

ANALISIS KESTABILAN SISTEM DINAMIK *UNDERDAMPED* PADA TABRAKAN KENDARAAN

Siti Indarini Nur Faizah

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: sitifaizah1@mhs.unesa.ac.id

Yusuf Fuad

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: yusuffuad@unesa.ac.id

Abstrak

Kendaraan harus meningkatkan standar keamanan yang tepat agar dapat mengurangi dampak fatal seperti yang terjadi pada tabrakan kendaraan. Tabrakan kendaraan dapat dipengaruhi oleh massa kendaraan, kecepatan kendaraan, pegas dan peredam. Pada penelitian ini, dilakukan rekonstruksi model dinamik *underdamped* dengan model Kelvin dimana massa yang melekat pada pegas dan peredam dihubungkan secara paralel pada tabrakan kendaraan dengan penghalang. Fokus penelitian pada tabrakan kendaraan dengan tembok atau dengan kendaraan dalam keadaan diam. Rekonstruksi model menghasilkan respon transien dari sistem dinamik *underdamped*. Normalisasi waktu dilakukan pada respon transien *underdamped* serta analisis kestabilan dikaji pada saat terjadi tabrakan. Simulasi diberikan untuk menentukan trayektori sistem dan ilustrasi kestabilan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa tabrakan kendaraan memiliki nilai perpindahan, kecepatan dan perlambatan yang berbeda-beda setelah tabrakan, bergantung pada kasus dan nilai parameter yang digunakan. Waktu tercepat yang dibutuhkan kendaraan untuk berhenti setelah tabrakan yaitu saat terjadi tabrakan antara mobil dan mobil sejenis dengan lama waktu 2.1 detik pada kecepatan 11 m/s, 2.5 detik pada kecepatan 4.5 m/s, dan 1.75 detik pada kecepatan 20 m/s. Sistem dinamik tabrakan kendaraan berperilaku stabil asimtotik dengan trayektori berjenis spiral.

Kata Kunci: tabrakan kendaraan, pemodelan matematika, model Kelvin, sistem *underdamped*.

Abstract

Vehicle is designed to improve appropriate safety standards, and may reduce the impact of vehicle crash. A crash can be affected by vehicle mass, vehicle speed, spring and damper. This research, the reconstructs an underdamped system based on the Kelvin model in which the inherent masses of springs and dampers are connected parallel in the vehicle crash. This research is focused to the vehicle crash with a wall and with another static vehicle. The reconstruction model generates a transient response from the underdamped dynamic system. A normalization time is performed on the transient response of underdamped system and the stability analysis was examined on the collision occurred. The simulation is given to determine the trajectory system in stability analysis. The results show that vehicle crashes have different values of displacement, velocity and deceleration after collision, depend on the case and the parameter values that used. The fastest time that vehicle needs to stop after a collision is when there is a collision between the car and the same car with a time of 2.5 seconds at a speed of 11 m/s, 2.5 seconds at a speed of 4.5 m/s, and 1.75 seconds at a speed of 20 m/s. Vehicle crash dynamic system measures a system is asymptotic stable with a spiral type of trajectory.

Keywords: vehicle crash, mathematical modeling, Kelvin model, underdamped system.

PENDAHULUAN

Di era modern kebutuhan alat transportasi bagi manusia sangatlah penting. Alat transportasi yang banyak digemari oleh masyarakat ialah kendaraan bermotor. Salah satu kendaraan bermotor yang digemari adalah mobil. Karena mobil dapat mengangkut lebih banyak orang dan juga dalam penggunaan mobil tidak memperhatikan cuaca.

Penggunaan mobil tidak selalu menguntungkan pengendaranya, dalam penggunaanya juga tidak lepas dari suatu kecelakaan. Menurut Komite Nasional Keselamatan Transportasi (2016) "Di Indonesia, terdapat 68,29% kecelakaan lalu lintas akibat tabrakan kendaraan pada tahun 2010-2016 dengan jumlah sebanyak 28 tabrakan dari 41 kasus kecelakaan". Untuk mengurangi terjadinya tabrakan kendaraan diperlukan standar keamanan yang

tepat dengan mengetahui faktor terjadinya tabrakan kendaraan. Salah satu faktor yang menyebabkan terjadinya tabrakan kendaraan dipengaruhi oleh massa kendaraan, kecepatan kendaraan, pegas dan peredam. Tabrakan tersebut dapat beranekaragam, baik tabrakan mobil dengan mobil maupun tabrakan mobil dengan benda-denda di sekitar ruas jalan.

