y}{I_x}$$

$$\dot{q} = \frac{lb}{I_y} (\Omega_1^2 - \Omega_3^2) - pr \frac{I_x - I_z}{I_y}$$

$$\dot{r} = \frac{k}{I_z} (\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2)$$

dengan :

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

$I_x, I_y, I_z$  : momen inersia sepanjang sumbu  $X$ , sumbu  $Y$ , dan sumbu  $Z$ .

$\mathbf{H}$  : torsi eksternal

$\mathbf{M}$  : momentum sudut

$b$  : koefisien gaya angkat

$k$  : faktor gaya hambat baling-baling

$\Omega_i$  : kecepatan baling-baling  $i, i = 1,2,3,4$

**SISTEM DINAMIK QUADROTOR**

Berdasarkan transformasi percepatan linier dan transformasi percepatan sudut *quadrotor* diperoleh model dinamik *quadrotor*, yaitu :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= rv - qw - g \sin \theta \\ \dot{v} &= pw - ru + g \cos \theta \sin \phi \\ \dot{w} &= qu - pv + g \cos \phi \cos \theta - \frac{T}{m} \\ \dot{p} &= \frac{lb}{I_x} (\Omega_2^2 - \Omega_4^2) - qr \frac{I_z - I_y}{I_x} \\ \dot{q} &= \frac{lb}{I_y} (\Omega_1^2 - \Omega_3^2) - qr \frac{I_x - I_z}{I_y} \\ \dot{r} &= \frac{k}{I_z} (\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2) \end{aligned} \quad (*)$$

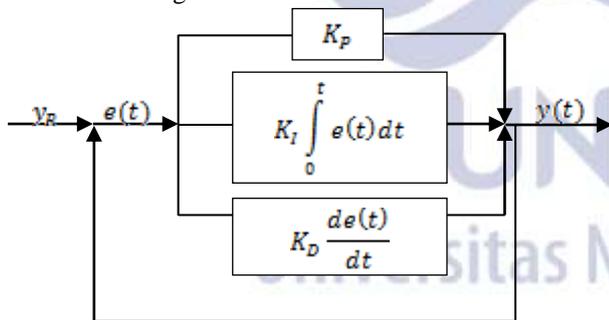
Model dinamik quadrotor di atas merupakan persamaan nonlinier, dengan titik kesetimbangan  $\tilde{\phi} = 0, \tilde{\theta} = 0, \tilde{\psi} = 0, \tilde{u} = 0, \tilde{v} = 0, \tilde{w} = 0, \tilde{p} = 0, \tilde{q} = 0$ .

dimana,

- $u, v, w$  : kecepatan trasalasi pada sumbu  $X$ , sumbu  $Y$ , dan sumbu  $Z$
- $p, q, r$  : kecepatan sudut pada sumbu  $X$ , sumbu  $Y$ , dan sumbu  $Z$
- $g$  : percepatan gravitasi bumi
- $m$  : massa quadrotor
- $k$  : faktor drag
- $b$  : faktor gaya angkat
- $l$  : panjang setengah quadrotor(jarak antara pusat quadrotor dengan pusat baling-baling)

**KONTROL PID**

Kontrol PID (proporsional, integral, dan derivatif) memiliki output yang merupakan jumlahan dari output-output kontrol proporsional, kontrol integral dan kontrol derivatif. Kontrol PID bertujuan mempercepat proses sebuah sistem, menghilangkan error dalam keadaan tunak dan menghasilkan kestabilan yang cepat. Berikut blok diagram kontrol PID diberikan berikut :



Gambar 3. Blok diagram kontrol PID

Bentuk umum kontrol PID adalah

$$y(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

dimana

- $y(t)$ : output
- $y_R$  : referensi output
- $\frac{de}{dt}$  : derivatif error terhadap  $t$
- $e(t)$ : error
- $K_p$  : gain proporsional

$K_I$  : gain integral

$K_D$  : gain derivatif

dan dalam transformasi Laplace dinyatakan sebagai berikut

$$Y(s) = \left( K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \right) E(s)$$

**LINIERISASI SISTEM DINAMIK QUADROTOR**

Dalam posisi hover, quadrotor dalam kondisi tunak yang mengakibatkan  $\phi = 0, \psi = 0, \theta = 0$  dan percepatan quadrotor adalah nol dengan titik kesetimbangan  $\tilde{\phi} = 0, \tilde{\theta} = 0, \tilde{\psi} = 0, \tilde{u} = 0, \tilde{v} = 0, \tilde{w} = 0, \tilde{p} = 0, \tilde{q} = 0, \tilde{r} = 0$  dan besar kecepatan semua baling-baling dalam posisi hover adalah  $463,1 \text{ rad s}^{-1}$  sebagai acuan untuk linierisasi sistem dinamik. Linierisasi model nonlinier (\*) dilakukan dengan mendasarkan deviasi kecil di sekitar titik kesetimbangan. Diperoleh model linier quadrotor adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{u} &= -g \Delta \theta \\ \Delta \dot{v} &= g \Delta \phi \\ \Delta \dot{w} &= -2\tilde{\Omega}_0 \frac{b}{m} (\Delta \Omega_1 + \Delta \Omega_2 + \Delta \Omega_3 + \Delta \Omega_4) \\ \Delta \dot{p} &= 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_x} (\Delta \Omega_2 - \Delta \Omega_4) \\ \Delta \dot{q} &= 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_y} (\Delta \Omega_1 - \Delta \Omega_3) \\ \Delta \dot{r} &= 2\tilde{\Omega}_0 \frac{k}{I_z} (\Delta \Omega_2 + \Delta \Omega_4 - \Delta \Omega_1 + \Delta \Omega_3) \end{aligned}$$

Sistem kontrol baling-baling quadrotor adalah

$$\Omega_n = -10\Omega_n + 7U, \quad n = 1,2,3,4.$$

(Jirinec, 2011)

**MODEL GERAK DIAGONAL QUADROTOR**

Gerak diagonal quadrotor dibagi menjadi delapan gerak, yaitu:

**A. Gerak Diagonal Sejajar Bidang  $X^+OZ^+$**

Model Persamaan gerak diagonal sejajar bidang  $X^+OZ^+$  dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\dot{x} = Ax + B_1 U_1 \tag{1.a}$$

$$U_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1]^T \tag{1.b}$$

dengan,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ O_1 & A_3 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\tilde{\Omega}_0 \frac{b}{m} & 0 & -2\tilde{\Omega}_0 \frac{b}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_Y} & 0 & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_Y} \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$x = [\Delta z \ \Delta w \ \Delta x \ \Delta \theta \ \Delta u \ \Delta q \ \Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3 \ \Omega_4]^T$$

$$B_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 7 \ 7 \ 7]^T \quad (1.c)$$

dengan output  $y = C_1 x$  (1.d)

dimana

$$C_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

**B. Gerak Diagonal sejajar Bidang  $X^-OZ^+$**

Persamaan untuk gerak diagonal sejajar bidang  $X^-OZ^+$  dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\dot{x} = Ax + B_2 U_1 \quad (2.a)$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ O_1 & A_4 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_Y} & 0 & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_Y} \\ -14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 7 \ 7 \ 4 \ 7]^T \quad (2.b)$$

dengan output  $y = C_1 x$  (2.c)

**C. Gerak Diagonal sejajar Bidang  $Y^+OZ^+$**

Persamaan untuk gerak diagonal sejajar bidang  $Y^+OZ^+$  dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\dot{x} = Ax + B_3 U_1 \quad (3.a)$$

dengan,

$$A = \begin{bmatrix} A_5 & A_6 \\ O_1 & A_7 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\tilde{\Omega}_0 \frac{b}{m} & 0 & -2\tilde{\Omega}_0 \frac{b}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_X} & 0 & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_X} & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$x = [\Delta z \ \Delta w \ \Delta y \ \Delta \phi \ \Delta v \ \Delta p \ \Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3 \ \Omega_4]^T$$

$$B_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 7 \ 7 \ 7 \ 4]^T \quad (3.b)$$

$$\text{dengan output } y = C_1 x \quad (3.c)$$

**D. Gerak Diagonal sejajar Bidang  $Y^-OZ^+$**

Persamaan untuk gerak diagonal sejajar bidang  $Y^-OZ^+$  dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\dot{x} = Ax + B_4 U_1 \quad (4.a)$$

dengan,

$$A = \begin{bmatrix} A_5 & A_6 \\ O_1 & A_8 \end{bmatrix}$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_X} & 0 & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_X} & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}$$

$$x = [\Delta z \ \Delta w \ \Delta y \ \Delta \phi \ \Delta v \ \Delta p \ \Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3 \ \Omega_4]^T$$

$$B_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 7 \ 4 \ 7 \ 7]^T \quad (4.b)$$

dengan output  $y = C_1 x$  (4.c)

**E. Gerak Diagonal Di atas Bidang  $X^+OY^+$**

Persamaan untuk gerak diagonal di atas bidang  $X^+OY^+$  dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\dot{x} = Ax + B_5 U_2 \quad (5.a)$$

$$U_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1]^T \quad (5.b)$$

dengan,

$$A = \begin{bmatrix} A_9 & A_{10} \\ O_2 & A_{11} \end{bmatrix}$$

$$A_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\tilde{\Omega}_0 \frac{b}{m} & -2\tilde{\Omega}_0 \frac{b}{m} & -2\tilde{\Omega}_0 \frac{b}{m} & -2\tilde{\Omega}_0 \frac{b}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_X} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_X} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_X} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_X} \\ 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_Y} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_Y} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_Y} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_Y} \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}$$

$$x = [\Delta z \ \Delta x \ \Delta y \ \Delta w \ \Delta u \ \Delta v \ \Delta \phi \ \Delta \theta \ \Delta p \ \Delta q \ \Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3 \ \Omega_4]^T$$

$$B_5 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 4 \ 7 \ 7]^T \quad (5.c)$$

dengan output  $y = C_2 x$  (5.d)

dimana

$$C_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (5.e)$$

**F. Gerak Diagonal Di atas Bidang  $X^+ OY^-$**

Persamaan gerak diagonal di atas bidang  $X^+ OY^-$  dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\dot{x} = Ax + B_6 U_2 \quad (6.a)$$

dengan,

$$A = \begin{bmatrix} A_9 & A_{10} \\ O_2 & A_{12} \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_x} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_x} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_x} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_x} \\ 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_y} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_y} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_y} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_y} \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B_6 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 7 \ 7 \ 4]^T \quad (6.b)$$

dengan output  $y = C_2 x$  (6.c)