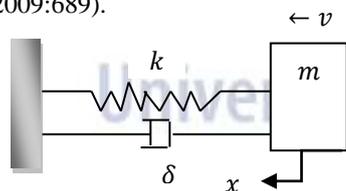
Dalam penelitian yang dilakukan oleh Pawlus et al., (2010) digunakan persamaan model Kelvin untuk menganalisis sistem dinamik suatu tabrakan kendaraan yang terjadi. Dari persamaan tersebut dapat diperoleh respon transien yang berupa perpindahan, kecepatan dan perlambatan yang terjadi akibat tabrakan kendaraan, dengan massa, pegas dan peredam sebagai konstanta dimana massa yang melekat pada pegas dan peredam dihubungkan secara paralel. Hasil simulasi dapat digunakan untuk menentukan tabrakan maksimum suatu mobil, bagaimana perubahan kecepatan dan percepatan selama terjadi tabrakan kendaraan.

Pada penelitian ini, dilakukan rekonstruksi model tabrakan kendaraan dan analisis kestabilan dengan menggunakan sistem dinamik *underdamped* berdasarkan nilai konstanta peredam. Untuk memperoleh respon transien dari sistem dinamik *underdamped* digunakan sistem linier dengan model Kelvin yang terinspirasi oleh Huang, (2002). Simulasi digunakan untuk mengetahui besar perpindahan, kecepatan dan perlambatan setelah tabrakan terjadi, dimana tabrakan terjadi saat mobil menabrak penghalang yang berupa tembok atau mobil/truk yang sedang dalam keadaan diam.

LANDASAN TEORI

A. Model Kelvin

Model Kelvin yang juga disebut dengan Model Voigt, dapat ditunjukkan dengan peredam dan pegas terhubung paralel seperti gambar di bawah ini (Meyers dan Chawla, 2009:689).



Gambar 1. Model Kelvin untuk tabrakan kendaraan ke penghalang

Keterangan:

- k = kekakuan pegas
- m = massa
- δ = koefisien peredam
- x = perpindahan massa
- v = kecepatan

Gambar 1. Mengilustrasikan massa m melaju dengan kecepatan v dan menabrak penghalang. Pegas k dan peredam δ akan berpengaruh pada perpindahan massa m dan dampak dari tabrakan yang terjadi.

B. Dinamik Tabrakan Kendaraan

Untuk menganalisis suatu tabrakan kendaraan dapat dilakukan dengan teori dinamik, yang berhubungan dengan kinetik dan dipengaruhi oleh massa, kecepatan, pegas dan peredam. Dalam memodelkan dinamik tabrakan kendaraan diperlukan ilustrasi tabrakan kendaraan dengan objek yang ditabrak dengan tepat. Berikut ilustrasi tabrakan kendaraan yang akan dimodelkan.

1. Tabrakan mobil dengan tembok



Gambar 2. Ilustrasi tabrakan mobil dengan tembok

dengan Mobil bermassa m melaju dengan kecepatan v kemudian menabrak tembok yang kokoh.

2. Tabrakan mobil dengan truk



Gambar 3. Ilustrasi tabrakan mobil dengan truk

Mobil bermassa m_1 melaju dengan kecepatan v kemudian menabrak truk bermassa m_2 yang dalam keadaan diam. Massa mobil m_1 memiliki massa yang lebih kecil daripada massa truk m_2 sehingga $m_1 \neq m_2$.

3. Tabrakan mobil dengan mobil



Gambar 4. Ilustrasi tabrakan mobil dengan mobil

Mobil bermassa m_1 melaju dengan kecepatan v kemudian menabrak mobil bermassa m_2 yang dalam keadaan diam. $m_1 = m_2$.

C. Persamaan Model Tabrakan Kendaraan

Untuk menggambarkan tabrakan mobil digunakan model dinamik berdasarkan model Kelvin. Model ini digunakan untuk menggambarkan tabrakan kendaraan dengan penghalang, yang terjadi saat mobil melaju dengan kecepatan v menabrak penghalang di depannya.

Getaran massa dan pegas memiliki persamaan sebagai berikut:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{1}$$

Dengan k pegas, m massa, x perpindahan dan $F = -k \cdot x(t)$ merupakan gaya pegas.

Dalam kasus ini, digunakan sistem dinamik *underdamped* karena pada saat terjadi tabrakan pada penghalang, kendaraan tidak langsung berhenti melainkan akan terpental, dengan ditambahkan gaya peredam pada persamaan (1).

$$F = -\delta\dot{x}(t)$$

dengan δ merupakan koefisien peredam.