**G. Gerak Diagonal Di atas Bidang  $X^- OY^+$**

Persamaan untuk gerak diagonal di atas bidang  $X^- OY^+$  dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\dot{x} = Ax + B_7 U_2 \quad (7.a)$$

dengan,

$$A = \begin{bmatrix} A_9 & A_{10} \\ O_2 & A_{13} \end{bmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_x} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_x} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_x} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_x} \\ 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_y} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_y} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_y} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_y} \\ -14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B_7 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 7 \ 7 \ 4 \ 4]^T \quad (7.b)$$

dengan output  $y = C_2 x$  (7.c)

**H. Gerak Diagonal Di atas Bidang  $X^- OY^+$**

Persamaan untuk gerak diagonal di atas bidang  $X^- OY^+$  dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\dot{x} = Ax + B_8 U_2 \quad (8.a)$$

dengan,

$$A = \begin{bmatrix} A_9 & A_{10} \\ O_2 & A_{14} \end{bmatrix}$$

$$A_{14} = \begin{bmatrix} 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_x} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_x} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_x} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_x} \\ 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_y} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_y} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_y} & 2\tilde{\Omega}_0 \frac{lb}{I_y} \\ -14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}$$

$$B_8 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 7 \ 4 \ 4 \ 7]^T \quad (8.b)$$

dengan output  $y = C_2 x$  (8.c)

**ANALISIS KESTABILAN**

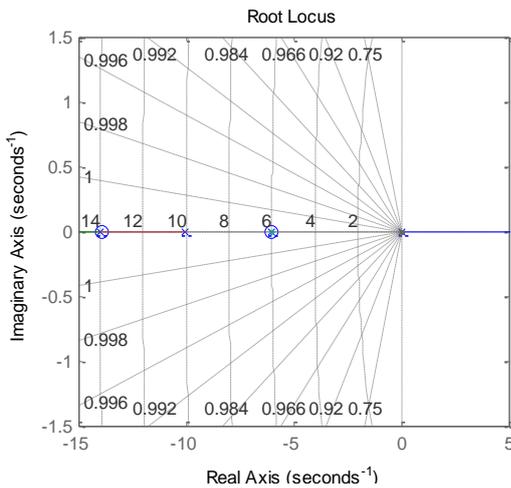
Dengan mensubstitusikan nilai parameter pada tabel 1 kedalam masing-masing model gerak *quadrotor*, dapat ditentukan kestabilan model gerak diagonal *quadrotor* berdasarkan jenis gerakannya menggunakan grafik *root locus* (Jirinec, 2011). Berdasarkan model gerak diagonal yang diperoleh, fungsi transfer pada gerak diagonal sejajar bidang  $X^+ OZ^+$  dan pada bidang  $X^- OZ^+$  adalah sama, begitupun fungsi transfer gerak diagonal sejajar bidang  $Y^+ OZ^+$  dan pada bidang  $Y^- OZ^+$  adalah sama serta fungsi transfer gerak diagonal di atas bidang  $X^+ OY^+$ ,  $X^- OY^+$ ,  $X^- OY^-$ , dan  $X^+ OY^-$  adalah sama.

Tabel 1. Parameter *Quadrotor*

simbol	Nilai
$b$	$1,5108 \times 10^{-5} kg \ m$
$m$	$1,07 \ kg$
$\tilde{\Omega}_0$	$463,1 \ rad \ s^{-1}$
$k$	$4,406 \times 10^{-7} kg \ m^2 s^{-1}$
$g$	$9,81 \ m \ s^{-2}$
$I_x$	$0,0093 \ kg \ m^2$
$I_y$	$0,0092 \ kg \ m^2$
$I_z$	$0,0151 \ kg \ m^2$

Diketahui model gerak diagonal sejajar bidang  $X^+ OZ^+$  (1.a) dengan output (1.d) dan model gerak diagonal sejajar bidang  $X^- OZ^+$  (2.a) dengan output (2.c) diperoleh fungsi transfer sebagai berikut:

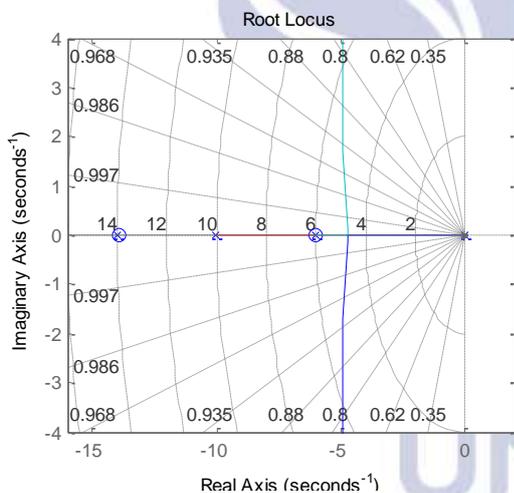
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-4.6722 s^2 - 93.3168 s - 393.0584}{s^4 + 30s^3 + 284s^2 + 840s}$$



Gambar 4. Grafik *Root Locus* gerak diagonal sejajar bidang  $X^+OZ^+$  dan pada bidang  $X^-OZ^+$

Diketahui model gerak diagonal sejajar bidang  $Y^+OZ^+$  (3.a) dengan output (3.c) dan model pada bidang  $Y^-OZ^+$  (4.a) dengan output (4.c) diperoleh fungsi transfer sebagai berikut:

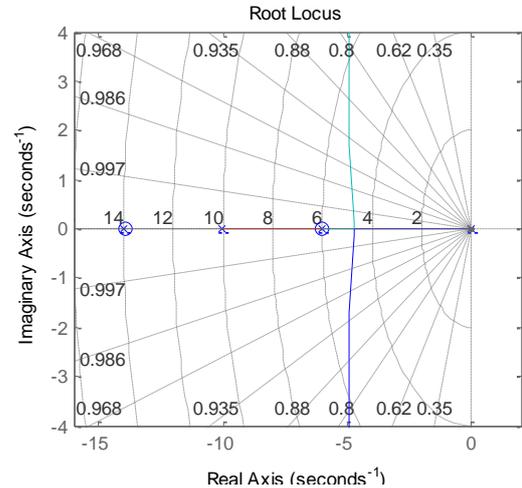
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4.6232 s^2 + 92.3368 s + 388.9424}{s^4 + 30s^3 + 284s^2 + 840s}$$



Gambar 5. Grafik *Root Locus* gerak diagonal sejajar bidang  $Y^+OZ^+$  dan pada bidang  $Y^-OZ^+$

Diketahui model gerak diagonal di atas bidang  $X^+OY^+$  (5.a) dengan output (5.d),  $X^-OY^+$  (6.a) dengan output (6.c),  $X^-OY^-$  (7.a) dengan output (7.c), dan  $X^+OY^-$  (8.a) dengan output (8.c) diperoleh fungsi transfer sebagai berikut:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4.6232 s^2 + 92.3368 s + 388.9424}{s^4 + 30s^3 + 284s^2 + 840s}$$



Gambar 6. Grafik *Root Locus* gerak diagonal di atas bidang  $X^+OY^+$ ,  $X^-OY^+$ ,  $X^-OY^-$ , dan  $X^+OY^-$ :

Dari gambar 4 s.d. 6 menunjukkan ada *poles* yang bernilai 0 (tidak negatif) pada setiap model gerak *quadrotor* yang menyebabkan model tidak stabil.

### PENERAPAN KONTROL PID

Berdasarkan analisis kestabilan model gerak diagonal diperoleh bahwa semua model gerak diagonal *quadrotor* tidak stabil. Oleh karena itu kestabilan akan dikendalikan dengan kontrol PID dengan menentukan gain  $K_p$ , gain  $K_i$  dan gain  $K_d$ . Nilai  $K_p$ ,  $K_i$  dan  $K_d$  yang memenuhi agar model selalu stabil ditentukan menggunakan kriteria Routh Hurwitz (Ogata, 2010).

Berdasarkan fungsi transfer yang diperoleh, penyebut gerak diagonal sejajar bidang  $X^+OZ^+$ ,  $X^-OZ^+$ ,  $Y^+OZ^+$  dan  $Y^-OZ^+$  adalah sama. Begitu juga dengan penyebut pada gerak diagonal di atas bidang  $X^+OY^+$ ,  $X^-OY^+$ ,  $X^-OY^-$ , dan  $X^+OY^-$ . Sehingga nilai  $K_p$ ,  $K_i$  dan  $K_d$  dapat ditentukan menggunakan tabel Routh Hurwitz sebagai berikut,

### Gerak Diagonal sejajar Bidang $X^+OZ^+$ , $X^-OZ^+$ , $Y^+OZ^+$ dan $Y^-OZ^+$

Berdasarkan fungsi transfer pada gerak diagonal sejajar bidang  $X^+OZ^+$ ,  $X^-OZ^+$ ,  $Y^+OZ^+$  dan  $Y^-OZ^+$  diperoleh penyebut sebagai berikut

$$s^4 + 30s^3 + 284s^2 + 840s$$

dengan menambahkan kontrol proporsional integral derivatif diperoleh

$$s^5 + 30s^4 + 284s^3 + (840 + K_d)s^2 + K_p s + K_i$$

Berdasarkan table Routh-Hurwitz agar gerak diagonal sejajar bidang  $X^+OZ^+$ ,  $X^-OZ^+$ ,  $Y^+OZ^+$  dan  $Y^-OZ^+$  selalu stabil maka