Berdasarkan gaya aksi-reaksi, dari sistem dinamik *underdamped* diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$m\ddot{x}(t) + \delta\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{2}$$

atau

$$\ddot{x}(t) + \frac{\delta}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

Misalkan faktor peredam $\zeta = \frac{\delta}{2m\omega}$ dan frekuensi natural

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Diperoleh persamaan dinamik berikut:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = 0$$

Respon transien dari sistem dinamik *underdamped* adalah (Pawlus et al., 2010):

Perpindahan

$$x(t) = \frac{v_0 e^{-\zeta\omega t}}{\omega\sqrt{\zeta^2-1}} \sin(\omega\sqrt{\zeta^2-1}t) \tag{3}$$

Kecepatan

$$\dot{x}(t) = v_0 e^{-\zeta\omega t} \left[\cos(\omega\sqrt{\zeta^2-1}t) - \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}} \sin(\omega\sqrt{\zeta^2-1}t) \right] \tag{4}$$

Perlambatan

$$\ddot{x}(t) = v_0 \omega e^{-\zeta\omega t} \left[-2\zeta \cos(\omega\sqrt{\zeta^2-1}t) + \frac{2\zeta^2-1}{\sqrt{\zeta^2-1}} \sin(\omega\sqrt{\zeta^2-1}t) \right] \tag{5}$$

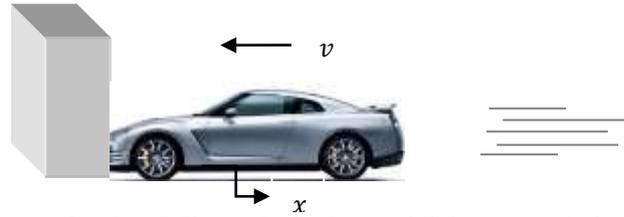
HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Rekonstruksi Model

Rekonstruksi model matematika tabrakan kendaraan difokuskan pada 2 jenis tabrakan mobil. Jenis tabrakan pertama merupakan tabrakan mobil dengan penghalang (tembok) dan yang kedua merupakan tabrakan mobil dengan kendaraan yang dalam keadaan diam. Mobil yang bergerak diasumsikan memiliki massa, peredam, pegas dan kecepatan. Jenis-jenis tabrakan dapat diilustrasikan berikut:

1. Tabrakan dengan penghalang diam

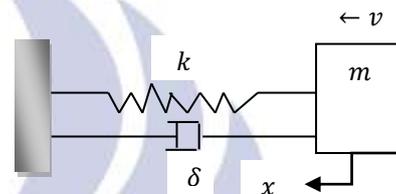
Tabrakan kendaraan dengan penghalang dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 5. Ilustrasi tabrakan mobil dengan tembok

Mobil bermassa m yang dilengkapi dengan peredam δ dan pegas k melaju dengan kecepatan v kemudian menabrak tembok yang berdiri kokoh. Setelah tabrakan, mobil mengalami perpindahan sejauh x dan perubahan kecepatan serta perlambatan.

Massa, pegas dan peredam pada mobil dihubungkan secara paralel, berdasarkan model Kelvin, dan dapat dimodelkan berikut:



Gambar 6. Model tabrakan mobil dengan tembok

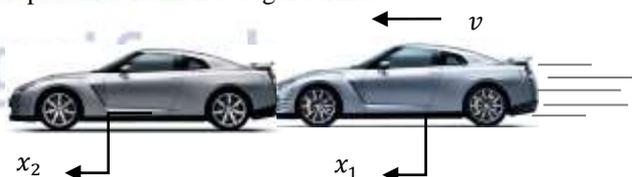
Dengan persamaan:

$$m\ddot{x}(t) + \delta\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$

Satu-satunya massa yang bergerak adalah massa m . Dimisalkan kendaraan dengan massa m bergerak dengan kecepatan v dan melakukan perpindahan sejauh x , dengan pegas k dan peredam δ yang terdapat pada kendaraan. Kemudian massa m menabrak penghalang dimana massa penghalang diasumsikan mempunyai massa tak hingga karena penghalang menyatu dengan permukaan tanah, sehingga tidak berpindah setelah tabrakan terjadi.

2. Tabrakan dengan kendaraan diam

Tabrakan mobil dengan kendaraan dalam keadaan diam dapat diilustrasikan sebagai berikut:

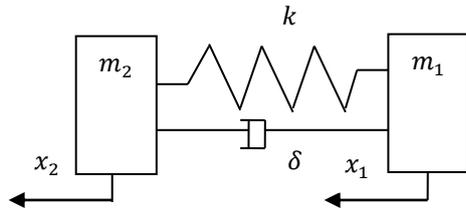


Gambar 7. Ilustrasi tabrakan mobil dengan kendaraan

Pada tabrakan ini, mobil bermassa m_1 melaju dengan kecepatan v kemudian menabrak kendaraan bermassa m_2 yang dalam keadaan diam. Massa kendaraan (m_2) dipengaruhi oleh massa mobil (m_1) yang menabrak, karena mobil dan kendaraan mengalami gaya aksi reaksi pada hukum Newton III.

$$\leftarrow v$$

$$x = x_1 - x_2$$



Gambar 8. Model tabrakan mobil dengan kendaraan diam

Diasumsikan mobil dengan massa m_2 dipengaruhi oleh massa mobil m_1 pada kecepatan awal/akhir. Massa m_1 bergerak dengan kecepatan v dan melakukan perpindahan sejauh x_1 , dengan pegas k dan peredam δ yang terdapat pada mobil. Kemudian massa m_1 menabrak mobil yang dalam keadaan diam bermassa m_2 . Setelah terjadi tabrakan, mobil bermassa m_2 mengalami perpindahan sebesar x_2 . Perpindahan total diperoleh dari mobil bermassa m_1 adalah perpindahan x_1 dikurangi perpindahan x_2 karena kendaraan bermassa m_2 mengalami perpindahan setelah tabrakan terjadi.

Persamaan model tabrakan kendaraan:

$$m\ddot{x}(t) + \delta\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (6)$$

atau dapat ditulis dengan

$$\ddot{x}(t) + \frac{\delta}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

dengan $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Misalkan faktor peredam $\zeta = \frac{\delta}{2m\omega}$ dan frekuensi natural

$$\text{angular } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Sehingga diperoleh persamaan dinamik sebagai berikut:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = 0 \quad (7)$$

Dari persamaan (7) dapat diperoleh respon transien sistem dinamik *underdamped* dengan $x(0) = x_0$ dan $\dot{x}(0) = v_0$.

Sehingga diperoleh:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t} \left[x_0(\cos \eta\omega t) + \frac{v_0 + \zeta\omega x_0}{\eta\omega}(\sin \eta\omega t) \right] \quad (8)$$

$$\dot{x}(t) = -\zeta\omega e^{-\zeta\omega t} \left(x_0(\cos \eta\omega t) + \frac{v_0 + \zeta\omega x_0}{\eta\omega}(\sin \eta\omega t) \right) + e^{-\zeta\omega t} \left[x_0\eta\omega(\sin \eta\omega t) + (v_0 + \zeta\omega x_0)(\cos \eta\omega t) \right] \quad (9)$$

$$\ddot{x}(t) = (2\zeta^2 - 1)\omega^2 e^{-\zeta\omega t} \left[x_0(\cos \eta\omega t) + \frac{v_0 + \zeta\omega x_0}{\eta\omega}(\sin \eta\omega t) \right] - 2\zeta\omega e^{-\zeta\omega t} \left[x_0\eta\omega(\sin \eta\omega t) + (v_0 + \zeta\omega x_0)(\cos \eta\omega t) \right] \quad (10)$$

B. Normalisasi

Asumsikan $x_0 = 0$, diperoleh:

$$x(t) = \frac{v_0}{\eta\omega} e^{-\zeta\omega t}(\sin \eta\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = v_0 e^{-\zeta\omega t} \left[\frac{-\zeta}{\eta}(\sin \eta\omega t) + (\cos \eta\omega t) \right]$$

$$\ddot{x}(t) = v_0\omega e^{-\zeta\omega t} \left[\frac{(2\zeta^2 - 1)}{\eta}(\sin \eta\omega t) - 2\zeta(\cos \eta\omega t) \right]$$

Didefinisikan:

$$\begin{aligned} x_{norm} &= \frac{v_0}{\omega} \\ \dot{x}_{norm} &= v_0\omega \\ \tau &= \omega t \end{aligned}$$

$$\frac{x(t)}{x_{norm}} = \frac{e^{-\zeta\tau}}{\eta} \sin \eta\tau$$

$$\frac{\dot{x}(t)}{v_0} = e^{-\zeta\tau} \left(-\frac{\zeta}{\eta} \sin \eta\tau + \cos \eta\tau \right)$$

$$\frac{\ddot{x}(t)}{\dot{x}_{norm}} = e^{-\zeta\tau} \left(\frac{(2\zeta^2 - 1)}{\eta} \sin \eta\tau - 2\zeta \cos \eta\tau \right)$$

Dimana:

x_{norm} = perpindahan maksimum tanpa peredam (*undamped system*)

\dot{x}_{norm} = perlambatan maksimum tanpa peredam (*undamped system*)