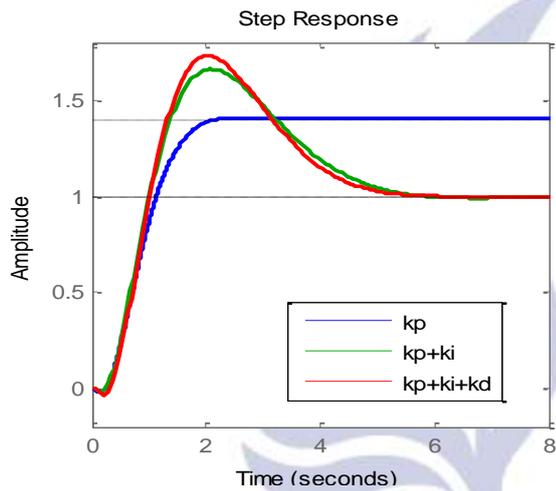
- 1)  $K_d < 7680$
- 2)  $K_i > 0$

$$3) \frac{6451200 + 6480K_D - K_D^2 - 900K_P + K_I}{7680 - K_D} > 0$$

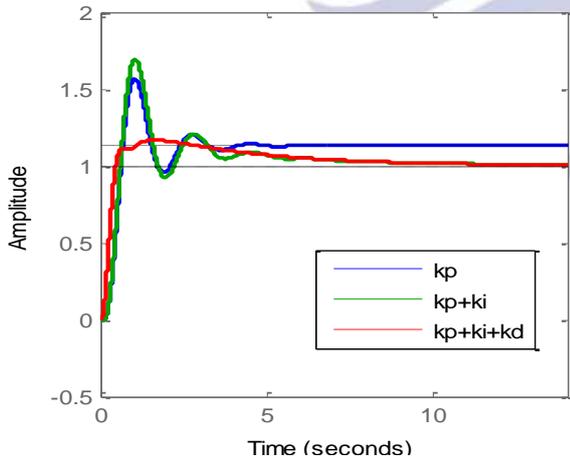
$$\frac{(193536000 + 19440K_D - 30K_D^2)K_P - 27000K_P^2 + (-65433600 + 8880K_D)K_I}{193536000 + 19440K_D - 30K_D^2}$$

4) 0

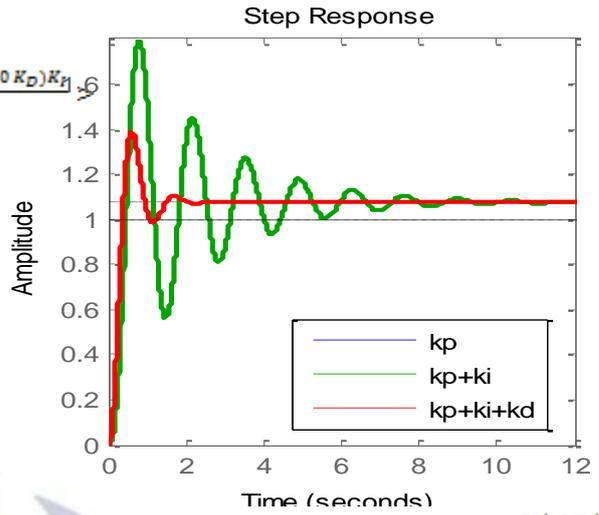
Berdasarkan eksperimen yang telah dilakukan dipilih nilai  $K_P, K_I$  dan  $K_D$  terbaik untuk gerak diagonal bidang  $X^+OZ^+, X^-OZ^+, Y^+OZ^+$  dan  $Y^-OZ^+$  berturut-turut adalah  $K_P = 1000, K_I = 500,$  dan  $K_D = -60$ ;  $K_P = 3000, K_I = 750,$  dan  $K_D = 900$ ;  $K_P = 5000, K_I = 10,$  dan  $K_D = 700$ ;  $K_P = 6000, K_I = 5,$  dan  $K_D = 3000$ . Dengan menggunakan Matlab R2009b diperoleh *step respon* untuk gerak diagonal sejajar bidang  $X^+OZ^+, X^-OZ^+, Y^+OZ^+$  dan  $Y^-OZ^+$  adalah



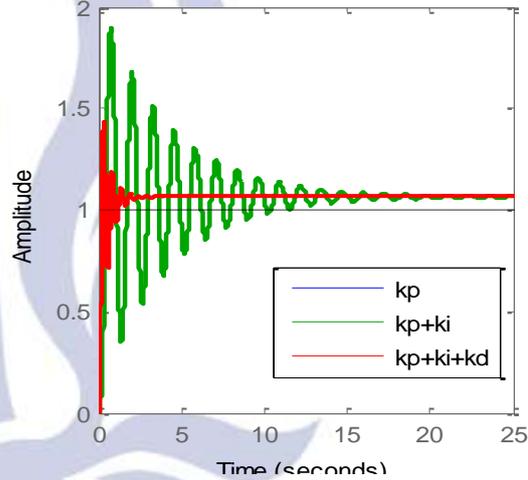
Gambar 7. *Step Response* gerak diagonal bidang  $X^+OZ^+$  dengan  $K_P = 1000, K_I = 500, K_D = -60$