τ = posisi angular pada t

Didefinisikan:

$$\frac{x(t)}{x_{norm}} = e^{-\zeta\tau_m}$$

$$\tau_c = t_c\omega$$

$$\text{maka } \tau_c = \frac{x(t)}{v_0}\omega = e^{-\zeta\tau_m}$$

$\tau_m = t_m\omega$, posisi angular pada perpindahan,

$\tau_r = t_r\omega$, posisi angular pada kecepatan

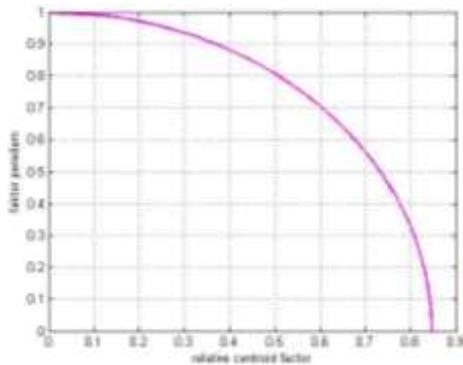
$$\tau_m = \frac{1}{\eta} \tan^{-1} \left(\frac{\eta}{\zeta} \right) \text{ dan } \tau_r = 2\tau_m \quad (11)$$

τ_c dan τ_m ditransformasi sehingga diperoleh lokasi pusat luasan:

$$\frac{\tau_c}{\tau_m} = \frac{t_c}{t_m} = \frac{\eta}{\arctan \left(\frac{\eta}{\zeta} \right)} e^{\left[\frac{-\zeta}{\eta} \arctan \left(\frac{\eta}{\zeta} \right) \right]}$$

$$\tau_m = t_m(2\pi f) \text{ sehingga } ft_m = \frac{1}{2\pi\eta} \arctan \left(\frac{\eta}{\zeta} \right)$$

Dari persamaan di atas, faktor peredam ζ dapat ditentukan dari grafik berikut:



Gambar 9. Faktor peredam berdasarkan lokasi pusat luasan

Sehingga diperoleh normalisasi:

$$\text{Perpindahan: } x(t_m) = \frac{v_0}{\omega} \cdot e^{-\zeta\tau_m} \quad (12)$$

$$\text{Kecepatan: } \dot{x}(t_m) = v_0 \cdot e^{-2\zeta\tau_m} \quad (13)$$

$$\text{Perlambatan: } \ddot{x}(t_m) = -2v_0\zeta\omega \cdot e^{-2\zeta\tau_m} \quad (14)$$

C. Simulasi

Dalam simulasi model tabrakan ini dibagi menjadi 3 kasus yang melibatkan objek yang akan ditabrak memiliki massa tetap dan tidak memiliki massa tetap, yaitu tabrakan mobil dengan tembok, tabrakan mobil dengan mobil dan tabrakan mobil dengan truk. Simulasi model ini berdasarkan pada persamaan (12), (13) dan (14) dengan menggunakan Matlab 2009b.

v_0 = kecepatan awal

f = frekuensi pengendalian

m_1 = massa mobil 1

m_2 = massa mobil 2

m = massa

δ = konstanta peredam

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f$ = frekuensi natural

$\zeta = \frac{\delta}{2m\omega}$ = faktor peredam

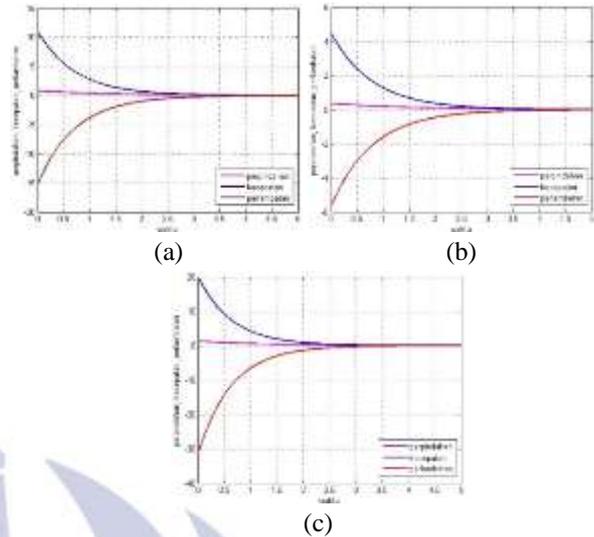
$k = 4\pi^2 f^2 m$ = konstanta pegas

1. Tabrakan mobil dengan tembok

Pada tabrakan ini, mobil sedang melaju dengan kecepatan tertentu kemudian menabrak tembok yang masih kokoh, dengan nilai parameter sebagai berikut:

Tabel 1. Nilai parameter tabrakan mobil dengan tembok

simbol	Simulasi 1	Simulasi 2	Simulasi 3
v_0	11 m/s	4.5 m/s	20 m/s
f	2,2 Hz	2 Hz	2,5 Hz
m	873 kg	873 kg	873 kg
ζ	0,05	0,05	0,05
k	166809 N/m	137718,9 N/m	215185,8 N/m
δ	1207 N - s/m	1000 N - s/m	1500 N - s/m
ω	13,8 rad	12,6 rad	15,7 rad



Gambar 10. Grafik persamaan (12), (13) dan (14) pada tabrakan mobil ke tembok dengan nilai kecepatan awal $v_0 = 11$ m/s, $v_0 = 4,5$ m/s dan $v_0 = 20$ m/s

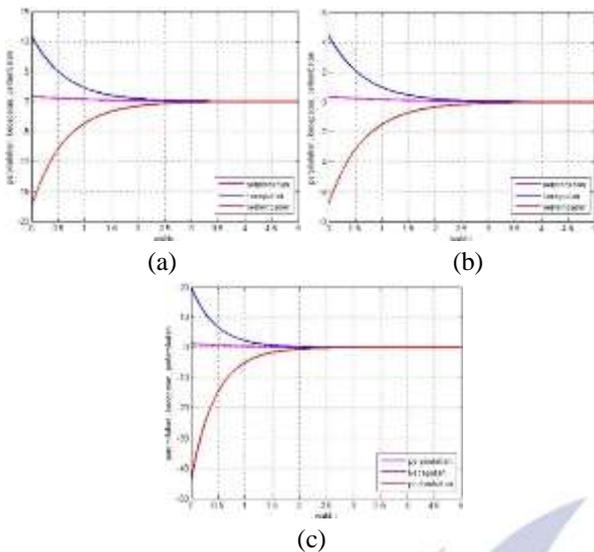
Pada gambar 9(a), mobil berhenti pada waktu 4,25 detik setelah tabrakan dan memiliki nilai perpindahan sebesar 0.7718 meter, kecepatan sebesar 0.0111 m/s dan perlambatan sebesar -0.0153 m/s². Pada gambar 9(b), mobil berhenti pada waktu 4,1 detik setelah tabrakan dan memiliki nilai perpindahan sebesar 0.3418 meter, kecepatan sebesar 0.0083 m/s dan perlambatan sebesar -0.0104 m/s². Pada gambar 9(c), mobil berhenti pada waktu 3,8 detik setelah tabrakan dan memiliki nilai perpindahan sebesar 1.2739 meter, kecepatan sebesar 0.0078 m/s dan perlambatan sebesar -0.0122 m/s².

2. Tabrakan mobil dengan truk

Pada tabrakan ini, mobil sedang melaju dengan kecepatan tertentu kemudian menabrak truk yang dalam keadaan diam, dengan nilai parameter sebagai berikut:

Tabel 2. Nilai parameter tabrakan mobil dengan truk

simbol	Simulasi 1	Simulasi 2	Simulasi 3
v_0	11 m/s	4.5 m/s	20 m/s
f	2,2 Hz	2 Hz	2,5 Hz
m_1	873 kg	873 kg	873 kg
m_2	3300 kg	3300 kg	3300 kg
m	690,4 kg	690,4 kg	690,4 kg
ζ	0,06	0,06	0,07
k	119804 N/m	108913 N/m	170176,7 N/m
δ	1207 N - s/m	1000 N - s/m	1500 N - s/m
ω	13,2 rad	12,6 rad	15,7 rad



Gambar 11. Grafik persamaan (12), (13) dan (14) pada tabrakan mobil ke truk dengan nilai kecepatan awal $v_0 = 11$ m/s, $v_0 = 4,5$ m/s dan $v_0 = 20$ m/s