Gambar 8. *Step Respon* gerak diagonal bidang  $X^+OZ^+$  dengan  $K_P = 3000, K_I = 750,$  dan  $K_D = 900$



Gambar 9. *Step Respon* gerak diagonal bidang  $Y^+OZ^+$  dengan  $K_P = 5000, K_I = 10,$  dan  $K_D = 700$



Gambar 10. *Step Respon* gerak diagonal bidang  $Y^-OZ^+$  dengan  $K_P = 6000, K_I = 5,$  dan  $K_D = 3000$

Dari gambar 7 s.d. 10 menunjukkan model linier gerak diagonal sejajar bidang  $X^+OZ^+, X^-OZ^+, Y^+OZ^+$  dan  $Y^-OZ^+$  menjadi stabil setelah diberikan kontrol PID. Pada gerak diagonal sejajar bidang  $X^+OZ^+$ , sebelum diberikan kontrol model tidak stabil, dengan  $K_P = 1000$  model menjadi stabil setelah 2.5 detik tetapi masih memuat *overshoot*,  $K_I = 500$  model menjadi stabil setelah 6 detik tetapi kesalahan dalam keadaan tunak dapat dihilangkan, dan  $K_D = -60$  setelah 5 detik. Pada gerak diagonal sejajar bidang  $X^-OZ^+$ , sebelum diberikan kontrol model tidak stabil, dengan  $K_P = 3000$  model menjadi stabil setelah 5 detik tetapi masih memuat *overshoot*,  $K_I = 750$  model menjadi stabil setelah 6 detik tetapi kesalahan dalam keadaan tunak dapat dihilangkan, dan  $K_D = 900$  setelah 4 detik. Pada gerak diagonal sejajar bidang  $Y^+OZ^+$ , sebelum diberikan kontrol model tidak stabil, dengan  $K_P = 5000$  model menjadi stabil setelah 12 detik tetapi

mesih memuat *overshoot* ,  $K_I = 10$  model menjadi stabil setelah 15 detik tetapi kesalahan dalam keadaan tunak dapat dihilangkan, dan  $K_D = 700$  setelah 2.5 detik. Begitu pula Pada gerak diagonal sejajar bidang  $Y^-OZ^+$ , sebelum diberikan kontrol model tidak stabil, dengan  $K_P = 6000$  model menjadi stabil setelah 21 detik tetapi mesih memuat *overshoot* ,  $K_I = 5$  model menjadi stabil setelah 23 detik tetapi kesalahan dalam keadaan tunak dapat dihilangkan, dan  $K_D = 3000$  setelah 3 detik.

**Gerak Diagonal Di atas Bidang  $X^+OY^+$ ,  $X^-OY^+$ ,  $X^-OY^-$ , dan  $X^+OY^-$**

Berdasarkan fungsi transfer pada gerak diagonal di atas bidang  $X^+OY^+$ ,  $X^-OY^+$ ,  $X^-OY^-$ , dan  $X^+OY^-$  diperoleh penyebut sebagai berikut  $s^3 + 20s^2 + 84s$

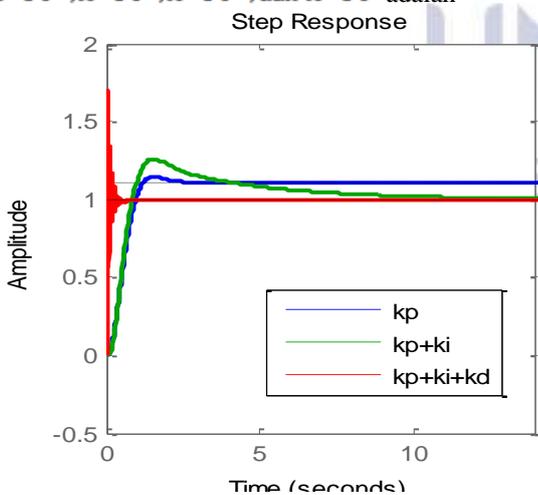
dengan menambahkan kontrol proporsional integral derivatif diperoleh

$$s^4 + 20s^3 + (84 + K_D)s^2 + K_Ps + K_I$$

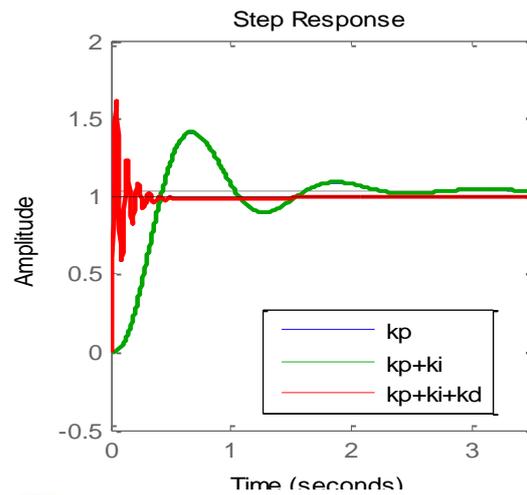
Berdasarkan table Routh-Hurwitz agar gerak diagonal di atas bidang  $X^+OY^+$ ,  $X^-OY^+$ ,  $X^-OY^-$ , dan  $X^+OY^-$  maka

- 1)  $K_D > -1520$
- 2)  $K_I > 0$
- 3)  $\frac{(1520+K_D)K_P - 400K_I}{1520 + K_D} > 0$

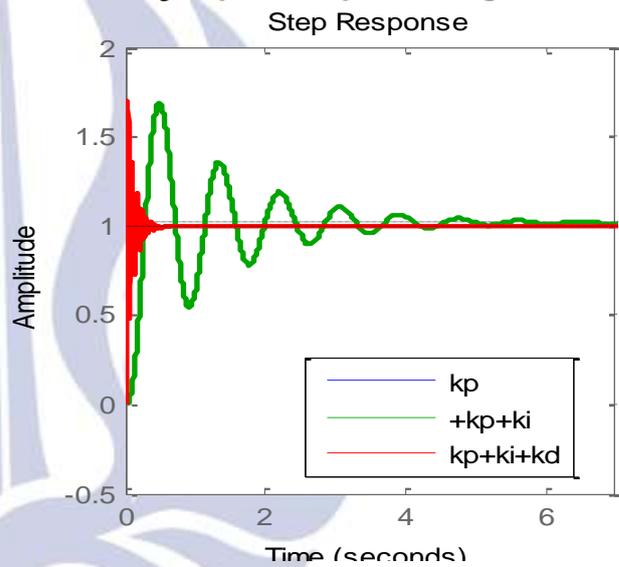
Berdasarkan eksperimen yang telah dilakukan dipilih nilai  $K_P, K_I$  dan  $K_D$  terbaik untuk gerak diagonal di atas bidang  $X^+OY^+$ ,  $X^-OY^+$ ,  $X^-OY^-$ , dan  $X^+OY^-$  berturut-turut adalah  $K_P = 160, K_I = 40$  dan  $K_D = 8500$ ;  $K_P = 500, K_I = 10$  dan  $K_D = 4800$ ;  $K_P = 1000, K_I = 20$ , dan  $K_D = 9000$ ;  $K_P = 1250, K_I = 50$  , dan  $K_D = 250$  . Dengan menggunakan Matlab R2009a diperoleh *step respon* untuk gerak diagonal di atas bidang  $X^+OY^+, X^-OY^+, X^-OY^-$ , dan  $X^+OY^-$  adalah



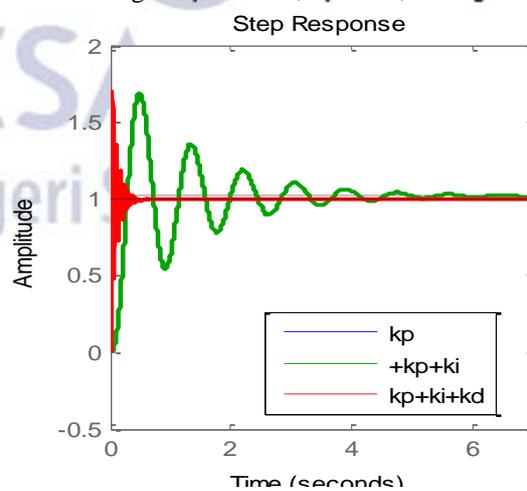
Gambar 11. *Step Respon* gerak diagonal di atas bidang  $X^+OY^+$  dengan  $K_P = 160, K_I = 40$  dan  $K_D = 8500$



Gambar 12. *Step Respon* gerak diagonal di atas bidang  $X^-OY^+$  dengan  $K_P = 500, K_I = 10$  dan  $K_D = 4800$



Gambar 13. *Step Respon* gerak diagonal di atas bidang  $X^-OY^-$  dengan  $K_P = 1000, K_I = 20$ , dan  $K_D = 9000$



Gambar 14. *Step Respon* gerak diagonal di atas bidang  $X^+OY^-$  dengan  $K_P = 1250, K_I = 50$ , dan  $K_D = 250$

Dari gambar 11 s.d. 14 menunjukkan model linier gerak diagonal di atas bidang  $X^+OY^+, X^-OY^+, X^-OY^-$  ,