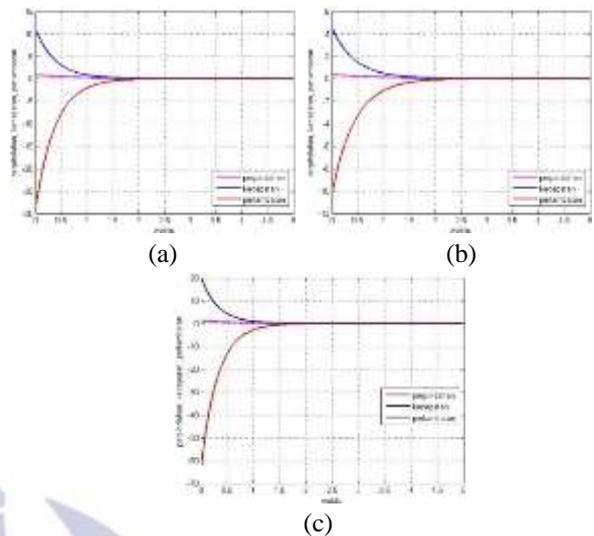
Pada gambar 10(a), mobil berhenti pada waktu 3,8 detik setelah tabrakan dengan truk dan memiliki nilai perpindahan sebesar 0.8174 meter, kecepatan sebesar 0.004 m/s dan perlambatan sebesar -0.0063 m/s². Pada gambar 10(b), mobil berhenti pada waktu 4 detik setelah tabrakan dengan truk dan memiliki nilai perpindahan sebesar 0.3489 meter, kecepatan setelah 0.0023 m/s dan perlambatan sebesar -0.0035 m/s². Pada gambar 10(c), mobil berhenti pada waktu 2,75 detik setelah tabrakan dengan truk dan memiliki nilai perpindahan sebesar 1.2687 meter, kecepatan sebesar 3.3739×10^{-4} m/s dan perlambatan sebesar -7.2159×10^{-4} m/s².

3. Tabrakan mobil dengan mobil (jenis sama)

Pada tabrakan ini, mobil sedang melaju dengan kecepatan tertentu kemudian menabrak mobil yang dalam keadaan diam, dengan nilai parameter sebagai berikut:

Tabel 3. Nilai tabrakan mobil dengan mobil sejenis

simbol	Simulasi 1	Simulasi 2	Simulasi 3
v_0	11 m/s	4.5 m/s	20 m/s
f	2,2 Hz	2 Hz	2,5 Hz
m_1	873 kg	873 kg	873 kg
m_2	873 kg	873 kg	873 kg
m	436,5 kg	436,5 kg	436,5 kg
ζ	0,1	0,09	0,1
k	75745,4 N/m	68859,4 N/m	107592,9 N/m
δ	1207 N – s/m	1000 N – s/m	1500 N – s/m
ω	13,2 rad	12,6 rad	15,7 rad



Gambar 12. Grafik persamaan (12), (13) dan (14) pada tabrakan mobil ke mobil sejenis dengan nilai kecepatan awal $v_0 = 11$ m/s, $v_0 = 4,5$ m/s dan $v_0 = 20$ m/s

Pada gambar 11(a), mobil berhenti pada waktu 2,1 detik setelah tabrakan dengan mobil dan memiliki nilai perpindahan sebesar 0.8322 meter, kecepatan sebesar 2.0357×10^{-5} m/s dan perlambatan sebesar -5.3741×10^{-5} m/s². Pada gambar 11(b), mobil berhenti pada waktu 2,5 detik setelah tabrakan dengan mobil dan memiliki nilai perpindahan sebesar 0.3559 meter, kecepatan sebesar 5.3495×10^{-5} m/s dan perlambatan sebesar -1.2133 m/s². Pada gambar 11(c), mobil berhenti pada waktu 1,75 detik setelah tabrakan dengan mobil dan memiliki nilai perpindahan sebesar 1.2734 meter, kecepatan sebesar 3.04×10^{-6} m/s dan perlambatan sebesar $-9,54 \times 10^{-6}$ m/s².

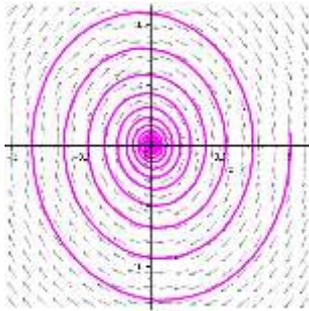
D. Analisis Kestabilan

Untuk mengetahui kestabilan sistem dinamik teredam pada tabrakan kendaraan maka terlebih dahulu mensubstitusi nilai parameter pada tabel 3 ke sistem persamaan $\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = 0$. Salah satu nilai parameter yang diambil dari tabel 3 yaitu:

$$\zeta = 0.05 \text{ dan } \omega = 13.8$$

Diperoleh $\lambda_{1,2} = -0.69 \pm 13.785i$, karena setiap nilai eigen merupakan kompleks sekawan bukan imajiner murni dan bagian real bernilai negatif dengan demikian sistem stabil asimtotik.

Berikut merupakan trayektori sistem dengan nilai awal $x_1(0) = 1$ dan $x_2(0) = 1$.



Gambar 13. Trayektori sistem berjenis spiral dengan nilai $\zeta = 0.05$ dan $\omega = 13.8$

$$x(t_m) = \frac{v_0}{\omega} \cdot e^{-\zeta\tau_m}$$

$$\dot{x}(t_m) = v_0 \cdot e^{-2\zeta\tau_m}$$

$$\ddot{x}(t_m) = -2v_0\zeta\omega \cdot e^{-2\zeta\tau_m}$$

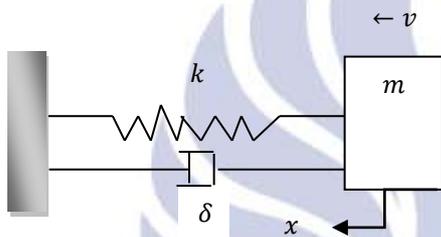
3. Dari hasil simulasi, kendaraan (mobil) mengalami perpindahan, perlambatan dan perubahan kecepatan setelah terjadi tabrakan. Semakin besar nilai kecepatan awal (v_0) semakin besar pula nilai perpindahan. Tabrakan mobil dengan penghalang (tembok) memiliki waktu yang paling lama untuk mobil berhenti, sedangkan tabrakan mobil dengan mobil berjenis sama memiliki waktu yang paling cepat untuk mobil berhenti dengan variasi kecepatan awal yang berbeda. Semakin besar massa benda yang ditabrak, semakin lama pula waktu yang digunakan mobil untuk berhenti setelah tabrakan terjadi.
4. Hasil analisis kestabilan sistem dinamik pada tabrakan kendaraan menunjukkan bahwa sistem stabil asimtotik.

PENUTUP

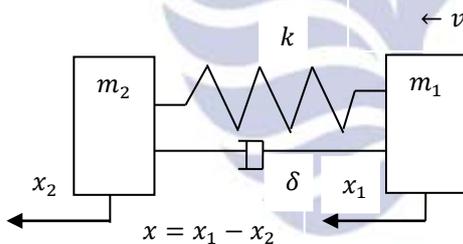
A. Simpulan

Berdasarkan pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Rekonstruksi model tabrakan kendaraan
 - a. Pada penghalang (tembok)



- b. Pada kendaraan lain



Persamaan model dinamik:

$$m\ddot{x}(t) + \delta\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$

Dengan respon transien sebagai berikut:

$$x(t) = \frac{v_0 e^{-\zeta\omega t}}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega} \sin \sqrt{1-\zeta^2}\omega t$$

$$\dot{x}(t) = v_0 e^{-\zeta\omega t} \left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \sqrt{1-\zeta^2}\omega t + \cos \sqrt{1-\zeta^2}\omega t \right)$$

$$\ddot{x}(t) = v_0 \omega e^{-\zeta\omega t} \left(\frac{(2\zeta^2-1)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \sqrt{1-\zeta^2}\omega t - 2\zeta \cos \sqrt{1-\zeta^2}\omega t \right)$$

2. Untuk memiliki hasil simulasi, dilakukan normalisasi waktu pada respon transien, diperoleh sebagai berikut:

B. Saran

Kendaraan yang ditabrak merupakan kendaraan yang sedang dalam keadaan diam, maka disarankan apabila pembaca ingin mengambil topik yang sama sebaiknya membahas model tabrakan kendaraan dengan kendaraan yang ditabrak merupakan kendaraan yang sedang bergerak.

DAFTAR PUSTAKA

Boyce, William E. dan DiPrima, Richard C. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Seventh Edition. United States of America: John Wiley & Sons, Inc.

Huang, Matthew. 2002. *Vehicle Crash Mechanics*. United States of America: CRC Press.

Kreuzig, Erwin. 2011. *Advanced Engineering Mathematics*. Tenth Edition. United States of America: John Wiley & Sons, Inc.

Kusmaryanto, Sigit. 2013. *Penyelesaian Model Sistem Gerak Bebas Tereadam*, (http://sigitkus.lecture.ub.ac.id/files/2013/11/pemodelan-sistem-gerak-bebas-tereadam_1.pdf, diunduh 15 Oktober 2016).

Meyers, Marc Andre dan Chawla, Krishan Kumar. 2009. *Mechanical Behavior of Materials*. United Kingdom: Cambridge University Press.

Pawlus, W. Nielsen, J. E. Karimi, H. R. Robbersmyr, K G. 2010. "Mathematical Modeling and Analysis of a Vehicle Crash". *Forth European Computing Conference*. pp 194-199. Bucharest: World Scientific and Engineering Academy and Society.

Saperstone, Stephen H. 1998. *Introduction to Ordinary Differential Equations*. Pacific Grove: Brooks Cole.