dan  $X^+OY^-$  menjadi stabil setelah diberikan kontrol PID. Pada gerak diagonal sejajar bidang  $X^+OY^+$ , sebelum diberikan kontrol model tidak stabil, dengan  $K_p = 160$  model menjadi stabil setelah 2 detik tetapi masih memuat *overshoot*,  $K_I = 40$  model menjadi stabil setelah 13 detik tetapi kesalahan dalam keadaan tunak dapat dihilangkan, dan  $K_D = 8500$  setelah 10 detik. Pada gerak diagonal sejajar bidang  $X^-OY^+$ , sebelum diberikan kontrol model tidak stabil, dengan  $K_p = 500$  model menjadi stabil setelah 2 detik tetapi masih memuat *overshoot*,  $K_I = 10$  model menjadi stabil setelah 3.5 detik tetapi kesalahan dalam keadaan tunak dapat dihilangkan, dan  $K_D = 4800$  setelah 0.6 detik. Pada gerak diagonal sejajar bidang  $X^-OY^-$ , sebelum diberikan kontrol model tidak stabil, dengan  $K_p = 1000$  model menjadi stabil setelah 8 detik tetapi masih memuat *overshoot*,  $K_I = 20$  model menjadi stabil setelah 7 detik tetapi kesalahan dalam keadaan tunak dapat dihilangkan, dan  $K_D = 9000$  setelah 0.4 detik. Begitu pula pada gerak diagonal sejajar bidang  $X^+OY^-$ , sebelum diberikan kontrol model tidak stabil, dengan  $K_p = 1250$  model menjadi stabil setelah 11 detik tetapi masih memuat *overshoot*,  $K_I = 50$  model menjadi stabil setelah 12 detik tetapi kesalahan dalam keadaan tunak dapat dihilangkan, dan  $K_D = 250$  setelah 0.5 detik.

### Simpulan

Nilai gain  $K_p$ ,  $K_I$ , dan  $K_D$  agar model gerak diagonal sejajar bidang  $X^+OZ^+$ ,  $X^-OZ^+$ ,  $Y^+OZ^+$  dan  $Y^-OZ^+$  selalu stabil adalah

- 1)  $0 < K_p < 10513$
- 2)  $K_I > 0$
- 3)  $K_D < 7680$

Nilai gain  $K_p$ ,  $K_I$ , dan  $K_D$  agar model gerak diagonal bidang  $X^+OY^+$ ,  $X^-OY^+$ ,  $X^-OY^-$ , dan  $X^+OY^-$  selalu stabil adalah

- 1)  $K_p > 0$
- 2)  $K_I > 0$
- 3)  $K_D > -1520$

### Saran

Pada penelitian selanjutnya peneliti menyarankan menggunakan metode lain yang lebih kompleks seperti metode fuzzy, LQR (*linear quadratic regulator*) atau yang lainnya.

### DAFTAR PUSTAKA

Baroro, Qiromin dan Fuad, Yusuf. 2016. *Analisis Kestabilan Quadrotor Menggunakan Kontrol Proporsional Derivatif*. Unesa. Surabaya.

- Blakelock, John H. 1991. *Automatic Control of Aircraft and Missiles, Second Edition*. John Wiley and Sons, Inc: USA.
- Boyce, William E. dan DiPrima, Richard C. 2000. *Elementary Differential Equation dan Boundary Value Problems, Seventh Edition*. John Wiley and Sons, Inc: USA.
- Bresciani, T. 2008. *Modelling, Identification and Control of A Quadcopter Helicopter*. Departement of Automatic Control, Lund University.
- Bronson, R. dan Costa, G. B. 2006. *Differential Equations Third Edition*. USA.
- Dharmawan, A., Simanungkalit, Yohana Y., dan Megawati, Noorma Y. (2014). *Pemodelan Sistem kendali PID pada quadrotor dengan metode Euler Lagrange*. Indonesian Journal of Electronics and Instrumental Sistem, Vol. 4, No. 1, April 2014, pp. 13~24. ISSN: 2088-3714.
- Domingues, J.M.B. 2009. *Quadrotor Prototype*. Thesis. Instituto Superior Tecnico. Portugal.
- Jirinec, Tomas. 2011. *Stabilization and Control of Unmanned quadcopter*. Thesis. Xzech Technical University in Parague. Parague.
- Ogata, Katsuhiko. 2010. *Modern Control Engineering*. Edisi ke-5. UK: Prentice Hall
- Oktafianto, K., Mardlijah, dan Nurhadi H. 2015. *Desain sistem kendali autonomous underwater vehicle (AUV) menggunakan metode proporsional integral derivatif (PID)*. Prosiding Seminar Nasional Matematika Universitas Negeri Surabaya, 25 April 2015. ISBN No. 978-979-028-728-0.
- Olsder, G.J. dan Van der Woude, J.W. 1994. *Mathematical System Theory*. Faculty Technical Mathematics and informatics Delft University of Technology, the Netherlands.
- Prasetia A. M., Agustina T., Susila, J., dan Effendie A.K., R. 2015. *Perancangan Sistem Tracking dan Disturbance Rejection Berbasis Neural Networks pada Autonomous Underwater Vehicle (AUV)*. Prosiding Seminar Nasional Matematika Universitas Negeri Surabaya, 25 April 2015. ISBN No. 978-979-028-728-0.
- Tianguang, Z. 2007. *Autonomous Hovering of vision IMU Guided Quadrotor*. The International Journal of robotics research.
- Triwiyatno, Agus. 2010. *Buku Kontrol Analog*. Fakultas Teknik Universitas Diponegoro.
- Waslander, S.L. Hoffmann, G.M. Jang, J.S. dan Tomlin, C.J. 2005. *Multi-agen quadrotor testbed control design : integral sliding mode vs. reinforcement learning*. IEEE/RSJ International Convergence on Intelligent Robot and Sistem.